



Nyugat-magyarországi Egyetem



Gribovszki Zoltán

Környezeti áramlástan

ISBN 978-963-334-167-4

Műszaki metaadatbázis alapú fenntartható
e-learning és tudástár létrehozása

TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0067



A projekt az Európai Unió támogatásával,
az Európai Szociális Alap
társfinanszírozásával valósul meg.

A pályázat keretein belül létrehoztunk egy speciális, felhő alapú adatbázist, tudásfelhő néven, ami egymástól függetlenül is értelmes tudásmorzsákból építkezik. Ezekből az elemi építőkövekből lehet felépíteni egy-egy órai tananyagot, vagy akár egy tantárgy teljes jegyzetét. A létrejött tananyagokat a program online „fordítja” le egy adott eszközre, így a tananyagok optimálisan tudnak megjelenni a diákok okostelefonján, vagy akár egy nagy előadó kivetítőjén is. A projektben résztvevő oktatók a saját maguk által fejlesztett, létrehozott tananyagokat feltöltötték a felhő alapú adatbázisba. A felhasznált anyagok minden eleme mindig magával viszi az eredetileg megadott metaadatokat (pl. fénykép készítője), így a felhasználás során a hivatkozás automatikussá válik.

Ma nagyon sok oktatási kísérlet zajlik a világban, de még nem látszik pontosan, hogy a „fordított osztály” (flipped classroom) vagy a MOOC (massive open online courses) nyílt videó anyagai jelentik a járható utat. Az azonban mindenki számára világos, hogy változtatni kell a megszokott módszereken. A kidolgozott tudásfelhő keretrendszer egyszerre képes kezelni az egyéni tanulási utakat, de akár ki tud szolgálni több ezer hallgatót is egyszerre.

Minden oktató a saját belátása szerint tudja alkalmazni, használni, alakítani az adatbázisát, valamint szabadon használhatja a mások által feltöltött tananyag elemeket anélkül, hogy a hivatkozásra külön hangsúlyt kellene fektetnie. Az egyes elemekből összeállított „jegyzetek” akár személyre szabhatók, ha pontosan behatárolható a célcsoport tudásszintje.

Az elkészült tananyagok nem statikus, nyomtatott (PDF) jegyzetek, hanem egy állandóan változó, változtatható képekből, videókból és 3D modellekből felépített dinamikus rendszer. Az oktatók az ipar által megkövetelt legmodernebb technológiákat naprakészen tudják beépíteni a tudásfelhőben tárolt dinamikus „jegyzeteikbe” anélkül, hogy új „PDF” jegyzetet kellene kiadni. Ez az online rendszer biztosítja a tananyagoknak és magának az oktatásnak a fenntarthatóságát is.

A dinamikus, metaadat struktúrára épülő tananyagainknak ebben a jegyzetben, csak egy pillanatfelvétele, lenyomata tud megjelenni. A videóknak, az interaktív és 3D struktúráknak, valamint a frissülő tartalmaknak a megjelenítésére így nincsen lehetőségünk.

Az e-learning nem feleslegessé teszi a tanárokat, hanem lehetővé teszi számukra, hogy úgy foglalkozhassanak a diákjaikkal, ahogy a mai, felgyorsult világ megköveteli.

Készítette: Dr. Gribovszki Zoltán, PhD.

Nyugat-magyarországi Egyetem, Erdőmérnöki Kar, Geomatikai, Erdőfeltárási és Vízgazdálkodási Intézet.

A lektorálást végezte: Prof. Dr. Józsa János, akadémikus

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építőmérnöki Kar, Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék

Támogatás: A tananyag a „Műszaki metaadatbázis alapú e-learning és tudástár létrehozása” című TÁMOP-4.2.1.A/1-11/1-2011-0067 pályázat keretében készült. A program célja: „Képzés- és tartalomfejlesztés, képzők képzése, különös tekintettel a matematikai, természettudományi, műszaki és informatikai képzésekre és azok fejlesztésére”.

Tartalomjegyzék

I	Folyadékok fizikai és mechanikai sajátosságai	8
1.	A folyadékok és a szilárd anyagok összehasonlítása	9
1.1.	A szilárd test és a folyadék deformációja	9
1.2.	Newton viszkozitási törvénye	9
2.	Folyadékok tulajdonságai	10
2.1.	Sűrűség	10
2.2.	Viszkozitási tényezők	11
2.3.	Kompresszibilitás	12
2.4.	Felületi feszültség	12
2.5.	Halmazállapotok	13
2.6.	A gáztörvény	14
2.7.	A termodinamikai első törvénye	15
2.8.	Entalpia	15
2.9.	Fajhő, egyéb termikus sajátosságok	16
2.10.	Légnemű és cseppfolyós halmazállapotú közegek összehasonlítása	16
2.11.	A valóságos és ideális folyadék összehasonlítása	16
2.12.	Nyomás	16
2.13.	Áramlási sebesség	18
II	Folytonosság tétele	19
3.	Skalár és vektorterek műveletei	19
3.1.	Gradiens	19
3.2.	Divergencia	19
3.3.	Rotáció	20
4.	Az áramlás jellemző vonalai, áramlások időfüggése	21
4.1.	Permanens, nem permanens áramlások	21
4.2.	Pálya, áramvonal, nyomvonal és folyékony vonal	21
5.	Folytonossági tétel	22
5.1.	Folytonossági tétele általános megfogalmazása	22
5.2.	A folytonosság tétele áramcsőben	24
5.3.	Folytonossági tétel permanens áramlásra	26
III	Az Euler egyenlet és a Bernoulli egyenlet	27
6.	Az Euler egyenlet	27
6.1.	A folyadék rész lokális és konvektív gyorsulása	27
6.2.	Az Euler egyenlet levezetése	29

7. A Bernoulli-egyenlet	31
7.1. A Bernoulli-egyenlet általános alakja és egyszerűsítése	31
7.1.1. A Bernoulli-egyenlet felírva a potenciálokra	32
7.1.2. A Bernoulli-egyenlet felírva a nyomásokra, a statikus, a dinamikus és az össznyomás értelmezése	32
7.1.3. A Bernoulli-egyenlet hossz-dimenzióban felírva	33
7.2. A Bernoulli-egyenlet alkalmazása a valóságos áramlásokra	34
IV Örvénytételek	37
8. Thomson tétel	37
9. Helmholtz első és második örvénytétele	39
9.1. Örvényvonal, örvényfelület, örvénycső	39
9.2. Helmholtz I. örvénytétele	40
9.3. Helmholtz II. örvénytétele	42
V Az Impulzustétel	45
10. Az impulzustétel levezetése	45
11. Szilárd test jelenléte az ellenőrző felületben	49
12. A hidraulika impulzustétele	50
12.1. Az impulzustétel alkalmazása áramcsőre	51
12.2. Alkalmazás áramcsövek összességére	51
12.3. Erővektorok egyensúlya az impulzustétel értelmezésében	52
VI Súrlódásos közegek áramlása	55
13. A súrlódásos közegekre vonatkozó mozgásegyenlet	55
13.1. A sebességtér és a feszültségállapot közötti kapcsolat	57
13.1.1. Csúsztatófeszültségek	58
13.1.2. Húzófeszültségek	59
13.1.3. Feszültségek meghatározása nem kompresszálható köze- geknel	59
13.1.4. Feszültségek összenyomható közegek esetében	60
13.2. A newtoni közegekre érvényes általános mozgásegyenlet	61
14. A Navier-Stokes-egyenlet	62
15. Az örvénytranszport egyenlet	63

16.A Reynolds-egyenlet	64
16.1. A Reynolds-szám	64
16.2. A turbulens áramlások statisztikai jellemzése	67
16.3. Az időbeli átlagokra vonatkozó mozgásegyenlet, az ún. Reynolds-egyenlet	68
16.4. A látszólagos feszültségek és sebességingadozás kapcsolata	69
16.4.1. Impulzustétel alkalmazása a sebességvektor felbontásával felírt egyenletre	69
16.4.2. Látszólagos feszültségek	70
17.A mozgásegyenlet megoldásával kapcsolatos problematika	71
VII A diffúzió értelmezése, a diffúziós egyenlet	73
17.1. Alapfogalmak, lényeges kérdések és definíciók	73
17.1.1. A koncentráció definiálása	73
18.Dimenzió analízis alkalmazása az elkeveredés jellemzésének példáján	74
19.A diffúzió	75
19.1. A Fick-féle törvény	75
19.1.1. A víz levegő határregegen keresztüli diffúziós fluxus példája	78
19.2. Diffúziós tényező	79
20.A diffúziós egyenlet	80
20.1. A diffúziós egyenlet általános alakja	80
20.2. Az egy dimenziós diffúziós egyenlet	82
21.Az egy dimenziós diffúziós egyenlet hasonlósági alapon történő megoldása	82
21.1. A maximum koncentráció meghatározása	88
21.2. A hasonlósági megoldás interpretációja	88
21.3. A koncentráció eloszlás alakja és az önazonossága	91
VIII Advektív diffúziós egyenlet	92
22.Az advektív diffúziós egyenlet levezetése	92
22.1. Az alapegyenlet általános alakja	92
22.2. Pontszerű szennyezés esete, mint egy lehetséges megoldás	95
22.3. Összenyomhatatlan folyadéokra való értelmezés	96
22.4. Alkalmazással kapcsolatos szabályok	97

23. Az advektív diffúziós egyenlet megoldásai	98
23.1. Kezdeti ismert egyenletes koncentráció megoszlás esete	99
23.1.1. Az intravénás injekció, mint a diffúziós folyamatok egy példája	101
23.2. Ismert állandó koncentráció a peremen	102
23.3. Ismert fix, lezárt (no flow) perem	103
23.3.1. Egy csésze teában feloldódó cukor példája	105

IX Elkeveredési folyamatok vízfolyásokban: Turbulens diffúzió és diszperzió **109**

24. A turbulencia matematikai leírása	109
24.1. A turbulens advektív diffúziós egyenlet	112
24.2. Turbulens diffúzió egy szobában	114
25. Turbulens diffúziós tényezők értelmezése vízfolyásokban	115
25.1. Vertikális elkeveredés	116
25.1.1. Vertikális elkeveredés egy vízfolyásban	116
25.2. Keresztirányú elkeveredés	118
25.3. Hosszirányú elkeveredés	118
26. A hosszirányú diszperzió értelmezése	119
26.1. Az advektív diszperziós egyenlet levezetése	122
26.2. Hosszirányú diszperziós tényezők számítása	127
26.2.1. Analitikus megoldás	128
26.2.2. Numerikus integrálás	129
26.2.3. Mérnöki becslés	129
26.2.4. Geomorfológiai alapú becslés	130
26.2.5. Nyomjelzős vizsgáltok használata	131
26.2.6. Elkeveredés vizsgálata vízfolyásokban	131

X A Szivárgás **134**

27. A Darcy-féle kísérlet	134
28. Felszín alatti áramlási rendszerek tanulmányozása	135
29. A hidraulikus nyomás, a nyomómagasság és a potenciál értelmezése	139
30. A szivárgás alapegyenlete	142
30.1. Telített közegbeli permanens szivárgás	145
30.2. Telített közegbeli nem permanens szivárgás	146
30.2.1. A közeg α kompresszibilitása	147
30.2.2. A víz β kompresszibilitása	149

30.2.3. Tárolási tényező	149
30.2.4. A fajlagos hozam	150
30.2.5. A szivárgás alapegyenlete telített közegben nem permanens esetben	150
30.3. Nem permanens szivárgás telítetlen közegben	152
30.3.1. Közegjellemzők	152
30.3.2. A szivárgás alapegyenlete telítetlen közegben	157

rész I

Folyadékok fizikai és mechanikai sajátosságai

Bevezetés

A fejezet megismerteti azokkal az alapismeretekkel, amelyeket az anyag későbbi részében tárgyalunk. Nagyon fontos a fejezetben lévő definíciók, valamint a felhasznált és összefoglalt (főleg ismétlésként) matematikai eszközrendszer megértése és elsajátítása. A fejezet lehatárolja a tárgyalt témakört, bemutatja az áramlástan műveléséhez szükséges alapismereteket, így az áramló közegek legfontosabb sajátosságait, az áramlási jelenségek leírásának módját és összefoglalja az alkalmazandó matematikai módszereket.

Mindjárt itt a tananyag elején szükséges egy általános alapelv lefektetése. A tananyagban található függvények folytonosnak és legalább 1-szer deriválhatónak tekintettek, ezért lazábban kezelhetőek. Esetükben tehát alkalmazhatjuk az ún. „laza” jelölést a differenciálegyenletekre (pl. lehetséges a dx -el való egyszerűsítés).

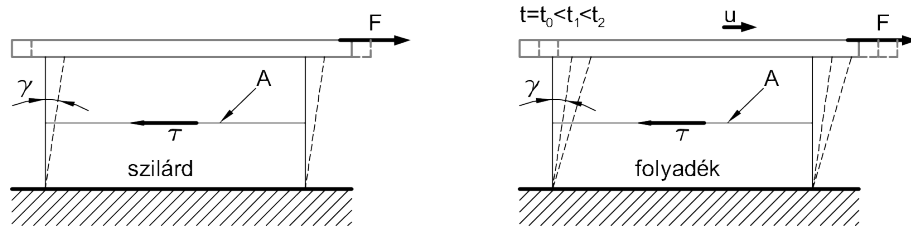
A differenciálhányados szokásos matematikai értelmezése egy differenciálható $y = y(x)$ függvény egy rögzített pontjában:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = \tan \alpha \quad (1)$$

ahol Δy a Δx növekményhez tartozó függvényérték megváltozás, α az érintő iránytangense a rögzített pontban (a pozitív x tengelytől mérve). A műszaki gyakorlatban szokásos a $\frac{dy}{dx}$ kifejezés egy másik értelmezése, a következők szerint:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

Az utóbbi felírás (1. összefüggés) a látszattal ellentétben különbözik az előző felírástól (2. összefüggés). Az utóbbi határérték által rögzített érintő iránytangense két végesen kicsi, összetartozó dy és dx érték hányadosával is kifejezhető. A végesen kicsi azt jelenti, hogy ezek az értékek a görbét érintő egyenes egy olyan kis szakaszának vetületei, ami már megfelelően közelíti az $y = y(x)$ függvényt az adott pont környezetében. A továbbiakban tehát így értelmezzük a dy és dx differenciálokat, melyeknek a hányadosa, szorzata stb. is értelmezett [Lajos, 2008]. Ezen értelmezés a fent elmondottakat megismételve általában akkor tehető meg, ha a vizsgált függvények folytonosak és minimum egyszer differenciálhatóak.



1. ábra. Deformáció szilárd test és folyadék réteg esetében [Lajos, 2008, nyomán]

Szilárd test	$\tau \sim \gamma$
Folyadék - Newtoni	τ egyenesen arányos $\frac{d\gamma}{dt}$
Folyadék - Nem newtoni	τ nem lineális függvénye $\frac{d\gamma}{dt}$

1. táblázat. A szilárd test és folyadék deformációjának függése a csúsztatófeszültségtől

1. A folyadékok és a szilárd anyagok összehasonlítása

1.1. A szilárd test és a folyadék deformációja

Csúsztatófeszültség (felülettel párhuzamos, egységnyi felületre ható erő) ($\tau = F/A$).

Szilárd anyagok: A szögdeformáció arányos a csúsztatófeszültséggel (egyes arány) ($\tau \sim \gamma$). A szilárd test γ szögbe áll az F erő hatására (szemléltető példa: szivacs, radírgumi)

Folyadék: Nem lesz konstans deformáció, hanem a szögdeformáció sebesség ($\frac{d\gamma}{dt}$) lesz arányos a τ csúsztatófeszültséggel.

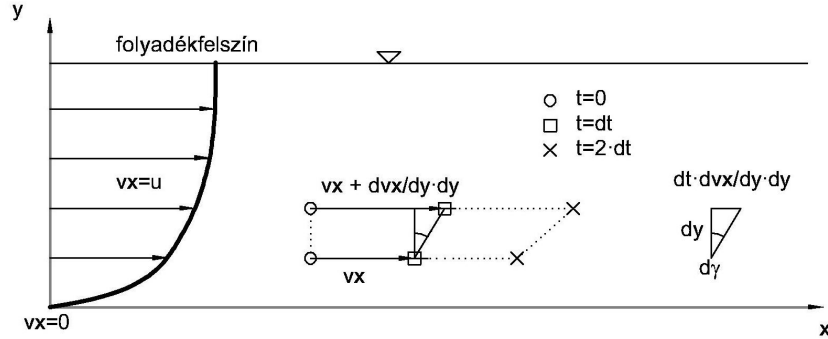
Folyadék: Newtoni folyadék (a csúsztatófeszültség egyenes arányos a deformációsebességgel) és nem Newtoni közegek (a csúsztatófeszültségtől nem lineárisan függ a deformációsebesség)

A tapadás törvénye: Szilárd fallal érintkező folyadék sebessége közvetlenül a falnál megegyezik a fal sebességével

1.2. Newton viszkozitási törvénye

Az x irányba mozgó folyadékrészek az y koordináta szerint különböző sebességgel áramlanak. Két részecske egymáshoz képesti relatív mozgását szemlélve a következő összefüggés írható fel.

$$d\gamma = \frac{dt \cdot \frac{dv_x}{dy} \cdot dy}{dy} \quad (3)$$



2. ábra. A folyadékreszek sebességmegoszlása a nyírófeszültség jelenlétében.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dt \cdot \frac{dv_x}{dy} \cdot dy}{dt \cdot dy} = \frac{dv_x}{dy} \quad (4)$$

Az egyszerűsítés a dt -vel és a dy -al azért tehető meg, mert feltételezzük, hogy a vizsgált függvények folytonosak.

A előző képlet alapján felírható Newton viszkozitási törvénye a következőképpen:

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (5)$$

amely szerint a Newtoni folyadék esetében a nyírófeszültség és a deformációsebesség között lineáris összefüggés van. A τ_{yx} indexei közül az első a vizsgált sík normálisának iránya, amelyben a csúszatófeszültség hat. A második pedig ható erő iránya.

A *Newton-felé viszkozitási törvényt* követi a víz és a levegő, mint a Földön leggyakrabban előforduló folyadékok. Az olaj, a porok és a festékek nem ilyenek, ezek tehát az ún. Nem newtoni folyadékok közé tartozik.

A szilárd testek és a folyadékok között azonban nem olyan éles a határ. Geológiai léptékű időtényező figyelembevételével már a szilárd testek esetében is tapasztalható egy mértékű bizonyos deformáció (pl. geológiai rétegek gyűrődése).

2. Folyadékok tulajdonságai

2.1. Sűrűség

A folyadékok sűrűsége a tömeg (m) per térfogat (V) inkrementális részeinek hányadosával definiálható:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (6)$$

ahol, a térfogat elegendően, de nem túl kicsi (molekulák méretétől nagyobb). A folyadékoknak azon tulajdonsága, amely közvetlen kapcsolatban van a sűrűséggel a *fajsúly*.

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g \quad (7)$$

mértékegysége $[N/m^3]$.

Sokszor használják a *specifikus (fajlagos) sűrűség* fogalmát is ahol, a víz sűrűségéhez hasonlítják az adott anyag sűrűségét [Potter et al., 2012].

Az ideális folyadékot homogénnek tekintjük és sűrűségét a modellezett valószínűségi folyadék sűrűségével vesszük azonosnak, ami legtöbbször a hely és az idő függvénye. A sűrűség egy skalár, amit a $\rho = \rho(x, y, z, t)$ skalártér (mint 4 változó függvény) jellemez [Lajos, 2008].

2.2. Viskozitási tényezők

A Newton-féle viszkozitási törvény μ arányossági tényezője, amelynek nagysága a folyadék tulajdonságaitól függ, a dinamikus viszkozitási tényező. Azt hivatott kifejezni, hogy egységnyi deformációsebesség előállításához mekkora csuszatófényteltségre van szükség. Mértékegysége a következő:

$$[\mu] = \left[\frac{\tau}{\frac{dv_x}{dy}} \right] = \frac{\frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m^2}}{\frac{\frac{m}{s}}{m}} = \frac{kg}{m \cdot s}$$

A műszaki gyakorlatban egy másik viszkozitási paramétert, mint *kinematikus viszkozitási tényezőt* ($\nu = \mu/\rho$), amely a dinamikus viszkozitási tényező és a sűrűség hányadosa is definiálnak. A kinematikus viszkozitási tényező bevezetésére azért van szükség, mert a folyadékok (pl. a víz és a levegő) dinamikus viszkozitási tényezője több nagyságrenddel eltér egymástól, míg a kinematikus már hasonló nagyságrendbe esik így egyszerűbbek az átszámítások.

A newton-féle viszkozitási törvényből levonható egyéb következtetések:

- A folyadékok nyugvó állapotban tapasztalható súrlódása zérus.
- A folyadék nyírófeszültség hatására időbe folyamatosan deformálódik (így a nyugvó folyadékban tartósan nem tartható fenn nyírófeszültség).
- A folyadékok (amelyek Newton viszkozitási törvénye szerint viselkednek) tetszőleges mértékben deformálhatók belső szerkezetük megváltozása nélkül.

2.3. Kompresszibilitás

Minden folyadék kompresszálódik, ha a nyomás növekszik és ez az összenyomódás a térfogat csökkenésben és a sűrűség növekedésben jelenik meg. A nyomásváltozás és a térfogatváltozás közötti összefüggést a *kompressziós (térfogati rugalmassági) modulussal* (vagy más néven elasztikus modulusszal) adjuk meg (állandó hőmérsékleten):

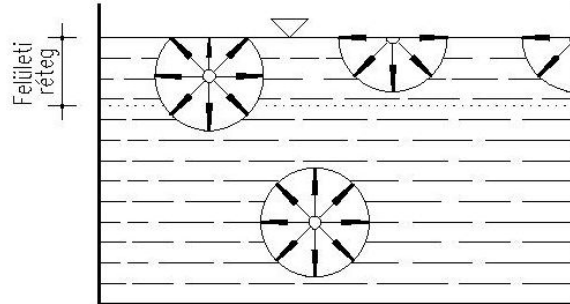
$$B = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[-\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \right]_T = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho} \Big|_T = V \cdot \frac{\Delta p}{\Delta V} \Big|_T = \rho \cdot \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \Big|_T \quad (8)$$

A térfogati rugalmassági modulus mértékegysége a nyomáséval azonos. A negatív előjel azért kellett, mert a nyomásváltozás és a térfogatváltozás mindig ellenkező előjelű [Haszpra, 2002]. Példaként a víz térfogati rugalmassági modulusa 2150 MPa (15 Celsius fokon) vagy másképpen a víz 1%-os térfogatváltozásához $21,5 \text{ MPa}$ nyomásváltozás szükséges. Az előbbieket miatt a víz, és a cseppfolyós halmazállapotú folyadékok általában, a gyakorlat szempontjából összenyomhatatlannak tekinthetők. A levegő esetében a térfogati rugalmassági modulus 1 atm (10^5 Pa) vagyis a gázokra általában a gáz nyomása. A gázok esetében ha a vizsgált folyamatban a gáz térfogatváltozása 3%-alatti a gáz összenyomhatatlan folyadékként kezelhető (ez az összenyomhatatlanság a levegőnél 100 m/s sebesség alatt általában elfogadható) [Potter et al., 2012].

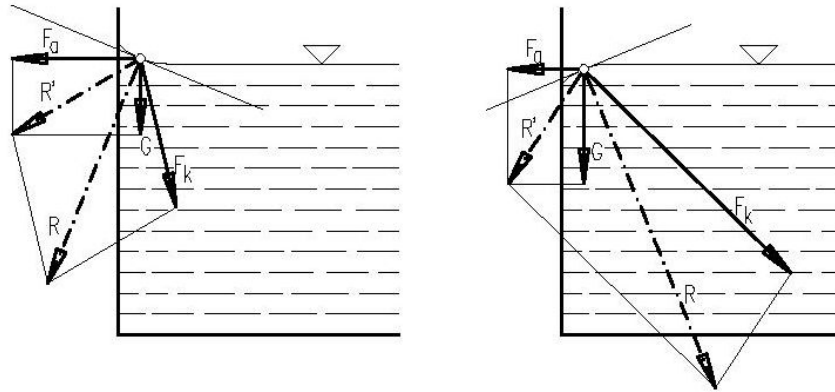
2.4. Felületi feszültség

A molekulák közötti vonzóerő következménye. Általában a folyadékban jön létre annak a határán (folyadék-gáz határfelületen legtöbbször) [Potter et al., 2012]. A folyadéktér belsejében elhelyezkedő vízmolekulák és a szomszédos molekulák között un. molekuláris vonzás hat (3. ábra). Ennek hatásgömbje nagyon kis sugarú. A minden oldalról azonosan ható kohéziós erők kiegyenlítik egymást. A felületen elhelyezkedő molekulákra viszont ez az erőhatás féloldalas, amelynek eredője a folyadék belseje felé mutat. Emiatt a folyadék felszíne rugalmas hártlyaként viselkedik, amely a lehető legkisebbre igyekszik összehúzódní.

A folyadékfelszín alakjában is manifesztálódik jelenség és a folyadék molekulái közötti kohéziós erő és a folyadék és a szilárd felszín közötti adhéziós erő viszonyának eredőjeként jön létre. A folyadékok felszíne a tapasztalat szerint általában nem merőlegesen érintkezik a tartóedény falával, hanem valamilyen szöveget zár be. E jelenség azzal magyarázható, hogy a tartóedény falánál a folyadékmolekulákra a kohéziós- és a súlyerőn kívül a folyadék és a szilárd fal közötti adhéziós (tapadási) erő is hat. A folyadék felszíne e három erő eredőjére lesz merőleges [Szalay, 1963]. Ha az adhéziós erő nagyobb, mint a kohéziós erő vízszintes összetevője, akkor az eredő a szilárd fal felé mutat, a folyadék felszíne homorú lesz. Amikor az adhéziós erő kisebb, mint a kohéziós erő vízszintes komponense, akkor az eredő a folyadéktér felé mutat, a folyadék széle domború. Az előbbi az un. *nedvesítő*, az utóbbi pedig *nem nedvesítő* folyadék. A klasszikus példa szerint: az üveggel érintkező víz nedvesítő, a higany pedig nem nedvesítő



3. ábra. A vízmolekulákra ható molekuláris erők. [Kucsara et al., 2014]



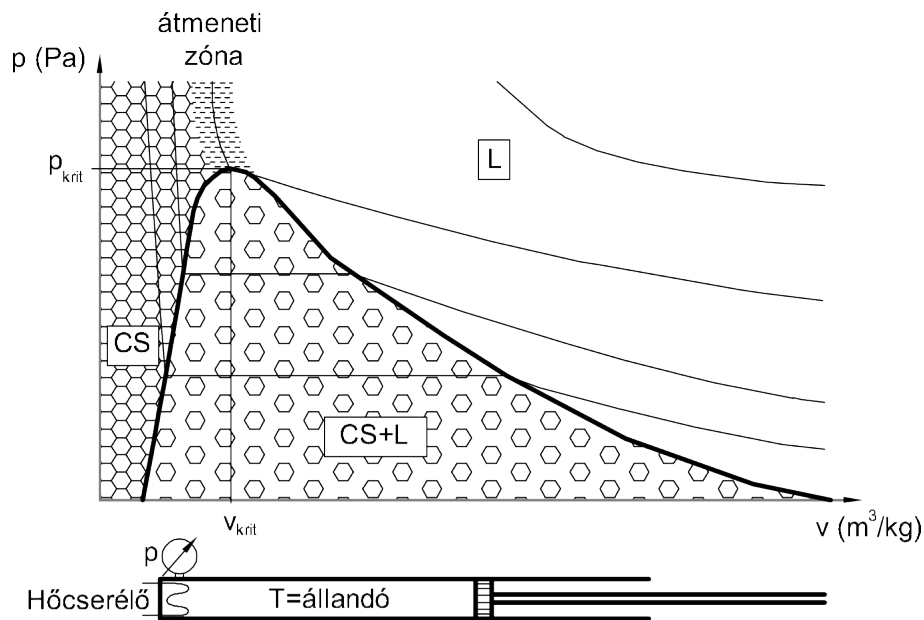
4. ábra. Nedvesítő és nem nedvesítő folyadék szélének erőegyensúlya. [Kucsara et al., 2014]

módon viselkedik. A folyadék felületének a szilárd tartóedény felületével bezárt érintkezési szöge illeszkedési szögnek nevezhető.

2.5. Halmazállapotok

Az állapotváltozásokat mutató ábrán egy dugattyúval lezárt hengerben gőz van. A henger térfogatának és a hengerben lévő gőz tömegének hányadosaként meghatározható az ún. fajtérfogat ($v[m^3/kg]$), ennek reciproka pedig a sűrűség ($\rho = 1/v[kg/m^3]$).

Különböző állandó hőmérsékleti értéke mellett (izotermák) az adott közeget összenyomva, a fajtérfogat és a nyomás összefüggését vizsgálva háromféle halmazállapottal rendelkező területet különíthetünk el (a közeg légnemű [jobbra], a légnemű és a cseppfolyós [középen], valamint cseppfolyós [balra] halmazállá-



5. ábra. Gázok, gőzök, cseppfolyós közegek [Lajos, 2008, nyomán]

potának megfelelően). A halmazállapotokat határoló görbék választják el (az izotermák itt törnek), amelyek egy ún. *kritikus pontban* találkoznak. Ebben a kritikus pontban egyszerre van jelen a cseppfolyós és a légnemű halmazállapotú közeg.

Létezik egy olyan, az adott közegtől függő *kritikus hőmérséklet*, amelynél magasabb hőmérsékleten nem lehet a légnemű halmazállapotú közeg cseppfolyósá tenni.

A középső zónában a gőz telített, és ez a telített gőz a térfogat változásra halmazállapot és nem nyomásváltozással reagál. A jobb oldali határoló görbétől még jobbra, a görbétől távolabb *gáz*-ról beszélünk (a hőmérséklet itt jóval nagyobb mint a kritikus), a görbe közelében pedig *túlhevített gőzről* [Lajos, 2008].

2.6. A gáztörvény

A gázokra jó közelítéssel a gáztörvény érvényes (ideális gázokra).

$$p \cdot v = R \cdot T \quad (9)$$

ahol: $R = R_u/M$ az adott közeg gázállandója, amely az R_u univerzális gázállandó és az M móltömeg hányadosaként számítható.

Az 5. ábra középső részén, a $CS + L$ jelölésű területen az izotermák vízszintesek, tehát egy adott hőmérséklethez (T) egy adott telített gőznyomás (p_g) tartozik. Ha ezeket az összetartozó nyomás és hőmérséklet értékeket egy grafikonra felhordjuk, akkor az ún. *tenziógörbét* kapjuk. A görbe alapján megál-

lapítható, hogy kisebb hőmérsékleten is kialakulhat gőzfázis, vagyis a folyadék gőzzé alakulhat, forrásba jöhet, ha az adott közeg nyomása lecsökken (pl. alacsony nyomáson a víz 100 Celsius foknál kisebb hőmérsékleten is forrásba jön a magasabb térszíneken). A forrást gőzbuborékok képződése kíséri, amelyek nagyobb nyomás hatására összeroppanhatnak, azt a jelenséget nevezzük *kavitációnak*. A kavitáció roncsoló hatással bír, amely pl. szivattyúk tönkremenetelét, hajócsavarok megrongálódását okozhatja[Lajos, 2008].

2.7. A termodinamikai első törvénye

Az összenyomhatatlan folyadékok esetében a *termodinamika első törvénye* különös fontossággal bír. A törvény szerint, amikor egy fix folyadékmennyiséggel bíró rendszer egy 1-essel jelölt állapotból egy 2-essel jelölt állapotba kerül, akkor a környezetével való energiacsere miatt az energiatartalma is E_1 -ről E_2 -re változik. Ez az energia transzfer általában hőcsere vagy munka formájában jelenik meg. Ha a rendszerhez érkező hőt (Q_{1-2}) és a rendszer által végzett munkát (W_{1-2}) tekintjük pozitívnak, akkor a termodinamika első főtétele a következőképpen írható:

$$Q_{1-2} - W_{1-2} = E_2 - E_1 \quad (10)$$

Az E energia itt az összes energiát jelképezi, ami lehet mozgási ($m \cdot \frac{V^2}{2}$), potenciális ($m \cdot g \cdot z$) és belső ($m \cdot \tilde{u}$), ahol az \tilde{u} az egységnyi tömegre vonatkozó belső energia.

Egy izolált rendszerben, amely környezetével termodinamikailag nincs kapcsolatban, $E_1 = E_2$. Az előbbi egyenlet tulajdonképpen az energiamegmaradás tétele.

Az 10. egyenlet munka tagja egy a rendszer határain működő F erő, amely l távolságon hat. Ha az erő nyomásból származik a következő összefüggés adódik a munkára[Potter et al., 2012]:

$$W_{1-2} = \int F \cdot dl = \int p \cdot A \cdot dl = \int p \cdot dV \quad (11)$$

2.8. Entalpia

Összenyomható folyadékok esetében néha hasznos olyan termodinamikai mennyiségek definiálása, ami más mennyiségek kombinációjából áll elő. Egy ilyen tulajdonság, amit *entalpia*-nak nevezünk[Potter et al., 2012]:

$$H = m \cdot \tilde{u} + p \cdot V \quad (12)$$

$$h = \tilde{u} + \frac{p}{\rho} \quad (13)$$

2.9. Fajhő, egyéb termikus sajátságok

Egy másik hasznos termodinamikai mennyiség a rendszerek termikus sajátságainak jellemzésére (entalpia vagy belső energia változás számítására) a *fajhő*, amelynek létezik konstans nyomásra (c_p) és konstans térfogatra (c_v) vonatkozó változata:

$$\Delta h = \int c_p \cdot dT \quad (14)$$

$$\Delta \tilde{u} = \int c_v \cdot dT \quad (15)$$

A víz fajlagos hőkapacitása (fajhője), – az a hőmennyiség, amely tömegegységének hőmérsékletét 1 Kelvin fokkal emeli –, viszonylag nagy. Normál légköri nyomáson és 20°C-on 4187 J/kgK.

Az anyag halmazállapot-változása hőfelvétellel, illetve hőleadással jár együtt. A fluidumok közül az egyik leggyakoribbat a vizet példaként kiemelve, olvadásnál a jégből víz keletkezik, az anyagi szerkezet megváltozik, amelyhez 333,85 kJ/kg energiamennyiség szükséges, s amelyet *olvadáshőnek* nevezünk. A víz megfagyásakor ugyanennyi energia, ún. *fagyáshő* szabadul fel. A cseppfolyós víz molekulái közötti összetartó erők feloldásához, a vízgőzzé alakuláshoz még nagyobb energia szükséges. A víz *párolgáshője* 2449,76 kJ/kg [Stelczer, 2000]. Ennek oka a molekulaszervezetel magyarázható, amelyből a molekulák kilépéséhez a hidrogénkötések miatt nagyobb energia szükséges. A légkörből történő kicsapódáskor ugyanekkora *kondenzációshő* keletkezik. A halmazállapotot váltó anyag energiaszintjének növekedésével járó folyamatokat *endotermnek*, a csökkenéssel járókat *exotermnek* nevezzük.

2.10. Légnemű és cseppfolyós halmazállapotú közegek összehasonlítása

A légnemű és cseppfolyós halmazállapotú közegek közötti legfontosabb különbségek összefoglalása az 3. táblázatban található meg.

2.11. A valóságos és ideális folyadék összehasonlítása

A valóságos folyadékok egyszerűsített modellezésére bevezették az ideális folyadék fogalmát. Az ideális folyadék és a valóságos folyadék alapvető jellemzőinek összehasonlítása a 5. táblázatban látható.

2.12. Nyomás

Nyugvó folyadékban a nyomás értéke megegyezik az egységnyi felületre (A) ható erő (F) abszolút értékével:

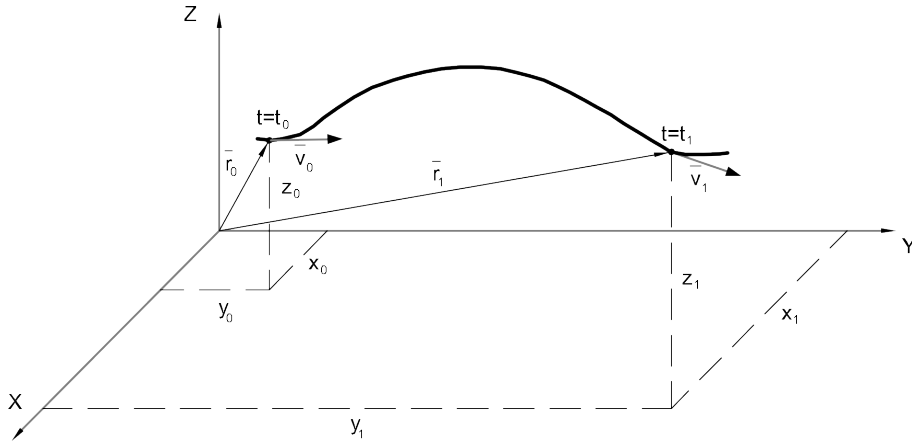
$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad (16)$$

Közeg	Légnemű	Cseppfolyós
Erőhatás (F) és távolság (l) az alkotórészek (molekulák [átmérőjük d_m]) között	F kicsi, mivel $l \cong 10 \cdot d_m$	F nagy, mivel $l \cong d_m$
A viszkozitás forrása	az alkotórészek ütközése okozta impulzuscsere	az alkotórészek közötti vonzóerő
A viszkozitás hőmérsékletfüggése	pozitív (hőmérséklet emelkedés - viszkozitás növekedés)	negatív (hőmérséklet emelkedés - viszkozitás csökkenés)
A viszkozitás nyomásfüggése	nem jellemző	nem jellemző
Nyomásnövekedés hatása a térfogatváltozásra	nagy, a térfogatváltozás a sűrűségváltozással arányos (adott T -n)	kicsi (pl. víz 1000 bár nyomásnövekedés 5%-térfo-gatcsökkenés)

3. táblázat. Légnemű és cseppfolyós halmazállapot összevetése

Valóságos folyadék	Ideális folyadék
molekuláris szerkezetű	homogén (kontinuum)
összenyomható ($\rho \neq konstans$)	összenyomhatatlan ($\rho = konstans$)
súrlódásos ($\mu \neq 0$)	súrlódásmentes ($\mu = 0$)

5. táblázat. Valóságos és ideális folyadék összevetése



6. ábra. A Lagrange-féle szubsztanciális módszer szemléltetése [Haszpra, 1989, nyomán]

mértékegysége $[N/m^2]$ vagy $[Pa]$. A nyomás akkor vehető pozitívnak, ha az erő a felületbe befelé mutat. A nyomás iránnyal nem jellemezhető skaláris mennyiség, tehát a $p = p(x, y, z, t)$ skalártér (mint 4 változós függvény) jellemzi.

2.13. Áramlási sebesség

A folyadékoknál az egyes folyadékreszek helyét a kezdeti időpillanathoz tartozó helyzetüket (r_0) alapul véve az idő függvényében adhatjuk meg.

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{r}_0, t) = \bar{r}(x_0, y_0, z_0, t) \quad (17)$$

Az adott folyadék rész sebességét és gyorsulását a helyvektor (\bar{r}) idő szerinti első és második differenciálja adja meg rögzített \bar{r}_0 mellett:

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}, \dots a = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} \quad (18)$$

Az előbbi felírást *Lagrange-féle* felírási módnak nevezzük, de mivel ez a folyadékok esetében nehézkesnek mutatkozott, ezért kevésbé használt.

Az elterjedtebb, ún. *Euler-féle* felírási mód a folyadék rész sebességét a hely és az idő függvényében adja meg:

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}, t) \quad (19)$$

Az előbbieket szerint a sebességtér, tehát egy *vektor-vektor* függvénnyel ún. *vektortérrel* adható meg, ahol mind a függő, mind a független változó vektor. Mivel az áramlások jelentős részénél az időfüggést sokszor elhanyagolhatjuk (*stacioner* áramlások) az Euler-féle felírási mód esetében a független változók száma háromra csökkenthető (a t eltűnése miatt) [Lajos, 2008].

rész II

Folytonosság tétele

Bevezetés

A fejezetben megismerkedünk a vektor és skalárterek műveleteivel, beszélünk az áramlások időfüggéséről és az áramlás jellemző vonalairól. Az előbbi ismeretek birtokában levezetjük a folytonossági egyenletet általánosságban. A levezetett összefüggést áramcsőre alkalmazva megvizsgáljuk azokat az egyszerűsítési lehetőségeket, amelyekkel egyszerűbb, gyakorlati feladatok megoldására is alkalmas egyszerűbb alakjaikat megkaphatjuk.

3. Skalár és vektorterek műveletei

3.1. Gradiens

A skalár-vektor függvény *skalártér*-et ad, vagyis a tér egy adott pontjához (amelyet \bar{r} helyvektorral jellemezhetünk) egy skalárt rendel. Skalártereket (pl. sűrűség, nyomás mint skalár) szintfelületekkel, szintvonalakkal jellemezzük. A gradiens a skalártér deriváltja, amely vektorteret ad, amely csak \bar{r} -től függ, $d\bar{r}$ irányától nem [Haszpra, 1989]. Tulajdonságai:

- Skalártérből vektorteret csinál,
- A skalármennyiség növekedésének irányába mutat (A legrohamosabb változás irányával párhuzamos),
- Ott a legnagyobb, ahol a változás és annak rohamossága a legnagyobb,
- Merőleges a szintfelületekre, szintvonalakra,
- A maximum felé tart (gradiens által kijelölt vonalon haladva a maximumhoz jutunk).

Jellemezze a $\rho(x, y, z)$ skalártér (mint sűrűség) a vizsgált térfogatot, akkor ennek *gradiens*-e a következő:

$$\text{grad}(\rho) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (20)$$

3.2. Divergencia

A sebességvektor a hely és az idő függvénye, így egy ún. vektor-vektor függvényvel (vektortétellel írható le), amely a tér egy pontjához (egy adott időpillanatban egy vektort rendel). A vektortér definiálható a vektorkomponensekkel (sebességnél v_x, v_y, v_z), vagyis három skalártérrel: $v_x = v_x(x, y, z, t)$, $v_y = v_y(x, y, z, t)$, $v_z = v_z(x, y, z, t)$.

A vektor-vektor függvény deriváltja tenzormennyiség (*deriválttenzor*-nak, \bar{D} is hívjuk), $d\bar{r}$ irányától független:

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} = \bar{D} \dots d\bar{v} = \bar{D} \cdot d\bar{r} \quad (21)$$

a $d\bar{v}$ differenciál azonban ennek ismerte nélkül vektoriálisan is kifejezhető:

$$d\bar{v} = dv_x \cdot \bar{i} + dv_y \cdot \bar{j} + dv_z \cdot \bar{k} \quad (22)$$

ahol, mivel $v_x(\bar{r})$, $v_y(\bar{r})$ és $v_z(\bar{r})$ skalár-vektor függvények, írható:

$$dv_x = \text{grad}(v_x) \cdot d\bar{r} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot dz$$

,

$$dv_y = \text{grad}(v_y) \cdot d\bar{r} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot dz$$

,

$$dv_z = \text{grad}(v_z) \cdot d\bar{r} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot dz \quad (23)$$

A fenti egyenlet a következőképpen is írható:

$$d\bar{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \bar{D} \cdot d\bar{r} \quad (24)$$

A \bar{D} *deriválttenzor* elemeiből két nevezetes mennyiség képezhető, a divergencia és a rotáció [Haszpra, 1989].

A deriválttenzor első skalár invariánsa a *divergencia*:

$$\text{div}(\bar{v}) = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (25)$$

A divergencia többletkiáramlást jelöl. Divergenciája csak vektornak van.

3.3. Rotáció

A deriválttenzor (második) invariánsa a *rotáció*. A rotáció a forgással van kapcsolatban. Ha a vektorteret elkezdem forgatni a viszonyítási alak általában más lesz, a $\text{rot}(\bar{v})$ viszont nem változik a koordináta-rendszer forgatásával.

$$\text{rot}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \quad (26)$$

4. Az áramlás jellemző vonalai, áramlások időfüggése

4.1. Permanens, nem permanens áramlások

A folyadékmozgások két nagy csoportra oszthatók: a permanens (stacioner vagy időtől független) és a nem permanens (instacioner vagy időtől függő) áramlásokra.

Permanens áramlásban a sebesség, a nyomás, a sűrűség és a hőmérséklet (mint legjellemzőbb paraméterek) az időtől független, csak a helytől függ, tehát a jelenség az időben nem változik ($\bar{v} = \bar{v}(\bar{r})$, $p = p(\bar{r})$, $\rho = \rho(\bar{r})$, $T = T(\bar{r})$). A permanens áramlás különleges esete a homogén áramlás, ahol a sűrűség még a helytől sem függ.

Nem permanens áramlásban a sebesség, vagy a nyomás vagy a sűrűség, vagy a hőmérséklet vagy esetleg minden paraméter (ill. ezek kombinációi) függ az időtől (bár a helytől nem szükségszerűen), tehát az időben változó jelenséggel van dolgunk [Haszpra, 1989].

A nem permanens áramlás bizonyos esetekben a koordináta rendszer megválasztásával stacionáriussá tehető (pl. tapon mozgó csónak a partról ill. a csónakból szemlélve). A transzformációt általában az abszolút rendszerből, a relatív (együtt mozgó) rendszerbe történő áttéréssel tesszük meg [Lajos, 2008].

4.2. Pálya, áramvonal, nyomvonal és folyékony vonal

A *pálya* vagy *áramlási vonal* egy meghatározott pontszerű folyadék rész által befutott vonal vagy másként az egymást követő pillanatokban a folyadék rész elfoglalt helyeit összekötő görbe. Érintőjének irányát valamely pontjában a vizsgált folyadék rész áthaladásának pillanatában érvényesülő sebességvektor adja (7. ábra *l* görbe).

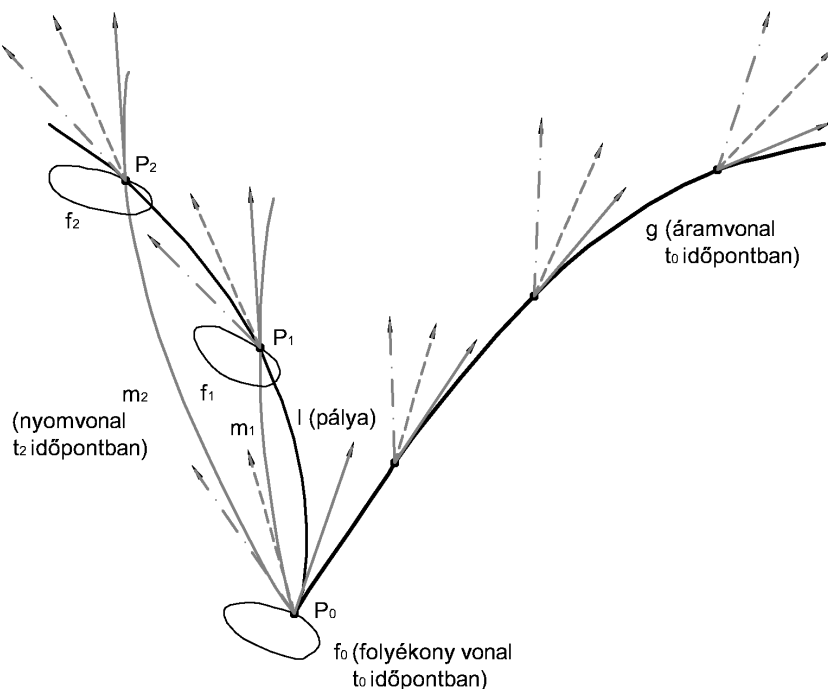
Az *áramvonal* az áramlás pillanatnyi sebességeloszlására érintőlegesen illeszkedő vonal, tehát olyan görbe, amelyet minden pontjában érint a sebességvektor: $\bar{v} \times d\bar{s} = 0$, ahol $d\bar{s}$ az áramvonal elemi hosszúságú szakaszát jellemző vektor (7. ábra *g* görbe). Az áramvonal úgy is felfogható, mint egy adott pillanatban a sebességvektorok burkológörbéje.

A *nyomvonal* a tér egy meghatározott pontján egymás után áthaladó folyadék részek összessége által egy adott időpillanatban kirajzolt görbe (pl. a vízfolysba egy ponton beeresztett festékcső, vagy egy kéményből kilépő füstszásló, ha pontszerűnek vehető a kémény kiömlőnyílása (7. ábra *m* görbék).

Az időtől független (permanens, stacioner) áramlás esetén a pálya, az áramvonal és a nyomvonal egybeesnek.

A *folyékony vonal* kiválasztott folyadék részecske sor által alkotott vonal, amely helyzetét és alakját a folyadék rész mozgása szerint változtatja (7. ábra *f* görbék) [Haszpra, 2002].

Egy kijelölt vonalra illeszkedő áramvonalak alkotják az *áramfelület*-et, amelyeket a sebességvektorok érintenek, ezért az áramfelületen nincs átáramlás.



7. ábra. Az áramlás jellemző vonalai [Haszpra, 1989, nyomán]

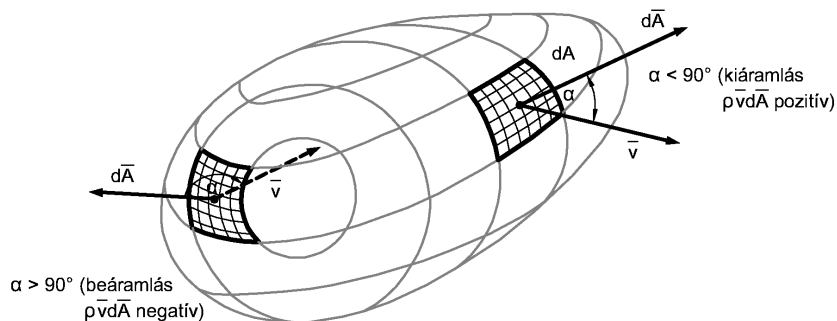
Minden olyan az áramlásba helyezett felület (pl. szilárd testek felülete) áramfelületnek tekinthető, amelyen nincs átáramlás. Amennyiben az áramvonalak egy zárt görbére illeszkednek, akkor egy speciális, cső alakú áramfelületet hoznak létre, amelyet *áramcső*-nek nevezünk [Lajos, 2008].

5. Folytonossági tétel

5.1. Folytonossági tétele általános megfogalmazása

A folytonossági tétel (az áramlás folytonossága) az anyagmegmaradás (pontosabban a tömegmegmaradás) törvényét fejezi ki. Más megfogalmazásban folyadék nem tűnik el és nem keletkezik. Mivel az a helyet, ahol a folyadék keletkezik, *forrásnak* hívjuk, azt pedig ahol eltűnik, *nyelőnek* (vagy negatív forrásnak), tehát akkor folytonos az áramlás ha a térben nincs forrás és nincs nyelő.

A forrást az általa produkált tömeghözammal lehet jellemezni, amely pontszerű forrás estében a következő *forrásintenzitás*-t adja: G_f (kg/s). Amennyi-



8. ábra. Az anyagmegmaradás szempontjából vizsgált zárt felület [Haszpra, 1989, nyomán]

ben a tér minden pontjában keletkezik folyadék forráseloszlásról beszélünk, ezt a fajlagos forráshozammal, más néven a *forrássűrűség*-gel lehet jellemezni. A forrássűrűség tehát a hely és az idő függvényében adja meg a keletkező folyadék-tömeget (időegységre és térfogategységre vonatkoztatva) a vizsgált pont elemi környezetében: g_f ($kg/(m^3 \cdot s)$). A forráseloszlás lehet vonalmenti vagy felületi is, ilyen esetben a forrássűrűség az egység hosszra vagy egységfelületre vonatkoztatott hozam.

Mivel az áramlás akkor folytonos, ha a forráshozam zérus a következőkben ezt az esetet vizsgáljuk részletesebben. Vegyünk egy tetszőleges V térfogatot (amelyben sem forrás, sem nyelő nincsen), amelyet körbevevő zárt felület (A) elemi, kis darabkáján keresztül áramló tömeg (q_m) a következőképpen számítható:

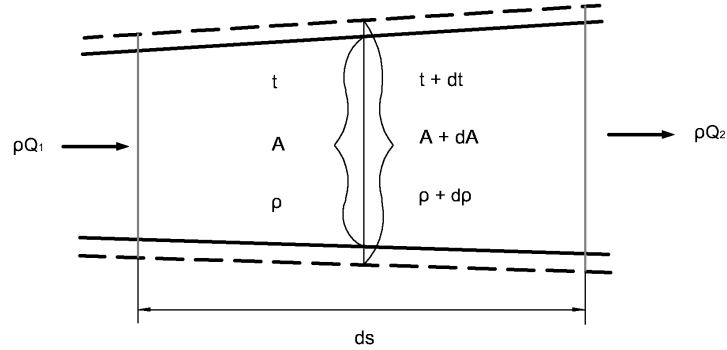
$$q_m = \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (27)$$

ahol: ρ a vizsgált folyadék sűrűsége, \vec{v} az áramló folyadék sebessége, $d\vec{A}$ a felületelem vektor, amelynek iránya a felület normálisának irányával egyezik meg. Ha a \vec{v} és $d\vec{A}$ vektorok iránya 90° -nál kisebb szöget zár be, akkor a skalárszorzat tulajdonságai szerint a fenti 27. egyenlet pozitív értéket ad, ha a bezárt szög 90° -nál nagyobb, az érték negatív.

Ha a 27. egyenlet q_m tömegáramát a A felületen integráljuk a többletkiáramlást kapjuk:

$$\int_A \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (28)$$

A többletkiáramlás, mivel nincs az adott térfogatban forrás vagy nyelő, a térrészben lévő folyadék rész sűrűségváltozásából adódhat (pl. egy izzó melegíti a térrész belsejében lévő folyadékot, ami sűrűségcsökkenést okoz):



9. ábra. A folytonosság feltétele egy áramcsőszakaszban [Haszpra, 1989, nyomán]

$$\int_A \rho \cdot \bar{v} \cdot d\bar{A} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (29)$$

Az 29. egyenlet a folytonossági egyenlet integrál alakja, amelyre a Gauss-Osztrogradszkijalkalmazva a felületi integrál térfogatívá alakítható.

$$\int_V \text{div}(\rho \cdot \bar{v}) dv = \int_A \rho \cdot \bar{v} \cdot d\bar{A} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (30)$$

A 30. egyenlet térfogara vonatkozó integráljai már összeadhatóak, ezért egy oldalra rendezhetőek.

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \bar{v}) \right) dv = 0 \quad (31)$$

Az 31. integrál csak akkor lehet zérus, tetszőleges V integrálási tartomány mellett, ha maga az integrandusz is zérus, ezért adódik:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \bar{v}) = 0 \quad (32)$$

A 32. egyenlet a kontinuitási egyenlet tétel differenciálegyenlet alakja.

5.2. A folytonosság tétele áramcsőben

A folytonosság feltételét egy ds hosszúságú A keresztmetszetű áramcsőszakaszra írjuk fel, amelynek keresztmetszete az időben változhat (9. ábra).

Tegyük fel, hogy a ds szakaszon q_m ($kg/(m \cdot s)$) hosszmenti forráseloszlás van (vagyis ennyi víz áramlik az adott szakaszon az áramcsőhöz, ami a vízfolyás két

szomszédos áramvonal közötti cső). Ennek a forráseloszlásnak a ds szakaszon termelt hozama (kg/s): $q_m \cdot ds$ részben tározódik, vagyis a ds szakaszban foglalt tömeg megváltozását eredményezi dt idő alatt (itt ds rögzítettnek tekinthető):

$$\frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} \cdot ds \quad (33)$$

részben az áramcsőben érkező többletet adja:

$$\frac{\partial(\rho \cdot Q)}{\partial s} \cdot ds \quad (34)$$

A két részt összevonva a hozamra adódik:

$$q_m \cdot ds = \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} \cdot ds + \frac{\partial(\rho \cdot Q)}{\partial s} \cdot ds \quad (35)$$

A ds taggal leegyszerűsítve kapjuk a vonalmenti forássűrűséget:

$$q_m = \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot Q)}{\partial s} \quad (36)$$

Amennyiben az áramcső például folyó vagy csatorna medre, a vonalmenti forrás,

- ha pozitív jelenthet esőt, felszíni hozzáfolyást vagy talajvíz beszivárgást;
- ha negatív, akkor talajvízbe való kiszivárgást (pl. folyómenti kútsor miatt), felszíni elfolyást vagy párolgást.

Ha ilyen többlet, külső betáplálás nincs, az áramcsőbeli áramlás folytonosságának feltétele:

$$\frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot Q)}{\partial s} = 0 \quad (37)$$

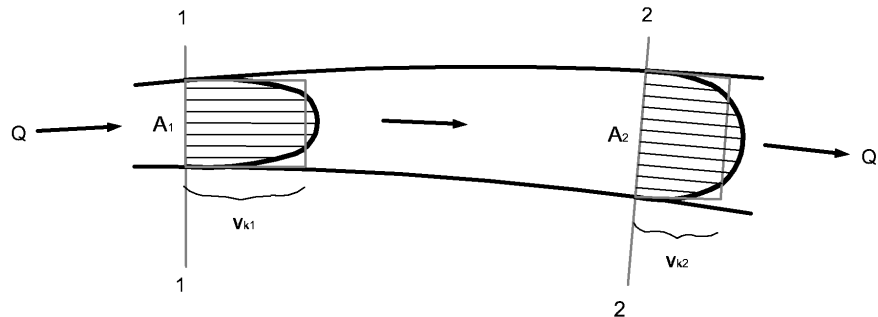
A fenti képlet tovább egyszerűsíthető ha a folyadék a vizsgált körülmények között összenyomhatatlannak vehető:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (38)$$

Ezzel az összefüggéssel számítható a szabadfelszíni vízfolyásokon levonuló természetes vagy mesterséges ár hullámok szintjének változása, ha a vizsgált vízfolyásszakaszon már jelentősebb betáplálás nem jelentkezik.

Ha az áramlás permanens, vagy az áramcső fala merev a következő összefüggés adódik: $\frac{\partial(\rho \cdot Q)}{\partial s} = 0$, ha még ezenfelül a folyadék összenyomhatatlansága is fennáll az egyenlet tovább egyszerűsödik:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (39)$$



10. ábra. A folytonosság szemléltetése merev falú áramcsőben [Haszpra, 2002, nyomán]

5.3. Folytonossági tétel permanens áramlásra

Az áramlás folytonossága (kontinuitása) permanens (időben állandó) viszonyok között és merev falú áramcsőben, a folyadék összenyomhatatlanságát feltételezve tehát azt jelenti, hogy az egyes szelvényekben azonos vízhozam folyik keresztül, tehát a folyadék sem nem keletkezik, sem nem tűnik el. Az előbbi 39. összefüggés egyszerű formában csővezetékben történő áramlás számításánál használatos a következőképpen:

$$Q = konstans = A_1 v_{k1} = A_2 v_{k2} = \dots = A_n v_{kn} \quad (40)$$

ahol $v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kn}$ az adott A_1, A_2, \dots, A_n szelvények közepsebessége. Az összefüggést a 10. ábra illusztrálja.

rész III

Az Euler egyenlet és a Bernoulli egyenlet

Bevezetés

A fejezetben összefüggést keresünk a folyadék gyorsulása és a gyorsulást létrehozó erők között, így levezetve az áramlástan egyik legismertebb alapegyenletét az Euler-egyenletet. Az Euler-egyenlet integrálásával létrehozott Bernoulli-egyenlettel foglalkozunk a fejezet második részben. Ez utóbbi összefüggés különösen jól használható számos gyakorlatban előforduló műszaki feladat megoldásához.

6. Az Euler egyenlet

6.1. A folyadékrész lokális és konvektív gyorsulása

A folyadékrészek gyorsulásának vizsgálata előkészíti a közegrészek mozgását leíró egyenlet, az Euler-egyenlet tárgyalását.

Vegyünk egy sebességteret ($\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$) a három sebességkomponenst leíró skalártérrel:

$$v_x = v_x(x, y, z, t) \dots v_y = v_y(x, y, z, t) \dots v_z = v_z(x, y, z, t) \quad (41)$$

Egy folyadékrész skalártérrel leírható jellemzőjének (pl. a sebesség v_x , v_y vagy v_z komponense) egységnyi időre vonatkozó megváltozását a lokális (az adott helyen értelmezett és az idő múlása a megváltozás oka [sebesség, mint jellemző esetén ez a *lokális gyorsulás*]) és konvektív (az áramlás miatt bekövetkező megváltozás, egy másik pontba jutva megváltozik a jellemző [sebesség, mint jellemző esetén ez a *konvektív gyorsulás*]) megváltozás összegeként a következőképpen írhatjuk fel x irányban.

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}v_x \quad (42)$$

Az előbbi (42) összefüggés a folyadékrész x irányú sebességkomponensének az egységnyi idő alatt bekövetkező megváltozását, azaz x irányú gyorsulását fejezi ki (a jobb oldali első tag a lokális a második a konvektív gyorsulás). A v_y és v_z sebességkomponensekre hasonló összefüggés írható fel. A második tag két vektorának skaláris szorzatát kifejtve és a három térbeli dimenziót figyelembe véve a következő adódik.

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \\
\frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} \\
\frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{43}$$

Az előbbi (43) egyenletrendszer alapján (felismerve az azonosságokat) a folyadék-rész gyorsulására a következő vektoregyenlet hozható létre:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{D} \cdot \bar{v} \tag{44}$$

A folyadék-rész gyorsulása tehát két részből tevődik össze, a *lokális* $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ és a *konvektív* $\bar{D} \cdot \bar{v}$ gyorsulásból.

A lokális gyorsulás abban az esetben jelentkezik, ha a sebességtér az időtől is függ, azaz az áramlás nem permanens (instacionárius).

A konvektív gyorsulás viszont nincs kapcsolatban az áramlás időfüggésével, értéke mind permanens, mind nem permanens áramlás esetében lehet zérustól különböző. Másként megfogalmazva, konvektív gyorsulás akkor létezik, ha folyadék-térben a sebesség nagysága és/vagy iránya az áramlás irányában változik.

A konvektív gyorsulásra vonatkozó tagot fejazzük ki úgy, hogy a \bar{D} derivált-tenzort felbontjuk (kivonjuk és hozzáadjuk a transzponáltját):

$$a_{konv} = \bar{D} \cdot \bar{v} = \bar{D}^T \cdot \bar{v} + (\bar{D} - \bar{D}^T) \cdot \bar{v} \tag{45}$$

Vizsgáljuk meg először az előbbi (45) kifejezés jobb oldalának első tagját [Lajos, 2008].

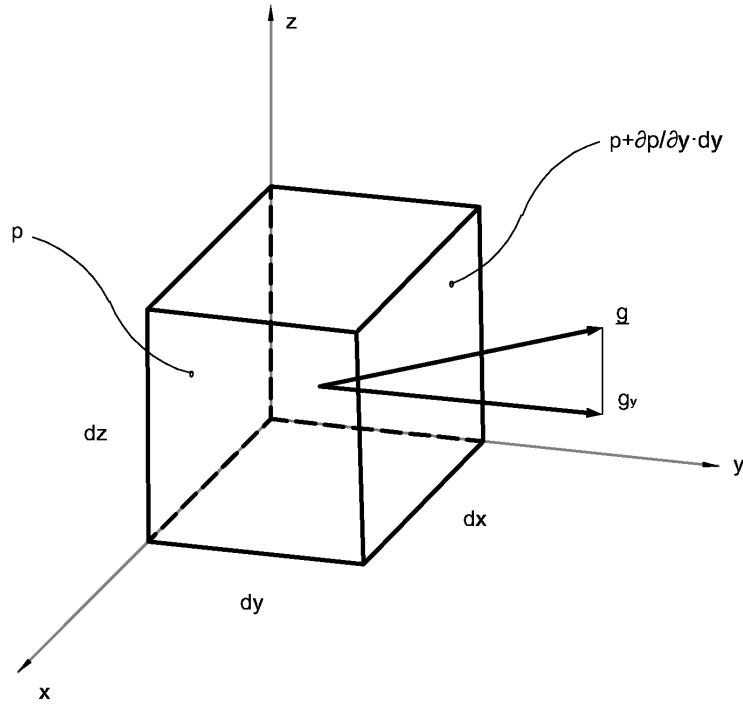
$$\bar{D}^T \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot v_y + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot v_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot v_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_x + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot v_z \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\bar{D}^T \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial(v_x)^2}{\partial x} + \frac{\partial(v_y)^2}{\partial x} + \frac{\partial(v_z)^2}{\partial x} \\ \frac{\partial(v_x)^2}{\partial y} + \frac{\partial(v_y)^2}{\partial y} + \frac{\partial(v_z)^2}{\partial y} \\ \frac{\partial(v_x)^2}{\partial z} + \frac{\partial(v_y)^2}{\partial z} + \frac{\partial(v_z)^2}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot grad(v)^2 \tag{47}$$

Mivel a $(D - \bar{D}^T) \cdot d\bar{r}$ kifejezés értéke $rot(\bar{v}) \times d\bar{r}$ -el egyenlő, ezért a $(D - \bar{D}^T) \cdot d\bar{v} = rot(\bar{v}) \times \bar{v} = -\bar{v} \times rot(\bar{v})$ ként is felírható. A két sebességvektor egymás melletti voltát elkerülendő lett megváltoztatva a vektorok sorrendje, de ezzel az előjel is megváltozott.

A levezetett tagok alapján a következőt kapjuk a folyadék-rész gyorsulására (vektoriális alakban kifejezve):

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + grad \frac{v^2}{2} - \bar{v} \times rot(\bar{v}) \tag{48}$$



11. ábra. Elemi folyadék rész ábrázolása a sűrűdásmentes közegben rá ható feszültségekkel. [Lajos, 2008, nyomán]

6.2. Az Euler egyenlet levezetése

Alkalmazzuk Newton II. törvényét sűrűdásmentes közegre.

A 11. ábrán az áramlási térben lévő elemi folyadék rész látható dx , dy és dz élhosszakkal. Vegyük az elemi folyadék részre ható y tengellyel párhuzamos erőket és Newton II. törvénye értelmében tegyük ezeket egyenlővé az elemi tömeg y irányú mozgásmennyiségének idő szerinti megváltozásával ($d/dt(m \cdot \bar{v})$).

Az elemi folyadék részre kétféle erő hathat:

- az egyik a folyadék rész felületén jelentkező feszültségekből származik (a felületen jelentkező feszültségek lehetnek a felületre merőleges erőt okozó húzófeszültségek [sűrűdásmentes közegben ez egyenlő a nyomás ellentétével, $\sigma_y = -p$], illetve a felülettel párhuzamos csúsztatófeszültségek [sűrűdásmentes közegben ez nem jelentkezik]),
- a másik az erőtérben lévő folyadék rész tömegére ható térerősség révén keletkezik (az elemi tömeg és a térerősség vektor szorzataként határozzuk

meg), lehet térerő (pl. nehézségi erő) [Haszpra, 2002].

Elsőként határozzuk meg a *nyomásból származó erőt*, y tengellyel párhuzamos. Ez a dx és dz hosszúságú éllel határolt elemi oldalfelületeken ($y = 0$ és $y + dy$) keletkező erők különbségként írható fel.

$$dF_{p,y} = p \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz = -\frac{\partial p}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (49)$$

A *térerősségből származó erő*, y irányú komponense a következőképpen fejezhető ki a tömeg és a térerősség vektor y irányú komponensével (g_y):

$$dF_{g,y} = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot g_y \quad (50)$$

Az előbbi két erő eredője lesz egyenlő tehát az elemi folyadékrész y irányú mozgásmennyiségének idő szerinti megváltozásával (vagyis a tömeg és a gyorsulás szorzatával):

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dv_y}{dt} = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot g_y - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (51)$$

Ha mindkét oldalt elosztjuk ez elemi folyadékrész tömegével ($\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$), akkor az egységnyi tömegre vonatkozó összefüggést kapjuk:

$$\frac{dv_y}{dt} = g_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad (52)$$

Az előbbi egyenlet az y komponensre vonatkozik, de hasonló összefüggést kapunk az x és a z tengely irányában is. A három tengely irányában vett komponensegyenletet az egységvektorokkal (\bar{i} , \bar{j} és \bar{k}) végigszorozva, és az egyenleteket összeadva az *Euler-egyenlet* vektoriális alakját kapjuk.

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) \quad (53)$$

Az egyenlet bal oldalán a lokális és konvektív tagokat kifejtve a következő adódik (Euler-egyenlet Lamb-Gromeko-féle alakja [Haszpra, 1989]):

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \bar{v} \times \text{rot}(\bar{v}) = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) \quad (54)$$

Korábbi ismereteink figyelembevételével felírható az Euler-egyenlet x , y és z irányú komponensegyenlet formájában is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z &= g_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot v_z &= g_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot v_z &= g_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (55)$$

A műszaki gyakorlatban, az áramlások matematikai meghatározására céljából, az Euler-egyenlet három komponensegyenlete és a folytonosság tétele mellett), hogy az áramlási tér v_x , v_y , v_z és p ismeretleneit kiszámítsuk (ha a határ és

kezdeti feltételek is adottak) [Haszpra, 1989]. A súrlódásmentesség feltételezése mellett, akkor tudjuk a valóságot jól közelíteni, ha az áramlás nyugvó térből származik és a falak közelében gyorsul (így a fal mellett lévő határréteg vékony marad és nem válik le) [Lajos, 2008].

7. A Bernoulli-egyenlet

7.1. A Bernoulli-egyenlet általános alakja és egyszerűsítése

Az Euler-egyenletet az áramlási tér két pontját összekötő vonal mentén (hely szerint) integrálva a *Bernoulli-egyenlet*-et kapjuk, amelynek általános alakja a következő:

$$\int_1^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \cdot d\bar{s} + \int_1^2 \text{grad} \frac{v^2}{2} \cdot d\bar{s} - \int_1^2 \bar{v} \times \text{rot}(\bar{v}) \cdot d\bar{s} = \int_1^2 \bar{g} \cdot d\bar{s} - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) \cdot d\bar{s} \quad (56)$$

Az egyenlet segítségével lehetővé válik, hogy az áramlási tér két pontjában lévő áramlási paraméterek között kapcsolatot teremtsünk.

A 56. egyenlet meglehetősen bonyolult, a gyakorlatban való alkalmazhatósága miatt célszerű egyszerűbb alakra hozni. Nézzük a továbbiakban, hogy a római számokkal jelölt egyes tagja, hogyan egyszerűsíthetőek.

- Az egyenlet I. jelű tagja zérus, ha a $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$, vagyis ha az áramlás időálló (stacionárius).
- A II. jelű integrál a $\int_1^2 \text{grad} \frac{v^2}{2} \cdot d\bar{s} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$ alakra hozható.
- A III. jelű tag számítása általában problémás ezért törekszünk a zérussá tételére (különösen ha az egyenletet olyan áramlásokban akarjuk alkalmazni, amelynek pontos sebességeloszlását nem ismerjük). Igazából a vegyes szorzat zérus volta a Bernoulli-egyenlet alkalmazhatóságának is feltétele. A feltételek fontossági sorrendben a következők:
 - $v \parallel d\bar{s}$, azaz áramvonalon integrálunk,
 - $\text{rot}(\bar{v}) = 0$, azaz az áramlás potenciális (örvénymentes),
 - $\text{rot}(\bar{v}) \parallel d\bar{s}$, azaz örvényvonalon integrálunk,
 - $d\bar{s}$ a \bar{v} és a $\text{rot}(\bar{v})$ vektor által kifeszített síkba esik (másképp ha a vizsgált két pont elemi vagy véges áram és örvényvonalszakaszok egymásutánjával köthető össze)

Két triviális eset:

- $\bar{v} = 0$, vagyis álló folyadéktérben,

– $d\bar{s} = 0$, vagyis a két pont egybeesik,

Egy nem realizálható eset:

– $\bar{v} \parallel \text{rot}(\bar{v})$ ez a $\bar{v} \times \text{rot}(\bar{v}) \cdot d\bar{s}$ vegyszorzatot ugyan zérussá tenné, de analitikus formában megadható áramlásokra ez nem lehetséges, mivel azokban \bar{v} szükségképpen merőleges $\text{rot}(\bar{v})$ -re [Haszpra, 1989].

– A IV. jelű tag a II. integrálhoz hasonlóan átalakítható, ha a \bar{g} erőter potenciális. Ebben az esetben a $\bar{g} = -\text{grad}(U)$ helyettesítéssel és az integrálás elvégzésével $-(U_2 - U_1)$ adódik. U a Föld nehézségi erőterének potenciálja, ami felfelé mutató z koordináta esetében $U = \bar{g} \cdot z$ összefüggéssel fejezhető ki.

– Az V. tagban állandó sűrűség ($\rho = \text{konst}$) esetben a $-\frac{\text{grad}(p)}{\rho}$ -t kell integrálni, aminek eredménye a $-\frac{p_2 - p_1}{\rho}$ [Lajos, 2008].

7.1.1. A Bernoulli-egyenlet felírva a potenciálokra

Amennyiben a Bernoulli-egyenletet kívánjuk használni célszerű feltenni a következő kérdéseket: Időálló (stacionárius) -e az áramlás? Ha nem létezik -e olyan koordináta-rendszer (pl. a vizsgált folyadékkréssel együtt mozgó), amelyet használva időállóvá tehetők? Potenciális -e az áramlás, ha nem lehetséges -e áramvonal mentén integrálni? Az erőter potenciális -e? Állandó -e a sűrűség? Szerencsére a legtöbb műszaki probléma esetében: Az áramlás stacionárius (vagy rövid időre azzal közelíthető, ill. azzá tehető). Lehetséges az áramvonal mentén integrálni. A Föld nehézségi erőtere, ami potenciális, az erőter. A sűrűség pedig állandó (vagy közel állandóként kezelhető) [Lajos, 2008]. Az előbbi feltételek fennállása esetén a Bernoulli-egyenlet a következő egyszerűsített alakban írható fel a potenciálokra.

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2 \quad (57)$$

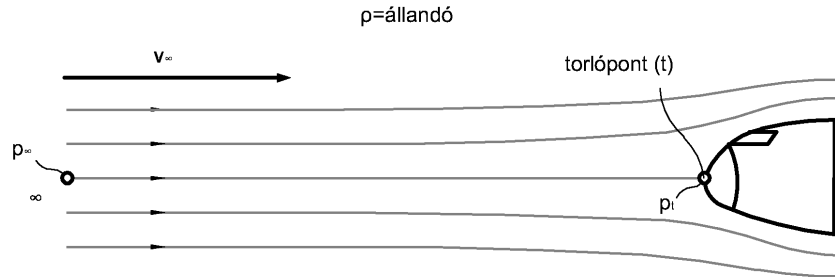
A 57. egyenlet szerint a Bernoulli-összeg egy áramvonal mentén állandó.

7.1.2. A Bernoulli-egyenlet felírva a nyomásokra, a statikus, a dinamikus és az össznyomás értelmezése

A 57. összefüggés a nyomásra is felírható:

$$\frac{\rho}{2}v_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = \frac{\rho}{2}v_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 \quad (58)$$

Ha a vizsgált 1-es és 2-es pontok azonos potenciállal rendelkeznek (azonos nívósíkon vannak $z_1 = z_2$) és torlópontra áramlásról van szó (a 2-es pont a torlópontra, ahol a sebesség zérus [$v_2 = 0$]), akkor az egyenlet a következő formát ölti:



12. ábra. A statikus, a dinamikus és az össznyomás értelmezése [Lajos, 2008, nyomán]

$$\frac{\rho}{2}v_1^2 + p_1 = p_2 \quad (59)$$

ahol, $v_1 = v_\infty$ az áramló közeg sebessége a torlópont előtt (jelentős távolságban) a zavartalan áramlásban (ezt a sebességet tartalmazó tag képviseli az ún. dinamikus nyomást $(\frac{\rho}{2}v_\infty^2)$, amely a torlópontban zérusra csökken); a $p_1 = p_\infty$ az ún. statikus nyomás az áramló közegben mérhető a torlópont előtt a zavartalan áramlásban; $p_2 = p_{össz}$ az össznyomás, amely a torlópontban mérhető és amely a dinamikus és a statikus nyomás összege (12. ábra).

7.1.3. A Bernoulli-egyenlet hossz-dimenzióban felírva

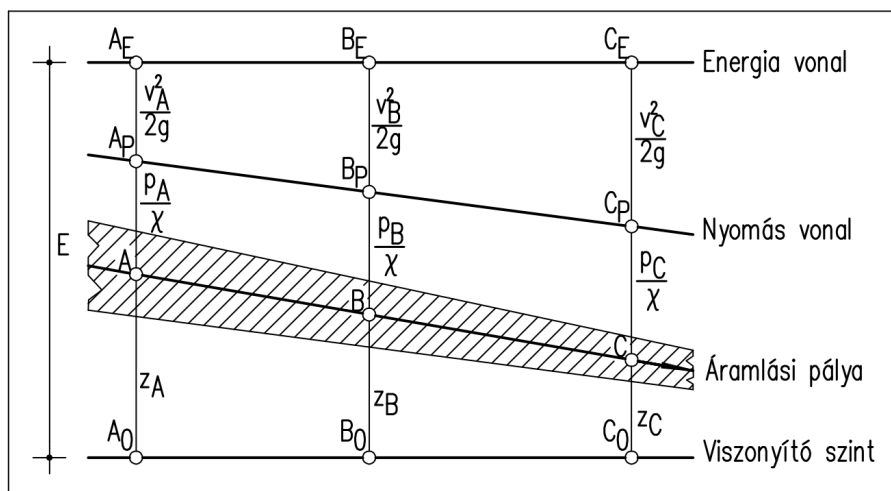
Harmadik változatként a vízépítési hidraulikában alkalmazott formája a Bernoulli-egyenletnek, amely hossz dimenzióban felírva értelmezhető.

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 \quad (60)$$

A 60. összefüggés grafikusan is megjeleníthető (mivel hosszegységekben fejezi ki az egyes tagokat) egy áramcsőre felírva (13. ábra). Az 1-es és 2-es pontokat a 13. ábrán az A és B betűk jelölik.

A Bernoulli-egyenlet, tehát az ideális folyadék permanens áramlására vonatkozóan az áramlás dinamikai egyensúlyát határozza meg energetikai alapon. Az előbbi felírás szerinti Bernoulli-egyenlet tagjai hossz dimenzióval bírnak, de valójában az egységnyi súlyú víztestre vonatkoztatott fajlagos energiatartalmat jelképezik ($N \cdot m/N$). A hossz dimenzió miatt az egyes tagok, mint jellegzetes magasságok értelmezhetőek a következőképpen [Haszpra, 2002]:

- z a vizsgált pont geodéziai magassága, amely a helyzeti energiát jelképezi,
- p/γ , a vizsgált pontban uralkodó nyomásnak megfelelő nyomásmagasság vagy másképpen nyomási energiamagasság (ahol $\gamma = \rho \cdot g$),



13. ábra. A Bernoulli-egyenlet értelmezése hossz-dimenzióban [Öllös, 1965, Kucsara et al., 2014, nyomán]

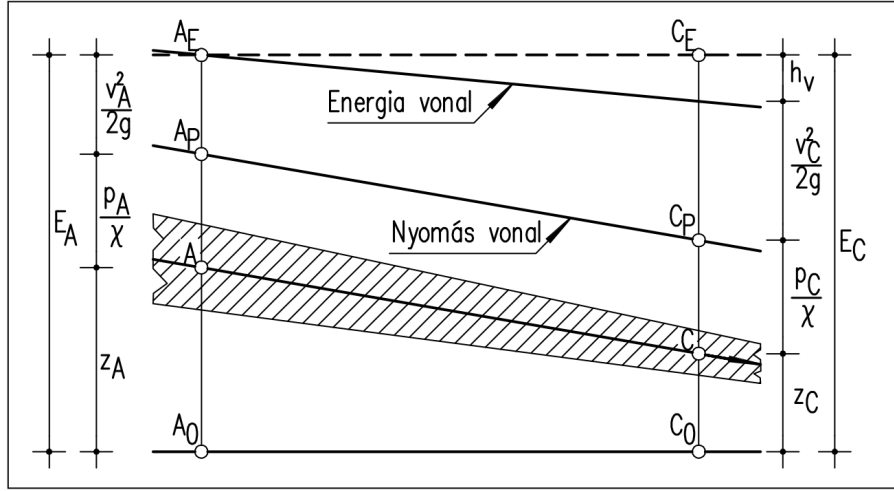
- a $v^2/(2 \cdot g)$ az egységnyi víztestre vonatkoztatott mozgási (kinetikai) energia, az ún. sebességmagasság. A mozgási energia alapján megállapíthatjuk, hogy egy vezetékben v sebességgel áramló víz $h = v^2/(2 \cdot g)$ magasságig jut el (a veszteségek elhanyagolásával). Ezt használjuk fel az ún. Pitot-Darcy féle csőnél a sebességek mérésére.

A $h = z + p/\gamma$ összeget (amennyiben a p a légköri nyomást nem tartalmazza) piezometrikus nyomásmagasságnak is nevezik. Amennyiben ugyanis a nyomásmérés 0 síkja az alapsík, a vizsgált ponttól az áramlást nem zavaró módon kivetett csőben a víz a piezométertábla $h = z + p/\gamma$ szintjéig emelkedik [Haszpra, 2002].

Összefoglalva az előzőeket a Bernoulli-tétele szerint az ideális folyadék permanens, örvénymentes mozgása közben a geodéziai, nyomási és sebességmagasságok összege a folyadéktér minden pontjára nézve állandó, tehát a három magasság összegeként előálló energiaszint (energiavonal) konstans magasságú.

7.2. A Bernoulli-egyenlet alkalmazása a valóságos áramlásokra

A valóságos folyadékokban, pl. a vízben, a részecskék egymás közötti súrlódása energiát emészt fel, másképpen a vízrészecskék mechanikai energiájának egy része hővé alakul. Az áramló mentén az áramlás irányában a vizsgált vízrészecske fajlagos energiatartalma csökkenhet is, nőhet is annak megfelelően hogy a vele szomszédos részecskék elvesznek az energiájából vagy hozzáadnak ahhoz. Az áramlás egészét tekintve viszont a fajlagos energia csak csökkenhet [Haszpra, 2002]. Ha a folyadékáram útját az áramvonalon követve két egymás



14. ábra. A veszteséges Bernoulli-egyenlet értelmezése [Öllös, 1965, Kucsara et al., 2014, nyomán]

utáni pontra (1. és 2. pont) felírjuk az energiatartalmat, fel kell tételeznünk, hogy $E_1 > E_2$, azaz „1” úton $E_1 - E_2$ energia felemészthető. Ha a Bernoulli-egyenletet továbbra is fel kívánjuk írni, a kisebb oldalt a veszteséggel meg kell növelnünk. Így a következőt kapjuk:

$$E_1 = E_2 + h_v \quad (61)$$

Ahol, h_v az egységnyi súlyú folyadék energiavesztesége „1” úton, amit *veszteségmagasság*-nak nevezünk. Ez a veszteségtényező túlnyomó részben csak kísérlettel állapítható meg, és a kísérleti eredmények táblázat vagy grafikon formájában férhetők hozzá az irodalomban.

A Bernoulli-egyenlet általános alakja, amely a most már a valóságos folyadék permanens áramlására vonatkozik a következő (14. ábra):

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 + h_v \quad (62)$$

Az 1-es és 2-es pontokat az 14. ábrán az A és C betűk jelölik.

Az energiavonal a h_v veszteség következtében már nem vízszintes, hanem az áramlás irányában lejt. Ennek a süllyedésnek az áramlás egységnyi hosszára jutó értékét nevezzük az energiavonal relatív esésének (I_e).

$$I_e = -\frac{dE}{dl} = -\frac{d\left(\frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\rho \cdot g} + z\right)}{dl} = -\frac{h_v}{dl} \quad (63)$$

Mivel a dE/dl mindig negatív, praktikusági okokból a $-dE/dl$ értékét nevezzük relatív esésnek, így az mindig pozitív szám lesz. Vízfolyások esetében ha

az áramlás szabad felszínű és egyenletes akkor az I_e az energiavonal hajlásának (ami ebben az esetben a vízfelszín és fenékvonal hajlása is) a szinuszát adja. Az áramlás azonban legtöbbször nem egyenletes, így az energiavonal esése általában nem azonos a vízfelszín relatív esésével. A kettő megegyezik, ha a sebesség és a légnyomás az áramlás mentén nem változik, de különbözik, ha a sebesség vagy a légnyomás változik [Haszpra, 2002]. Konstans légnyomás esetén a vízfelszín lejtése, zárt vezeték esetén a képzelt vízfelszín, a nyomásvonal esése (I_p) az ún. piezometrikus esés:

$$I_p = -\frac{d\left(\frac{p}{\rho \cdot g} + z\right)}{dl} \quad (64)$$

Mivel $d\left(\frac{p}{\rho \cdot g} + z\right)/dl$ a dE/dl -hez hasonlóan általában negatív, ez elé is negatív előjelet kell tennünk. Negatív I_p vízfelszín-emelkedést jelent, ez a valóságban a vízfolyásokban előfordulhat, bár rendszerint csak rövid szakaszon jelentkezik (pl. ha az áramlási szelvény bővülése következtében a sebességmagasság gyorsabban csökken, mint ahogy a súrlódási veszteség nő) [Haszpra, 2002]. Ha az $I_p = I_e$ az áramvonal vízrészecskéinek sebessége nem változik [Pankotai and Rác, 1975].

Az energiaveszteség minden esetben a folyadék részecskének egymással és a határoló felülettel való ütközése és súrlódása következtében jön létre. A két folyamat közül általában az ütközés az alapvető, és amennyiben az ütközések száma nő, nagyságuk pedig csökken, akkor jutunk el a súrlódás fogalmához. Gyakorlati szempontból a súrlódás okozta veszteségeket két csoportba soroljuk:

- Súrlódási veszteségről beszélünk, ha a veszteség viszonylag egyenes, és változatlan szelvényű hosszabb szakaszon következik be. Ez a víz áramlásánál általában a meder vagy a cső hosszával arányos.
- Helyi veszteségről beszélünk, ha a veszteség a szelvény vagy a vonalvezetés (irány) viszonylag rövid szakaszon történő, vagy hirtelen (ugrásszerű) változása miatt következik be. Ide sorolható az áramlásba helyezett testek által kifejtett ellenállás is [Haszpra, 2002].

rész IV

Örvénytételek

Bevezetés

A fejezetben először megismerkedünk a cirkuláció időbeni állandóságára vonatkozó Thomson-tétellel. Ezt követően definiáljuk az örvényvonal, örvényfelület és örvénycső fogalmát. A Thomson-tételt felhasználva további két nevezetes tétellel ismerkedünk meg: az örvények állandóságával foglalkozó Helmholtz I. és az örvénycsőekben megjelenő örvényesség kontinuitására vonatkozó Helmholtz II. összefüggéssel (kitérve annak gyakorlati következményeire).

8. Thomson tétel

A Thomson tétel ideális folyadék esetében értelmezett, amelynek tulajdonságai közül elsődleges a sűrűdásmentesség.

Definiáljuk egy zárt görbére (legyen ez egy folyékony vonal) vonatkozóan a cirkulációt (Γ) a következőképpen:

$$\Gamma = \oint_G \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (65)$$

ahol: \vec{v} , a sebesség a görbe $d\vec{s}$ elemi hosszúságú szakaszához kapcsolódóan.

A *Stokes-tétel* értelmében az a cirkuláció a következőképpen jeleníthető meg egy, a zárt görbe által körüljárt, felületre (A) vonatkozóan.

$$\oint_G \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (66)$$

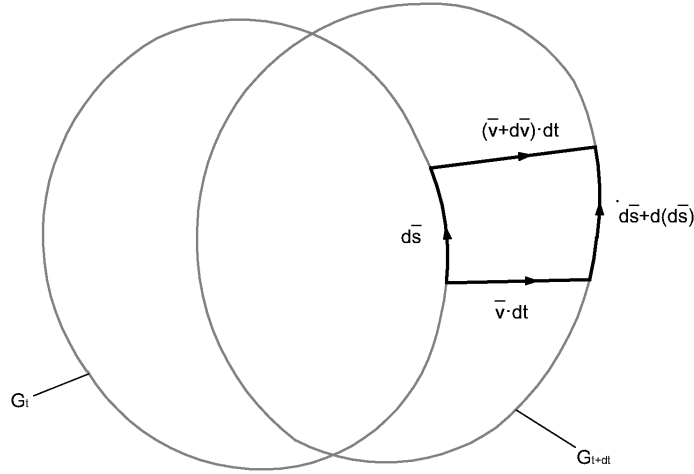
A *Thomson-tétel* értelmében, ideális folyadék esetében, a cirkuláció megváltozása az időben zérus, tehát a cirkuláció időben állandó.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_G \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (67)$$

A valóságban természetesen ez nem így van, mivel a folyadék nem ideális, tehát van sűrűdés ami szép lassan fölemésztí az örvényeket.

A továbbiakban vizsgáljuk meg a Thomson-tétel bizonyítását, amelyhez vegyünk föl az áramlási térben egy G jelű, zárt folyékony vonalat. A vizsgálat tárgya, hogyan változik a zárt, folyékony vonal körüli cirkuláció értéke egységnyi, kicsiny idő alatt (15. ábra).

A sebesség zárt görbe menti integráljának idő szerinti megváltozását a görbe egyes $d\vec{s}$ elemeire vett $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ szorzatok idő szerinti megváltozásának összegeként határozhatjuk meg, figyelembe véve a $d\vec{s}$ vonalelem vektorok megváltozását is.



15. ábra. Folyékony, önmagába záródó, vonal elúszása [Lajos, 2008, nyomán]

Fontos megjegyezni, hogy az előbbieken felhasználtuk a matematika azon szabályát, miszerint az integrálás és a differenciálás sorrendje felcserélhető.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_G \bar{v} \cdot d\bar{s} = \oint_G \frac{d}{dt} (\bar{v} \cdot d\bar{s}) \quad (68)$$

Az integráljelet elhagyva vizsgáljuk meg a $\bar{v} \cdot d\bar{s}$ szorzat idő szerinti (kis időegységre eső) megváltozását (a szorzat deriválási szabályát felhasználva, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$):

$$\frac{d}{dt} (\bar{v} \cdot d\bar{s}) = \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{s} + \bar{v} \cdot \frac{d}{dt} (d\bar{s}) \quad (69)$$

Az 69. összefüggés szerint a $\bar{v} \cdot d\bar{s}$ szorzat időegység alatti megváltozása a sebességtér és a folyékony vonalelem megváltozásából adódik össze [Lajos, 2008].

A 69. egyenlet jobb oldal első tagjának $d\bar{v}/dt$ kifejezése az Euler-egyenlet szerint a következőképpen írható:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) \quad (70)$$

ahol a potenciális erőteret figyelembe véve írható: $g = -\text{grad}(U)$, ahol az U az erőter potenciálja.

Az 69. egyenlet jobb oldal második tagjának $\frac{d}{dt} \cdot (d\bar{s})$ kifejezésére pedig, a lehetséges (bár matematikailag nem egészen korrekt, de mérnöki szempontból megtehető) egyszerűsítéseket figyelembe véve:

$$\frac{d}{dt} \cdot (d\bar{s}) = \frac{d}{dt} \cdot ((\bar{v} + d\bar{v}) \cdot dt - \bar{v} \cdot dt) \approx d\bar{v} = \bar{\bar{D}} \cdot d\bar{s} \quad (71)$$

A 71. egyenlet figyelembevételével a $\bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \cdot (d\bar{s}) = \bar{v} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot d\bar{s}$ kifejezés adódik, amely a következő formában alakítható át.

$$\bar{v} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot d\bar{s} = \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot d\bar{s} \quad (72)$$

A 69., 70. és a 71. egyenletek alapján a $d(\bar{v} \cdot d\bar{s})/dt$ integrálja a következőképpen írható fel.

$$\oint_G \frac{d}{dt} (\bar{v} \cdot d\bar{s}) = \oint_G \left(-\text{grad}(U) - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right) d\bar{s} \quad (73)$$

Mivel a gradiens zárt görbe menti körintegrálja zérussal egyenlő, hiszen az integrálási tartomány alsó és felső határa azonos (pl. $\oint \text{grad}(U) = 0$), az előbbi kifejezés értéke nulla, vagyis a cirkuláció az időben nem változik (tehát a tételt bizonyítottuk).

A Thomson-tétel alapján tehát megállapítható, hogy sűrűdásmentes közegben (potenciális erőter mellett) örvényesség nem keletkezhet, ill. nem tűnhet el (másképpen a folyadékreszek nem jöhetnek forgásba, ill. forgásuk nem szűnhet meg) [Lajos, 2008].

9. Helmholtz első és második örvénytétele

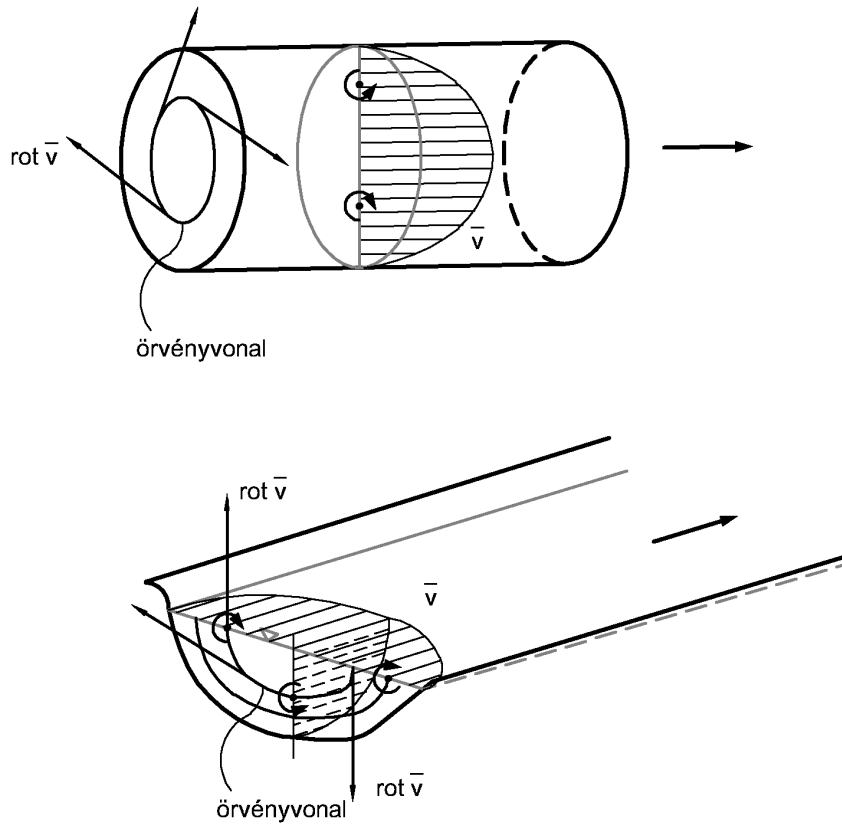
9.1. Örvényvonal, örvényfelület, örvénycső

A Thomson-tételt felhasználva további két örvénytétel fogalmazható meg, amelyek alapján sok természeti jelenséget magyarázhatunk (pl. vadludak V alakban repülése, füstkarika viselkedése, tornádó kialakulása, stb.) [Lajos, 2008].

A tételek tárgyalása előtt definiáljunk néhány fogalmat:

Az *örvényvonal* az a vonal, amelyet a $\text{rot}\bar{v}$ vektor minden pontjában érint, azaz ha $d\bar{s}$ szakasz az örvényvonal eleme akkor $\text{rot}\bar{v} \times d\bar{s} = 0$ (az előbbieik szerint az örvényvonal az áramvonallal analóg fogalom, csak ott a \bar{v} sebesség vektorról mint érintőről van szó).

Az *örvényfelület*, olyan felület amely egy vezérgörbére illeszkedő örvényvonalakból áll, és amelyet a $\text{rot}\bar{v}$ vektorok érintenek (az a fogalom is analóg az áramfelülettel). Hasonlóan az áramcsőhöz, létezik az *örvéncső*, amely egy zárt vezérgörbére illeszkedő örvényvonalak összessége alkot. Ha az örvénycső infinitezimális keresztmetszetű, szokásos az *örvényyszál* elnevezést használni. Itt érdemes megemlíteni azt is, hogy mivel a $\text{rot}\bar{v} = \nabla \times \bar{v}$, ezért a rotációvektor ($\text{rot}\bar{v}$) a sebességvektorra (\bar{v}) mindig merőleges. Példaként egy hengeres csőben



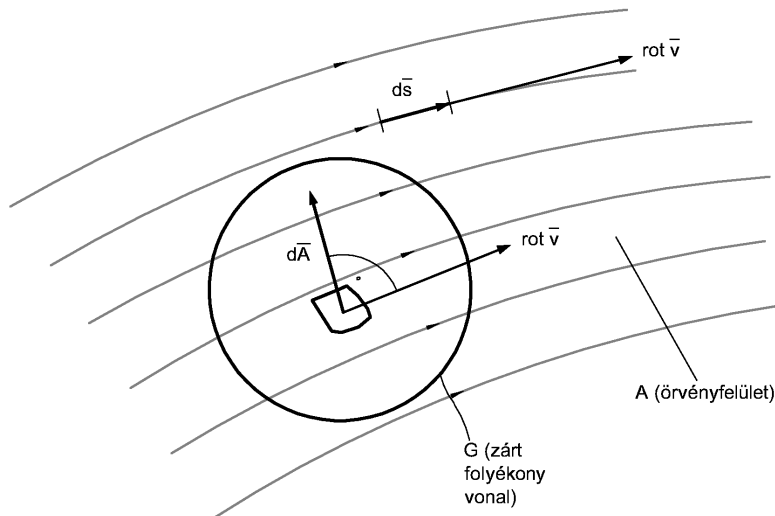
16. ábra. Örvénycső és örvényvonal értelmezése egy csőbeni és egy nyílt felszíni (pl. vízfolyás mederben kialakuló) áramlásnál [Haszpra, 1989, nyomán]

(ld. 16. ábra), ahol a sebességeloszlás hengersizmetrikus, az örvényvonalak a csőtengelyre merőleges koncentrikus körök [Haszpra, 1989].

9.2. Helmholtz I. örvénytétele

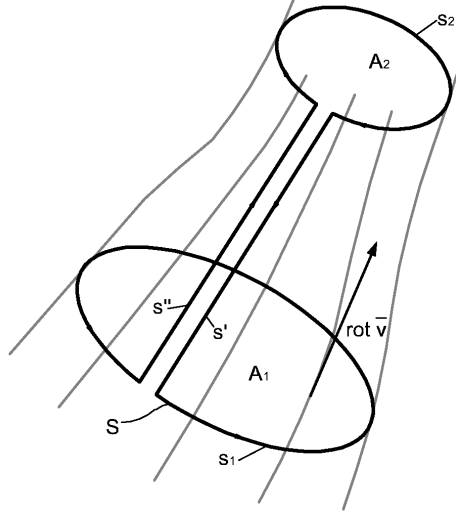
Az áramló folyadéktérben vegyünk fel egy a folyadékkal együtt mozgó örvényfelületet (A). Ezen az örvényfelületen jelöljük ki egy G zárt folyékony vonalat (17. ábra). Mivel az örvényvektorok érintik a felületet, tehát nincs arra merőleges komponensük, így a G által határolt felületre vonatkozó vetületi integráljuk zérus. A Stokes-tételt alkalmazva, és áttérve a görbe menti integrálra, a G zárt folyékony vonalon a sebesség vonalintegrálja is zérusnak adódik.

Thomson-tétele értelmében (súrlódásmentes, állandó sűrűségű közeg és potenciális erőter esetén) azok a folyadékrészek, amelyek örvényes mozgásban vol-



17. ábra. Folyékony örvényfelületen felvett zárt folyékony vonal [Lajos, 2008, nyomán]

tak, abban is maradnak, amelyek pedig nem végeztek örvényes mozgást, a későbbiekben sem válnak örvényessé, így a cirkuláció a G görbe mentén az időben nem változik, zérus értékű marad. Következésképpen egy folyékony örvényfelület mindig megtartja örvényfelület jellegét [Lajos, 2008]. Az előbbieket az örvényszálak (vagy örvénycső) és a környezet között folyadékcsere nincs (ha a gyorsuláseloszlás [erőtér] potenciális, ill. a sűrűség állandó, vagy csak a nyomástól függ). Ez *Helmholtz I. örvénytétele*, amely szerint tehát egy örvényvonal (amely két örvényfelület metszészvonala), mindig ugyanazokból a folyadékreszekből áll. A tételt jól szemléltetik a levegőben sokáig megmaradó füstkarikák, amelyek belsejében örvényes mozgás van. Hasonlóan egyben maradvá mozognak a nyíláson szabadon kifolyó sugár örvényvonalai. Megjegyzendő, hogy a füstkarikák lassan mégis bekövetkező szétoszlása azt is mutatja, hogy a valóságos folyadékban a Helmholtz-féle örvénytétel nem tökéletesen igaz, hiszen a súrlódás miatt az örvényesség „szétdiffundál” a környező folyadéktérbe [Haszpra, 1989].



18. ábra. Örvénycső felületén felvett zárt örvényvonal [Lajos, 2008, nyomán]

9.3. Helmholtz II. örvénytétele

Tekintsünk egy áramló folyadékban egy örvénycsövet (csövet alkotó örvényfelület), amelynek a palástján vegyünk fel egy zárt folyékony vonalat (\$S\$) (18. ábra). A folyékony vonal 4 részre osztható: \$S_1\$, \$S_2\$, \$S'\$ és \$S''\$. Mivel a zárt vonal egy örvényfelületen van, így a sebesség vonalintegrálja a vonal mentén Helmholtz I. tétel értelmében zérus, és az is marad. Ha \$S\$ mentén felírjuk a cirkulációt (pozitív körüljárási irány szerint az örvény bal kéz felé esik) akkor, mivel az \$S'\$ és \$S''\$ szakaszon a sebesség vonalintegráljai kiejtik egymást, és csak a pozitív körüljárási irányú \$S_1\$, és a negatív körüljárási irányú \$S_2\$ marad.

$$\oint_{S+} \vec{v} d\vec{s} = \oint_{S_1+} \vec{v} d\vec{s} + \oint_{S_2-} \vec{v} d\vec{s} = 0 \quad (74)$$

\$S_2\$ körüljárási irányát megváltoztatva, így integráljának előjele is megváltozik, és a másik oldalra átrendezve, a következő összefüggést kapjuk:

$$\oint_{S_1+} \vec{v} d\vec{s} = \oint_{S_2+} \vec{v} d\vec{s} \quad (75)$$

A fenti összefüggés Stokes-tétele értelmében átvihető egy felületi integrálra.

$$\int_{A_1} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{A_2} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (76)$$

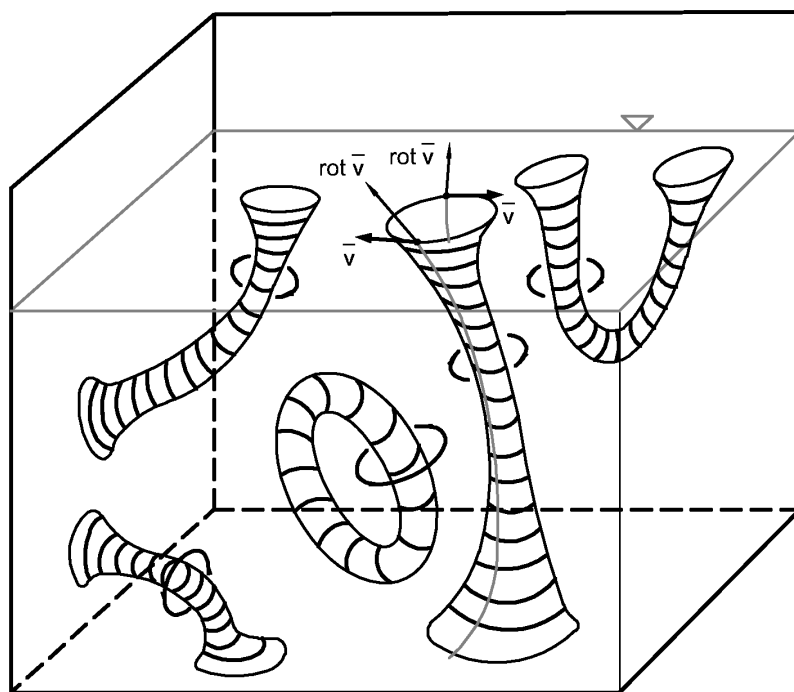
Az egyenlet alapján *Helmholtz II. örvénytétele* a következő: Valamely örvénycső bármely keresztmetszetében az örvényfolyam azonos, másképpen a cirkuláció az örvénycsövet övező bármely görbe mentén ugyanakkora. Másképpen egy folyékony örvénycső mentén bármely metszetben a $\int_A \text{rot} \bar{v} \cdot d\bar{A} = \text{konstans}$ és időben sem változik [Lajos, 2008].

Helmholtz II. tétele egyszerűen igazolható egy másik megközelítésben a rotáció vektor eloszlás mindenkor folytonosságát jelentő következő azonossággal:

$$\text{div}(\text{rot} \bar{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{v}) = 0 \quad (77)$$

A vegyes szorzat zérus értéket ad, hiszen két tényezője megegyezik, azaz párhuzamos. A kontinuitási tételt felhasználva azonossággként, egy \bar{v} sebességeloszlás egy áramcső bármely keresztmetszetében egyazon időpontban konstans vízhozamot szállít ($\int_A \bar{v} \cdot d\bar{A} = \text{konstans}$), úgy a mindig folytonos ($\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{v}$) szögsebességeloszlás is egy örvénycső bármely keresztmetszetében egyazon időpontban állandó örvényfolyamot szállít ($\int_A \bar{\omega} \cdot d\bar{A} = \text{konstans}$) [Haszpra, 1989].

Minél szűkebb tehát az örvénycső keresztmetszete, annál nagyobb az áthaladó folyadék szögsebessége. A gyakorlatban azonban végtelen nagy szögsebesség nem képzelhető el, ezért örvénycső a folyadéktér belsejében nem kezdődhet és nem végződhet, hanem vagy a folyadék határán végződik (pl. tornádó tölcésére a Föld felszínig ér) vagy zárt örvénygyűrűt alkot (19. ábra).



19. ábra. Örvénycső zárt örvénygyűrűt alkot vagy a folyadéktér határáig ér

rész V

Az Impulzustétel

Bevezetés

A fejezetben az impulzustétellel ismerkedünk meg, amely a mozgásegyenlet integrál alakja. Ugyanabból a megfontolásból eredeztethető mint az Euler-egyenlet, de itt a differenciálegyenlet helyett integrálokkal fejezzük ki az erőket és azok hatására bekövetkező mozgásmennyiség megváltozást. A tétel összenyomható és súrlódásos folyadékokra is érvényes lehet, de csak időálló (stacionárius) vagy ún. kvázi-stacionárius áramlás esetében. A tétel segítségével a folyadék által egy szilárd testnek átadott erő akkor is számítható, ha az áramlást csupán egy ún. *ellenőrző felület* mentén ismerjük [Gruber and Blahó, 1973]. A fejezet végén az impulzustétel gyakorlati értelmezhetőségét segítő, egy annak víz-építési hidraulikában alkalmazott formája kerül ismertetésre annak szemléletes volta miatt.

10. Az impulzustétel levezetése

Egy \bar{v} sebességgel haladó m tömegű elemi folyadékrész mozgásmennyiségén $\bar{I} = m \cdot \bar{v}$ vektormennyiséget értjük, amelyet *impulzusnak* nevezünk [Haszpra, 2002]. Ha a folyadékok folyamatosan \bar{F} eredő (gyorsító) erővel hatunk, akkor az a mozgásmennyiség folyamatos megváltozását eredményezi Newton II. axiómájának általános alakja szerint:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{I}}{dt} = \frac{d(m \cdot \bar{v})}{dt} \quad (78)$$

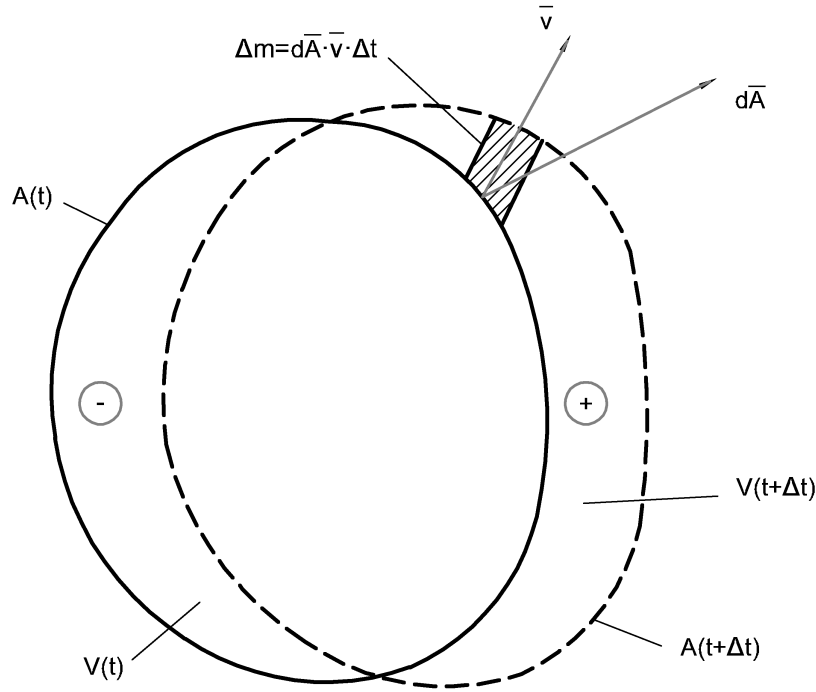
ahol, $\frac{d\bar{I}}{dt}$ hányadost *impulzushozamnak* is nevezhetjük, ennyi impulzust kap egységnyi idő alatt a rendszer (amennyiben a tömeget állandónak vesszük, az előbbi összefüggés az $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$ axiómát adja) [Haszpra, 2002].

A 78. egyenletet az idő szerint integrálva a következőt kapjuk:

$$\int_1^2 \frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}) \cdot dt = m \cdot \bar{v}_2 - m \cdot \bar{v}_1 = \int_1^2 \bar{F} \cdot dt \quad (79)$$

amely szerint a mozgásmennyiség megváltozás egyenlő az erő idő szerinti integráljával, vagyis az impulzussal [Gruber and Blahó, 1973].

Newton II. axiómájából kiindulva tehát, egy tömeg mozgásmennyiségének (az egységnyi időre jutó) a megváltozása egyenlő a tömegre ható erővel. Ezek a külső erők kétféleképpen lehetnek, egyrészt a térerő (ez folyadékok mechanikájában gyakorlatilag legtöbbször csak a tömegre ható térerősség), másrészt a felületi erők (nyomás, súrlódás). Ez utóbbi erőnek súrlódásmentes esetben csak felületre merőleges komponense van, a nyomásból származó erő [Lajos, 2008].



20. ábra. Az elúszó folyadéktérfogat szemléltetése az impulzustételhez [Lajos, 2008, nyomán]

Mivel az integrálás és differenciálás sorrendje felcserélhető az előbbieik alapján írjuk fel a mozgásmennyiség időbeli megváltozása és a folyadékra ható erők közötti kapcsolatot kifejező egyenletet:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \cdot \bar{v} \cdot dV = \int_{V(t)} \rho \cdot \bar{g} \cdot dV - \int_{A(t)} p \cdot d\bar{A} \quad (80)$$

ahol $V(t)$ a folyadék gondolatban elkülönített, az $A(t)$ felülettel határolt elúszó részének térfogata (a t index az időpontot jelöli) (lásd 20.ábra). A folyadék rész Δt idő alatt „tovaúszik” és az $A(t + \Delta t)$ felülettel meghatározott helyre kerül, és eközben mozgásmennyisége egyrészt a sebességtér időfüggése miatt változhat meg (lokális változás az instacionárius áramlás miatt), másrészt azért, mert a folyadék rész „tovaúszva” olyan helyre kerül, ahol a sebessége eltérő (konvektív megváltozás).

A 80. egyenlet bal oldalát kifejtve a dt idő alatti megváltozást figyelembe

véve a következőt kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \cdot \bar{v} \cdot dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \cdot \bar{v})_{t+\Delta t} \cdot dV - \int_{V(t)} (\rho \cdot \bar{v})_t \cdot dV \right] \quad (81)$$

Az előbbi egyenlet jobb oldalán lévő zárójel az elmozdult és a kiinduló helyzetben lévő folyadékrész mozgásmennyiségeinek különbségét tartalmazza. Következő lépésként vonjuk le és adjuk hozzá a zárójelben lévő tagokhoz azt a mozgásmennyiséget, amellyel az $A(t + \Delta t)$ felülettel határolt térrészben lévő folyadéktömeg a t időpillanatban bír $\left(\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \cdot \bar{v})_t \cdot dV \right)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \cdot \bar{v} \cdot dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \cdot \bar{v})_{t+\Delta t} \cdot dV - \int_{V(t+\Delta t)} (\rho \cdot \bar{v})_t \cdot dV \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \cdot \bar{v})_t \cdot dV - \int_{V(t)} (\rho \cdot \bar{v})_t \cdot dV \right) \right] \quad (82) \end{aligned}$$

A jobb oldali kifejezés első két integráljának integrálási tartománya megegyezik (lokális megváltozást jelzik), ezért a tagok átalakíthatók és egyszerűsíthetők Δt -vel, majd képezhető a $\Delta t \rightarrow 0$ -hoz határátmenet a következőképpen:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \cdot \bar{v})_{t+\Delta t} \cdot dV - \int_{V(t+\Delta t)} (\rho \cdot \bar{v})_t \cdot dV \right] &= \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t+\Delta t)} (\rho \cdot \bar{v})_t \cdot dV \cdot \Delta t &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \cdot \bar{v}) \cdot dV \quad (83) \end{aligned}$$

ahol, V -vel jelöltük a t időpillanathoz tartozó térfogatot, $V(t)$ -t. Az előbbi felírási mód azért kedvező, mert megengedi, hogy a vektortérnek szakadása legyen a V térfogaton belül. Erre példa a lökeshullámok, amelyekben keresztül a jellemzőket leíró függvények igen rövid távolságon belül igen jelentősen változnak, vagyis szakadásuk van. Ezekben az esetekben célszerű a $(\rho \cdot \bar{v})$ differenciálhányadosának integrálása helyett, amit lökeshullám esetében nem lehetne végrehajtani, a $(\rho \cdot \bar{v})$ integrálása után kapott mennyiséget idő szerint differenciálni [Lajos, 2008].

A 82. egyenlet jobb oldalán található 3. és 4. integrál különbségének számítása (konvektív megváltozást jelzik) meggondolást igényel, hiszen az integrálási tartomány különböző. Kedvező viszont, hogy ugyanahhoz a t időponthoz tartozó mennyiségekre vonatkoznak az integrálok. Az előbbi két integrál különbségét úgy kapjuk, hogy a 20. ábrán lévő pozitív (+) jellel ellátott mozgásmennyiségből le kell vonni a negatív (-) jellel ellátottat, hiszen a közös (központi) részek kiejtik egymást [Lajos, 2008].

Vizsgáljuk meg a továbbiakban a 20. ábrán az \bar{A} felület részét képező $d\bar{A}$ felületelem vektorral jelölt felületelemet, amely Δt idő alatt a \bar{v} sebesség irányában $\bar{v} \cdot \Delta t$ távolságot mozdul el és így az $A(t + \Delta t)$ felület részévé válik. Az elmozduló felület a vonalkázással jelölt térfogatelemet ($\bar{v} \cdot \Delta t \cdot d\bar{A}$) határozza meg. A jelölt térfogatelemben lévő elemi tömeg mozgásmennyisége a következő.

$$\bar{v} \cdot \left(\underset{m(\text{tömeg})}{\rho \cdot \bar{v} \cdot \Delta t \cdot d\bar{A}} \right) \quad (84)$$

Ha az előbbi szorzatban a \bar{v} és a $d\bar{A}$ tompaszöveget zárnak be (a negatív (-) jellel ellátott térrészben), akkor a mozgásmennyiség (impulzus) a skalárszorzat sajátosságai következtében negatív lesz. Az előbbi kedvező körülményt kihasználva a 82. egyenlet jobb oldalán lévő 3. és 4. integrál átalakítható, majd Δt -vel egyszerűsíthető.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V(t+\Delta t)} (\rho \cdot \bar{v})_t \cdot dV - \int_{V(t)} (\rho \cdot \bar{v})_t \cdot dV \right) = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_A \bar{v} \cdot \rho \cdot \bar{v} \cdot \Delta t \cdot d\bar{A} = \int_A \bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A}) \end{aligned} \quad (85)$$

Az előbbi egyenlet jobb oldali utolsó integráljában egy zárójellel próbáltuk jelölni, hogy a *mozgásmennyiség-megváltozás vektor* elemei a sebességvektorral párhuzamosak. A $\bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A})$ tagot a továbbiakban *impulzusáram vektornak* nevezzük. A levezetést követve belátható, hogy a V térfogatot körülvevő A felületen átáramlik a folyadék, tehát az már nem egy elúszó folyadéktérfogatot határoló felület, hanem egy a koordinátarendszerben rögzített felület, amelyen a vizsgált közeg keresztüláramlik, és amelyet a továbbiakban *ellenőrző felületnek* nevezünk.

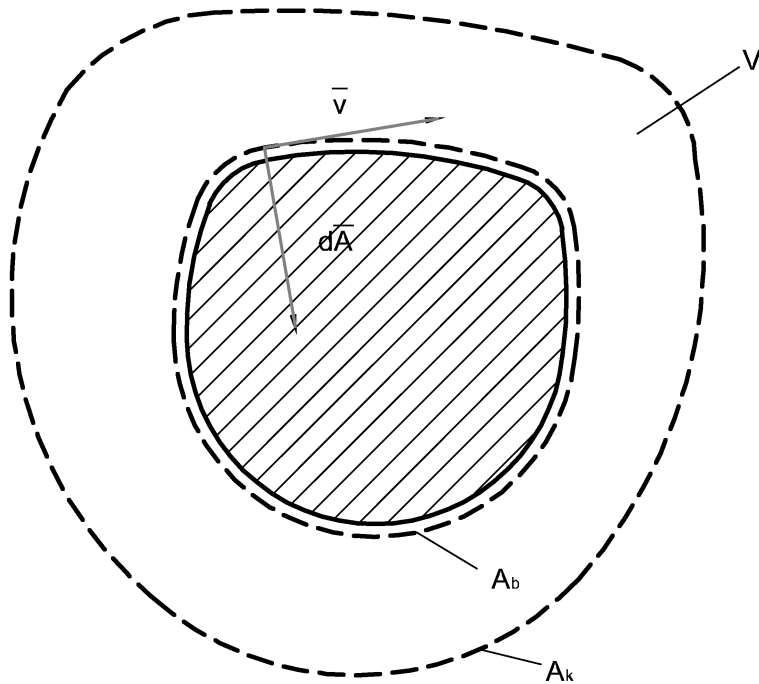
A 80, 82, 83 és a 85. egyenletet figyelembe véve felírható az *impulzustétel*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \cdot \bar{v}) \cdot dV + \int_A \bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A}) = \int_V \rho \cdot \bar{g} \cdot dV - \int_A p \cdot d\bar{A} \quad (86)$$

Az impulzustétel tehát egy mozgásegyenlet, amely a folyadékra ható erők és a folyadék mozgásállapota között teremt kapcsolatot. Az Euler-egyenlet differenciálegyenlet, az impulzustétel viszont integrálokat tartalmaz. Az integrálok kiszámításának eredményei erővektorok lesznek. Fontos, hogy az impulzustétel alkalmazásánál egy zárt A felületet (*ellenőrző felület*) szükséges felvenni és erre vonatkozóan kell kiszámítani az integrálokat [Lajos, 2008].

Az impulzustétel egyik nagy előnye, hogy elsősorban felületi integrálokkal (ill. stacionárius esetben csak egy könnyen számítható térfogati integrállal) dolgozik. A térfogati integrálok közül:

- az első (bal oldali) térfogati integrál zérus értékű, ha az áramlás stacionárius vagy kvázistacionárius (mivel kiszámítása meglehetősen nehéz, ezért az impulzustételt időben változó áramlásokra ritkán alkalmazzuk),



21. ábra. Szilárd test az ellenőrző felületen belül [Lajos, 2008, nyomán]

- a második (jobb oldali) térfogati integrál az ellenőrző felületben lévő folyadéokra ható térerőt (pl. súlyerőt) hivatott kifejezni (ennek számítása viszonylag egyszerű) [Lajos, 2008].

11. Szilárd test jelenléte az ellenőrző felületben

Az áramló közegben legyen jelen egy szilárd test a 21. ábrának megfelelően. Az ellenőrző felületet vegyük fel úgy, hogy az A_b (belső) felülettel zárjuk ki a szilárd testet az A_k (külső) által határolt V térfogatból. Az előbbiek szerint a folyadék által elfoglalt V térfogat, így az A_k és A_b közötti térfogatrész. A vizsgált áramlás legyen időálló vagyis stacionárius [Lajos, 2008].

Az előbbi esetre felírva az impulzustételt a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \cdot \bar{v}) \cdot dV + \int_{A_k} \bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A}) + \int_{A_b} \bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A}) = \int_V \rho \cdot \bar{g} \cdot dV - \int_{A_k} p \cdot d\bar{A} - \int_{A_b} p \cdot d\bar{A} \quad (87)$$

Egyszerűsítsük az előbbi egyenletet:

- A bal oldali első integrál zérus, ha az áramlás stacionárius.
- A bal oldali harmadik integrál ugyancsak zérus, hiszen a szilárd test felületén (A_b) keresztül nincs átáramlás (\bar{v} merőleges $d\bar{A}$ felületelem vektorra).
- A jobb oldali utolsó integrál a belső felületen a folyadékra ható, nyomásból származó erőt összegzi. Ez az erő megegyező nagyságú és irányú, de ellentétes irányítással bír, mint a folyadékról a szilárd testre ható erő (\bar{R} vektorral jelöljük).

Az előbbieket alapján a 87. egyenlet az alábbi formára egyszerűsödik:

$$\int_{A_k} \bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A}) = \int_V \rho \cdot \bar{g} \cdot dV - \int_{A_k} p \cdot d\bar{A} - \bar{R} \quad (88)$$

Az előző 88. egyenletben azért \bar{R} szerepel, mert a mérnöki gyakorlatban leggyakrabban a szilárd testekre ható erő a vizsgálat tárgya. Az impulzustétel jobb oldalán viszont a folyadékra ható erőket összegezzük, így a szilárd testről a folyadékra ható erőt negatív előjellel kell ellátnunk.

Az impulzustételt sűrűdésos közegre is alkalmazhatjuk, ekkor az ellenőrző felületen a folyadékra ható sűrűdésből származó erőket is meghatározhatjuk. Ezen erők eredőjét (jelöljük \bar{S} -el) az impulzustétel jobb oldalán célszerű megjelentetnünk [Lajos, 2008].

12. A hidraulika impulzustétele

Az impulzustétel általános levezetését kiegészítve, szemléletessége miatt nézzük most meg az impulzustételt a konstans sűrűségű áramló vizekre vonatkozóan. Valamely áramló víztömeg sebességének megváltozása, amely nagyság és/vagy irány szerinti változás lehet, külső erők hatására jön létre. Ezek a külső erők lehetnek térerők (a hidraulikában ez legtöbbször a nehézségi erő) és felületi erők (nyomás és sűrűdés). A gyakorlati feladatokban általában ismert az egységnyi idő alatt jellemző víztömeg (vízhozam és sűrűség szorzata) és annak bizonyos úton bekövetkező sebességváltozása, illetve a térerő, és keressük a felületi erőt (vagy inkább annak reakcióját). Evvel a reakcióerővel támadja a víz a határoló felületet (pl. mekkora erőt gyakorol a szabad vízszög az öt eltérítő lapra, vagy a csőben haladó vízáram az irányeltérítést okozó könyökre).

12.1. Az impulzustétel alkalmazása áramcsőre

Vizsgáljuk meg az impulzustétel alkalmazását elsőként egy áramcső szakaszra, összenyomhatatlan folyadék, permanens áramlása esetén (22. ábra). A vizsgált elemi víztest (legyen i jelű) a t időpontban az áramcső 1 és 2 szelvénye között van, dt idő elteltével pedig az 1' és 2' szelvények közé kerül. Mozgásmennyisége (impulzusa) a t időpontban a következő:

$$\bar{I}_i(t) = \bar{I}_{0i} + dm_i \cdot \bar{v}_{1i} = \bar{I}_{0i} + \rho \cdot dQ_i \cdot dt \cdot \bar{v}_{1i} \quad (89)$$

ahol, \bar{I}_{0i} az 1' és 2 szelvények közé eső víztest mozgásmennyisége, $dm_i \cdot \bar{v}_{1i}$ az 1 és 1' szelvények közé eső víztömeg mozgásmennyisége, amely az áramcső dQ_i vízhozama és a dt időtartam segítségével is felírható $\rho \cdot dQ_i \cdot dt \cdot \bar{v}_{1i}$.

A $t + dt$ időpontban az elemi víztest mozgásmennyisége, amikor az már az 1' és 2' szelvények között van, a következőképpen írható:

$$\bar{I}_i(t + dt) = \bar{I}_{0i} + dm_i \cdot \bar{v}_{2i} = \bar{I}_{0i} + \rho \cdot dQ_i \cdot dt \cdot \bar{v}_{2i} \quad (90)$$

ahol, \bar{I}_{0i} ugyanúgy az 1' és 2 szelvények közé eső, részben kicserélt anyagú, de változatlan tömegű víztest mozgásmennyisége, $dm_i \cdot \bar{v}_{2i}$ pedig a 2 és 2' szelvények közé eső víztömeg mozgásmennyisége.

A víztest mozgásmennyiségének megváltozása dt idő alatt tehát a következő:

$$d\bar{I}_i = \bar{I}_i(t + dt) - \bar{I}_i(t) = \rho \cdot dQ_i \cdot dt \cdot (\bar{v}_{2i} - \bar{v}_{1i}) \quad (91)$$

Az elemi víztestre ható erő (\bar{F}_i) pedig az impulzustétel értelmében, ennek a mozgásmennyiség megváltozásnak ($d\bar{I}_i$) az időegységre jutó része:

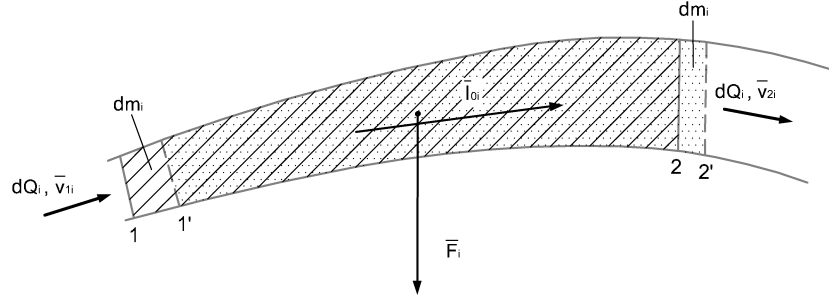
$$\bar{F}_i = \frac{d\bar{I}_i}{dt} = \rho \cdot dQ_i \cdot (\bar{v}_{2i} - \bar{v}_{1i}) = \rho \cdot dQ_i \cdot \bar{v}_{2i} - \rho \cdot d\bar{Q}_i \cdot \bar{v}_{1i} \quad (92)$$

Az előbbieket szerint az áramcsőben áramló dQ_i hozamú áramlás mozgásállapotának, az 1 és 2 szelvények közötti, megváltozását létrehozó \bar{F}_i erő egyenlő a másodpercenként átfolyó $\rho \cdot dQ_i$ tömegnek és az 1 és 2 szelvények között előálló $(\bar{v}_{2i} - \bar{v}_{1i})$ sebesség-változással való szorzatával. Másképpen megfogalmazva az \bar{F}_i erő a 2 szelvényben kiáramló impulzushozam ($\rho \cdot dQ_i \cdot \bar{v}_{2i}$) és az 1 szelvényben beáramló impulzushozam ($\rho \cdot d\bar{Q}_i \cdot \bar{v}_{1i}$) különbségéként írható fel.

12.2. Alkalmazás áramcsövek összességére

Nem az egyes áramcsövekre, hanem áramcsövek összességéből álló Q hozamú áramlás körülhatárolt részére (a térrészt teljesen körülhatároló felület [23. ábrán vonal] az A ellenőrző felületet jelképezi) ható összes erőt a következőképpen fejezzük ki [Haszpra, 2002]:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \rho \cdot \sum_{i=1}^n (\bar{v}_{2i} - \bar{v}_{1i}) \cdot dQ_i \quad (93)$$



22. ábra. Impulzustétel áramcső szakaszra [Haszpra, 2002, nyomán]

A véges számú és kis áramcsőről, végtelen számú elemi áramcsőre térjünk át, így az összegzés helyett az integrálást alkalmazzuk. Valamint az elemi áramcsövek dQ hozamát a kontinuitás szerint egy adott elemi áramcsőre eső $d\bar{A}$ felületrész (az A ellenőrző felület elemi részének normál felületvektora, irányítása a felületből kifelé mutat és nagysága a felületelemmel egyenlő) és a felületelemhez kapcsolódó sebességvektor szorzataként értelmezzük ($dQ = \bar{v} \cdot d\bar{A}$). Az előbbi átalakításokkal felírva az erőt:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \rho \cdot \int_Q (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \cdot dQ = \rho \cdot \int_A \bar{v} \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A}) \quad (94)$$

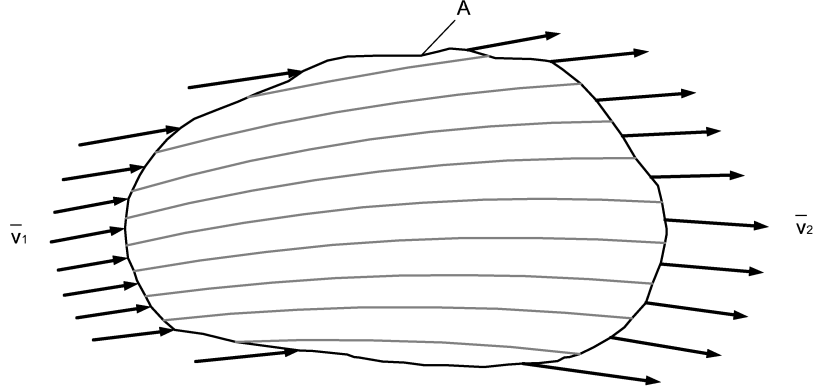
A gyakorlatban sokszor a $\bar{v}_1 = \text{konstans}$ és a $\bar{v}_2 = \text{konstans}$ homogén belépő és kilépő sebességeloszlásokat veszünk figyelembe, így az előbbi integrál egyszerűbb alakot ölt [Haszpra, 2002].

$$\bar{F} = \rho \cdot Q \cdot (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \quad (95)$$

12.3. Erővektorok egyensúlya az impulzustétel értelmezésében

Az áramcsőre visszatérve (24. ábra), mivel az áramcsőbe be- ($dQ_i \cdot \bar{v}_{1i}$) és kilépő ($dQ_i \cdot \bar{v}_{2i}$) elemi impulzusáram vektorok (impulzushozamok) külön-külön is erő dimenziójúak a sűrűséggel megszorozva, így tekinthetjük ezeket elemi kis erőeknek is. Az impulzusáram vektorok ($\bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A})$) közül az áramcsőbe

- belépő negatív (mivel a \bar{v} és $d\bar{A}$ vektorok tompaszöget zárnak be, tehát $\rho \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A})$ negatív, az impulzusáram vektor irányítása ellentétes a sebességvektoréval és a felületből kifelé mutat),



23. ábra. Az impulzustétel értelmezése az áramcsövek összességére [Haszpra, 2002, nyomán]

- az onnan kilépő pedig pozitív előjelű (hiszen a \bar{v} és $d\bar{A}$ vektorok hegyesszöget zárnak be, tehát $\rho \cdot (\bar{v} \cdot d\bar{A})$ pozitív, az impulzusáram vektor irányítása megegyezik a sebességvektoréval és a felületből itt is kifelé mutat),

Az előbbieket alapján megállapítható, hogy az impulzusáram-vektorok az ellenőrző felületből kifelé mutatnak. Formailag ezek az erővektorok (impulzuserők) egyensúlyt tartanak fenn az (\bar{F}_i) erővel.

$$\bar{F}_i = -\rho \cdot dQ_i \cdot \bar{v}_{1i} + \rho \cdot dQ_i \cdot \bar{v}_{2i} \quad (96)$$

Az előbbi három erő vektorháromszöge zárt, metszéspontjuk pedig közös. Ha kiterjesztjük az összefüggést több áramcsőből álló részre a következőt kapjuk:

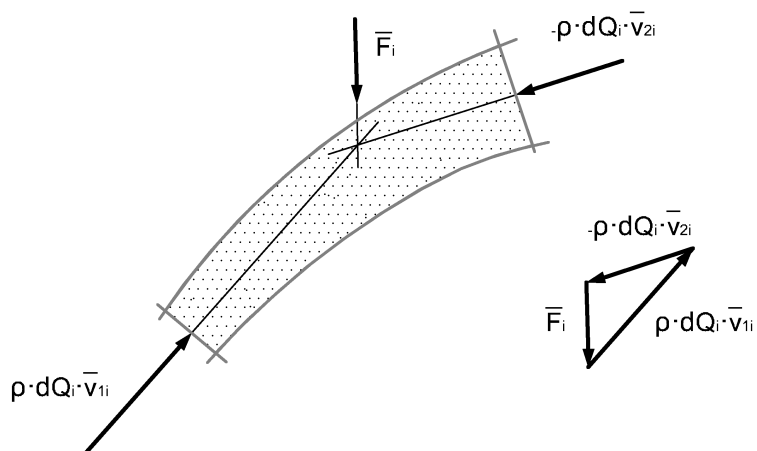
$$\bar{F} = -\rho \cdot Q \cdot \bar{v}_1 + \rho \cdot Q \cdot \bar{v}_2 \quad (97)$$

Amennyiben a sebességeloszlás ismert, akkor az impulzuserők is számíthatók.

A vizsgált folyadéktest által kifejtett F erő (ennek ellentettje a folyadéktestre ható erő) az előbbi vizet áramlására vonatkozó példát követve a következő részekből tevődik össze:

$$\bar{F} = \bar{G} + \bar{P}_0 + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{S} \quad (98)$$

A \bar{G} a kiválasztott térrészbe helyet foglaló folyadéktest súlyereje, \bar{P}_0 a határoló felület áramvonalakból álló részén ható erők eredője, \bar{P}_1 a belépő, és \bar{P}_2 a kilépő oldalon ható nyomóerők eredője (a \bar{P} erők eredője az ellenőrző felületen ható nyomóerők eredőjeként fogható fel $\int_A p \cdot d\bar{A}$), \bar{S} , pedig akkor jelenik meg



24. ábra. Áramcsőben lévő víztestre ható erők ábrázolása [Haszpra, 2002, nyomán]

amennyiben a súrlódás is szerepet játszik, a határoló felületen átadódó súrlódó erők eredőjét jelképezi. Az előbbi erőkkel tartanak egyensúlyt az impulzuserők. A gyakorlatban sokszor jellemző, hogy az \bar{F}_i -et alkotó erők közül csak egy ismeretlen, ekkor az előző egyenlet alapján az impulzusáramok ismeretében az számítható.

rész VI

Súrlódásos közegek áramlása

Bevezetés

A folyadékok fizikai tulajdonságait vizsgálva megállapítható, hogy azokban nyugvó (álló) közeg esetében súrlódás nem mutatható ki. A korábban levezetett törvényeknél (pl. Euler-egyenlet) a súrlódást áramló folyadékokban is többnyire zérusnak tekinthető. A súrlódás elhanyagolásával kapott eredmények általában mindaddig jól közelítik a valóságot, amíg a sebesség az áramlás irányában növekszik. Nem hanyagolható el azonban a súrlódás nagy belső súrlódású folyadékok kis sebességű és kis méretekből való áramlásánál, és kis súrlódás is megváltoztathatja a jelenségeket olyan esetekben, amikor a sebesség az áramlás irányában csökken [Gruber and Blahó, 1973]. Kis belső súrlódású folyadékok esetében is minden esetben eltér a valóságos áramkép a súrlódásmentességgel feltételezettől a szilárd falak, ill. testek közelében. A következőkben tehát olyan áramlásokkal foglalkozunk, ahol a súrlódásos közeg deformációjának hatására csúsztató és húzófeszültségek is ébrednek és ezen a feszültségek hatására az áramkép jelentősen eltérhet az ideáltól.

13. A súrlódásos közegekre vonatkozó mozgásegyenlet

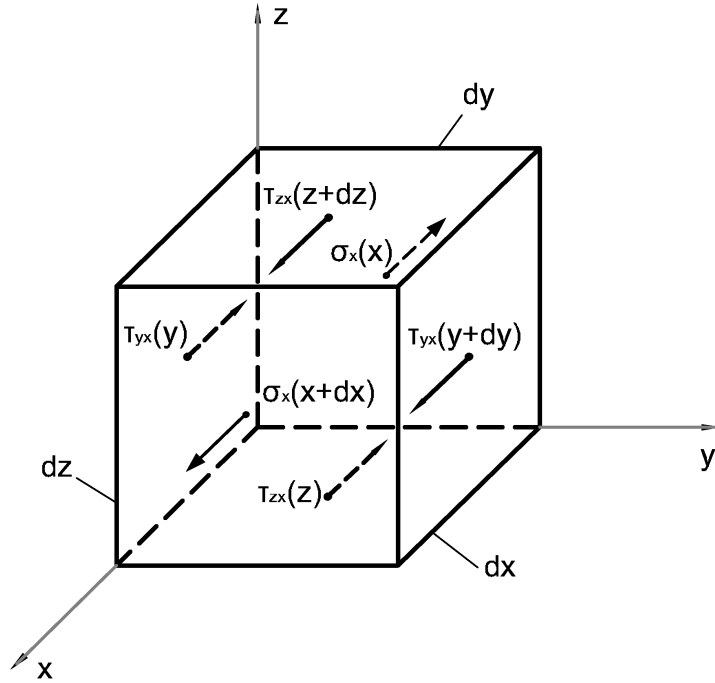
Az áramló közegben lévő gondolatban elhatárolt térrészre (pl. szilárd test) kétféle erő hathat:

- a tömegre ható térerősség, valamint
- a felületi erő, amely a szomszédos folyadékreszből adódik át.

Az előbb felsorolt típusú erők eredője változtatja meg az áramló közeg mozgásmennyiségét, azaz idézi elő a vizsgált folyadék rész gyorsulását. Egységnyi tömegű folyadék részre felírva egyenletszerűen a következő összefüggést kapjuk: $d\bar{v}/dt = \bar{g} + \bar{F}$, ahol \bar{g} a térerősség vektora, az \bar{F} pedig az egységnyi tömegű folyadék rész felületén ható erők eredője.

Az elhatárolt folyadék rész felületén súrlódásos közegekben az arra merőleges, nyomásból származó erőn kívül a felülettel párhuzamos csúsztatófeszültségek (τ), és a felületre merőleges, a folyadék deformációja következtében előálló húzófeszültségekből (σ) származó erők is jelentkezők.

Egy elemi élhosszúságú kockán szemlélteti az 25. ábra az x irányban jelentkező erőket előidéző feszültségeket. az ábrázolt húzó- és csúsztatófeszültségek a szemközti oldalakon azonos nagyságban ébrednének, a folyadék részre nem hatna erő. A valóságban azonban a τ , csúsztatófeszültségek és a σ , húzófeszültségek (amelyek a nyomást is tartalmazzák) általában változnak a térben. Az előbbi



25. ábra. Az elemi folyadékra x - irányban ható feszültségek (a csúsztatófeszültségek (τ) indexei közül az első annak a síknak a normálisát hivatott kifejezni, amelyikben az adott feszültség ébred, a második index pedig a feszültség irányát jelzi, mivel a húzófeszültségeknél (σ) a kettő egybeesik ott csak egy indexet használunk.) [Lajos, 2008, nyomán]

térbeli feszültségváltozás okozza az elemi folyadékra gyorsító erő felületen ható erőkből származó részét.

A továbbiakban írjuk fel az ábrázolt kis kockára ható x irányú erőt és ezt az erőt osszuk el a kis kocka $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ tömegével, hogy egységnyi tömegre ható \bar{F} erő x komponensét megkapjuk.

$$F_x = \frac{1}{\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz} \cdot \left((\sigma_x(x + dx) - \sigma_x(x)) \cdot dy \cdot dz + (\tau_{yx}(y + dy) - \tau_{yx}(y)) \cdot dx \cdot dz + (\tau_{zx}(z + dz) - \tau_{zx}(z)) \cdot dx \cdot dy \right) \quad (99)$$

Felhasználva, hogy $\sigma_x(x+dx) = \sigma_x(x) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \cdot dx$, stb. , az előbbi 99. egyenlet a következőképpen írható:

$$Fx = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (100)$$

Az 100. összefüggésben már egyenletszerűen megjelenik a felületi erő és a feszültség térbeli változása közötti korábban említett összefüggés. A mozgásegyenlet x irányú komponensegyenlete az előbbieket alapján felírható:

$$\frac{dv_x}{dt} = g_x + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (101)$$

Vezessük be a $\bar{\Phi}$ feszültségtenzort, amely a főátlóján a húzófeszültségeket az első és felső háromszögmátrixban pedig a csúsztatófeszültségeket tartalmazza:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (102)$$

Az egységnyi tömegű folyadékra ható \bar{F} erő az előbbieket alapján a feszültségtenzorral a következőképpen fejezhető ki: $\bar{F} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{\Phi} \nabla$, ahol ∇ a nabla differenciáloperátor.

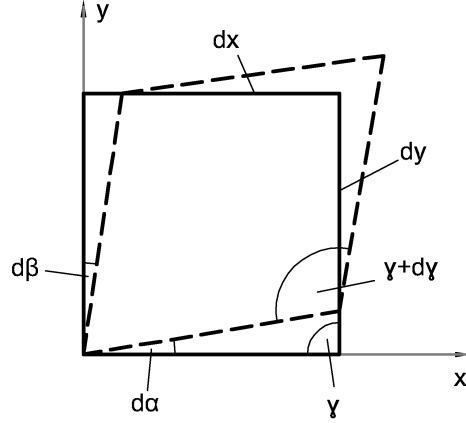
Az előbbieket felhasználva a folyadékra ható erők és a mozgásállapot közötti összefüggés a következőképpen írható:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} + \frac{1}{\rho} \cdot \bar{\Phi} \nabla \quad (103)$$

Mivel a mozgásegyenletek létrehozásánál nem lett kikötve semmi a közeg jellemzőire vonatkozóan, ezért az egyenlet nemcsak newtoni közegekre érvényes. A mozgásegyenlet azonban mindaddig nem használható, amíg a feszültségtenzorban szereplő 3 db. húzó- és 6 db. csúsztató feszültségről, vagyis a feszültségállapotról nincs információnk. A csúsztatófeszültség és a deformációsebesség között viszont tudvalevőleg kapcsolat van (pl. Newton-féle viszkozitási törvény), tehát lehetséges a feszültségállapot levezetésére a sebességtér jellemzőinek felhasználásával. Másképpen a σ és τ feszültségek helyére sebességkomponenseket lehet írni, ami által az egyenletben lévő ismeretlenek száma jelentősen csökkenhet [Lajos, 2008].

13.1. A sebességtér és a feszültségállapot közötti kapcsolat

Vizsgáljunk ún. newtoni közeget, amelynek a csúsztatófeszültség arányos a deformációsebességgel. A kis folyadék rész mozgását párhuzamos eltolódásra, forgásra, tágulásra és alakváltozásra lehet felbontani. Ezen mozgások közül az alakváltozás van kapcsolatban a feszültségállapottal.



26. ábra. Egy elemi folyadékhasáb deformációja [Lajos, 2008, nyomán]

13.1.1. Csúsztatófeszültségek

Egy áramló közegben gondolatban lehatárolt elemi méretű hasáb deformációját (26. ábra) elemezzük (síkbeli áramlás). Azt vizsgáljuk, hogy a hasáb egyik γ szögének idő szerinti változása ($d\gamma$), amely a hasáb deformációsebességét hivatott jelképezni, hogyan függ a síkban működő sebességkomponensek hely szerinti megváltozásától. A dx hosszúságú oldal $d\alpha$ szöggel fordul el dt idő alatt, abból eredően, hogy végpontjainak sebessége különböző. A végpontok által y irányban dt idő alatt megtett út különbsége: $\Delta y = \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dx \cdot dt$. A $d\alpha$ elfordulási szöget úgy kapjuk, hogy a Δy útkülönbséget elosztjuk dx -el ($d\alpha = \frac{\Delta y}{dx}$). Hasonlóan járhatunk el a dy hosszúságú oldal esetében, ami a dt idő alatt $d\beta$ szöggel fordul el. Az $d\alpha$ és $d\beta$ szögelfordulások jelentik együttesen a $d\gamma$ -t:

$$d\gamma = d\alpha + d\beta = \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot dt \quad (104)$$

Newton viszkozitási törvényét figyelembe véve, ha a deformációsebesség időbeli változását ($\frac{d\gamma}{dt}$) a dinamikai viszkozitással (μ) megszorozzuk, akkor a deformációsebességet előidéző τ_{xy} és az ezzel megegyező τ_{yx} csúsztatófeszültséget kapjuk.

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \tau_{yx} \quad (105)$$

Az előbbihez hasonlóan kifejezhető a többi csúsztatófeszültség komponens is.

13.1.2. Húzófeszültségek

A feszültségi állapotot, amely az elemi folyadékhasáb deformációja következtében kialakult, a csúsztatófeszültségeken (τ) kívül, húzófeszültségek (σ) is jellemzik.

A felületre merőleges σ húzófeszültség komponensek két részből tevődnek össze:

- a statikus nyomásból adódó húzófeszültségből (a statikus nyomás (p) a tér egy pontjában a főfeszültségek számtani közepeként értelmezhető: $p = -1/3 \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, ahol a negatív előjel értelmezése, hogy a p számértéke nyomófeszültség, a σ pedig húzófeszültség esetén pozitív)
- és az alakváltozási sebességből adódó húzófeszültségből, mivel az alakváltozási eredményeként létrejövő csúsztatófeszültségek miatt a felületre merőleges húzófeszültségek (σ') is keletkeznek.

Így az x irányú húzófeszültségre írható:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x \quad (106)$$

13.1.3. Feszültségek meghatározása nem kompresszálható közegek-nél

Tekintsünk egy egységnyi hosszúságú, négyzet alakú hasábot (27. ábra), amelynek $\Delta a \cdot 1$ felületű oldalain ható τ csúsztatófeszültségeket az átlóval kijelölt síkon ható σ'_1 húzófeszültség tartja egyensúlyban. A hasábra ható erők egyensúlya a következő,

$$2 \cdot \Delta a \cdot \tau \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot \Delta a \cdot \sigma'_1 \quad (107)$$

amiből Newton viszkozitási törvényét ismerve következik,

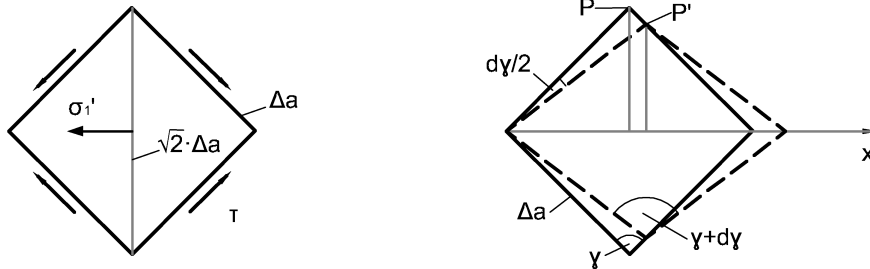
$$\sigma'_1 = \tau = \mu \cdot \frac{d\gamma}{dt} \quad (108)$$

A hasáb deformációját vizsgálva (ami az x irányú sebességkomponens x irányú megváltozására ($\frac{\partial v_x}{\partial x}$) vezethető vissza) az átló megnyúlása dt idő alatt a következőképpen írható:

$$\Delta x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \sqrt{2} \cdot \Delta a \cdot dt \quad (109)$$

Ennek a dx megnyúlásnak a fele a $\frac{d\gamma}{2}$ szögelfordulással összefüggő és az x tengellyel 45° -fokot bezáró PP' szakasz x irányú vetülete. A PP' szakasz hossza tehát: $\frac{\Delta x}{\sqrt{2}} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \Delta a \cdot dt$, amiből mivel $PP' = \frac{d\gamma}{2} \cdot \Delta a$ a $\frac{d\gamma}{2} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dt$ és $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot 2$.

Az előbbieket figyelembevételével az alakváltozási sebességből adódó húzófeszültségekre írható:



27. ábra. Csúsztatófeszültségek okozta húzófeszültségek számítása (bal ábra: a csúsztatófeszültség húzófeszültséget okoz, jobb ábra: folyadékrész deformációja a v_x sebességkomponens x irányú megváltozása következtében [Lajos, 2008, nyomán]

$$\sigma'_{1x} = \mu \cdot \frac{d\gamma}{dt} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (110)$$

Az y és z irányú komponens hasonlóképpen kifejezhető. Az előbbi összefüggések kapcsolatot teremtenek

- az adott koordinátára merőleges síkon ébredő, az alakváltozási sebességek miatt keletkező húzófeszültségek (σ'_{1x}) és
- a síkra merőleges sebességkomponensek önmagukkal párhuzamos irányú megváltozása között ($\partial v_x / \partial x$).

13.1.4. Feszültségek összenyomható közegek esetében

Összenyomható közeg ($\rho \neq 0$) áramlásban a sebesség önmagával párhuzamos irányú megváltozása bekövetkezhet a sűrűség változásával együtt járó sugárirányú tágulás (vagy összehúzódás) miatt is, amire a $d\gamma/dt = 0$ összefüggés érvényes, azaz nem keletkezik szögdeformáció. Mivel ilyen esetben mindhárom koordináta irányban egyforma tágulásról van szó, azaz $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$, akkor a folyadékrész növekszik, de nem jelentkezik alakváltozás ($\frac{d\gamma}{dt} = 0$).

Mivel a kontinuitási egyenlet szerint $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div} \bar{v}$, így valamennyi irányban azonos ütemű tágulás esetén pl. $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{3} \cdot \text{div} \bar{v}$.

Az x irányú húzófeszültséget okozó deformációsebességet tehát nem a $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, hanem a $\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \cdot \text{div} \bar{v}$ kifejezés jellemzi. Az deformáció miatti húzófeszültségekre összenyomható közeg esetén példaként az x irányban írható:

$$\sigma'_x = 2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \cdot \text{div} \bar{v} \right) \quad (111)$$

Az x irányú húzófeszültség pedig a következő lesz:

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x = -p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \text{div} \bar{v} \quad (112)$$

Az előbbieket figyelembevételével a feszültségtenzor mátrixa a következő:

$$\bar{\bar{\Phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + \sigma'_x & \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -p + \sigma'_y & \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & -p + \sigma'_z \end{bmatrix} \quad (113)$$

A feszültségtenzor mátrixa a deriválttenzor és transzponáltja kombinálásával létrejövő alakváltozási sebesség tenzor $\left(\bar{A}_s = \frac{1}{2} \cdot (\bar{D} + \bar{D}^T) \right)$ valamint az egységtenzor (\bar{E}) segítségével a következőképpen bontható fel:

$$\bar{\bar{\Phi}} = \left(-p - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \text{div} \bar{v} \right) \cdot \bar{E} + 2 \cdot \mu \cdot \bar{A}_s \quad (114)$$

Az előbbi kifejezés jobb oldalának utolsó tagja érzékelteti a feszültségek és a deformációsebesség lineáris kapcsolatát, ami a newtoni folyadékokra jellemző [Lajos, 2008].

13.2. A newtoni közegekre érvényes általános mozgásegyenlet

A feszültségállapot és a sebességtér jellemzői közötti kapcsolat ismeretében felírható a mozgásegyenlet $\left(\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} + \frac{1}{\rho} \cdot \bar{\bar{\Phi}} \nabla \right)$, amelynek x irányú komponensegyenlete a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ g_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \text{div} \bar{v} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (115)$$

Ha y és z irányban is felírjuk a mozgásegyenlet általános alakját akkor 3 egyenletet kapunk, amely 6 ismeretlent tartalmaz $(v_x, v_y, v_z, p, \rho, \mu)$, így a megoldásához minimum 6 egyenlet szükséges, de mivel a ρ, μ meghatározásához szükséges egy 7 ismeretlen a hőmérséklet bevezetése, ezért 7-re nő a szükséges egyenletek száma. Az előbbi 3 mozgási komponensegyenletet (115, stb.) a következő egyenletek egészíthetik ki:

- 4. egyenlet lehet a folytonosság tétele a következő formában ($\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \bar{v}) = 0$),
- 5. egyenlet a nyomás, a sűrűség és a hőmérséklet kapcsolatát kifejező törvény (pl. gáztörvény: $p \cdot \frac{1}{\rho} = R \cdot T$),
- 6. egyenlet kapcsolatot teremt a hőmérséklet és a viszkozitás között ($\mu \sim f(T)$),
- 7. egyenlet az energiaegyenlet, amely a belső energia, a mozgási energia megváltozása, valamint a közeg által, ill. azon végzett munka között teremt kapcsolatot.

Az előbbi egyenletek ismeretében is azonban az egyenletrendszer analitikus megoldása csak korlátozott számú, igen egyszerű esetben lehetséges. Ezért célszerű olyan egyszerűsítő feltételezéseket tenni, amik a valóságos áramlások esetében jó közelítést jelentenek [Lajos, 2008].

14. A Navier-Stokes-egyenlet

Az általános mozgásegyenlet egyszerűsítése céljából tételezzük fel, hogy az áramló newtoni közeg dinamikai viszkozitása (μ) és sűrűsége (ρ) állandó. Mivel a $\rho = \text{konstans}$ esetén a folytonosság tétele értelmében $\text{div} \bar{v} = 0$ ($\frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \text{div} \bar{v} = 0$), így az általános mozgásegyenlet jobb oldalának harmadik, összetett tagja a következőképpen alakítható át:

$$\frac{\mu}{\rho} \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \cdot \partial z} \right) = \quad (116)$$

$$\nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \nu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

ahol, a $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ az ún. kinematikai viszkozitás.

Az egyenlet jobb oldali második tagja a $\text{div} \bar{v}$ x szerinti deriváltja, amely $\text{div} \bar{v} = 0$ miatt zérussá válik. Így csak az első tag marad, amelynek segítségével a mozgásegyenlet átalakítható az ún. Navier-Stokes-egyenletté. Az egyenlet Navier francia fizikus és matematikus írta le 1822-ben és Stokes angol matematikus és fizikus öntötte, több mint 20 évvel később, végleges matematikai formába.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (117)$$

A Navier-Stokes-egyenletben szereplő 4 ismeretlen (v_x, v_y, v_z, p) meghatározásához, az előbbi 3 komponensegyenleten felül szükség van még 4. egyenletként a folytonosság tételére, amely állandó sűrűség (ρ) mellett a már jól ismert $\text{div} \bar{v} = 0$ alakot ölti, kifejtve: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$.

A Navier-Stokes-egyenlet egy másodrendű, elliptikus, parciális differenciál egyenlet, mivel a másodrendű parciális differenciálhányadosok összege szerepel benne. Az egyenletrendszer megoldásához ismernünk kell az áramlási tér teljes peremén a peremfeltételeket (pl. a sebességet, vagy annak meghatározott irányú változását, a nyomást, stb.).

A Navier-Stokes-egyenlet vektoriális alakban a következő:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \bar{v} \times \text{rot}(\bar{v}) = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) + \nu \Delta \bar{v} \quad (118)$$

A Navier-Stokes-egyenlet a jobb oldalon található utolsó tagban ($\nu \Delta \bar{v}$) különbözik csak a súrlódásmentes közegre vonatkozó Euler-egyenlettől ($\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p)$), tehát ez utóbbi tag fejezi ki a súrlódás hatását. A súrlódás hatását kifejező tagban szereplő $\Delta \bar{v}$ a felbontható a következőképpen:

$$\Delta \bar{v} = \text{grad}(\text{div} \bar{v}) - \nu \cdot \text{rot}(\text{rot} \bar{v}) \quad (119)$$

Miután a kontinuitás szerint $\text{div} \bar{v} = 0$, a Navier-Stokes egyenlet egyszerűsíthető:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) - \nu \cdot \text{rot}(\text{rot} \bar{v}) \quad (120)$$

Az előbbi összefüggés formája jól érzékelteti az áramlás örvényessége és a súrlódás közötti kapcsolatot. Potenciálos áramlás ($\text{rot} \bar{v} = 0$), sőt állandó örvényességű áramlás esetében a súrlódásnak nincs szerepe és ekkor a Navier-Stokes-egyenlet az Euler-egyenletté egyszerűsödik [Lajos, 2008].

15. Az örvénytranszport egyenlet

Vizsgáljunk egy stacionárius síkáramlást és írjuk fel a Navier-Stokes-egyenlet két komponensegyenletét a térerősség figyelmen kívül hagyásával:

$$\begin{aligned} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (121)$$

Ha az x irányú (első) komponensegyenletet y szerint az y irányú (másodikat) pedig x szerint differenciáljuk, majd az y irányúból (második) kivonjuk az x irányút (első) a következő *örvénytranszport egyenlet*-nek nevezett összefüggést kapjuk 2 dimenzióban:

$$\begin{aligned} v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + v_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= \\ \nu \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right) &= \end{aligned} \quad (122)$$

Az előbbi összefüggés a $\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = (\text{rot} \bar{v})_z$ azonosság felhasználásával a következő alakra hozható:

$$v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (rot\bar{v})_z + v_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} (rot\bar{v})_z = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (rot\bar{v})_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (rot\bar{v})_z \right) \quad (123)$$

vagy más formában,

$$\bar{v} \cdot grad (rot\bar{v})_z = \nu \cdot div (grad (rot\bar{v})_z) \quad (124)$$

Az előbbi egyenlet megfelel a hő-, ill. anyagátadás differenciálegyenletének (hasonló feltevésekkel, stacionárius síkáramlás, állandó vezetési tényezők):

- A hőátadás differenciál egyenlete: ha $(rot\bar{v})_z$ helyére a T hőmérsékletet és a ν kinematikus viszkozitás helyébe a $\frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$ hőfokvezetési tényező kerülne ($\bar{v} \cdot grad T = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot div (grad T)$).
- Az anyagátadás differenciál egyenlete (vagy más néven advektív-diffúziós egyenlet): ha $(rot\bar{v})_z$ helyére a C koncentráció és a ν kinematikus viszkozitás helyébe a D (turbulens) diffúziós tényező kerülne ($\bar{v} \cdot grad C = D \cdot div (grad C)$).

A fenti analógiából látható, hogy a viszkozitás hasonló szerepet tölt be az örvénység terjedésében, mint a hővezetési tényező a hő terjedésében, ill. a diffúziós tényező az anyagtranszportban. A Navier-Stokes-egyenlet jól kifejezti, hogy a súrlódás hatása valóságos közegek áramlásában a sebességtér örvénységének térbeli változásával van összekapcsolva és csak akkor lép fel, ha $rot (rot\bar{v}) \neq 0$. Az örvénység az áramló közeg és a szilárd felületek kölcsönhatásakor a szilárd felület határán keletkezik (a tapadás törvénye szerint), majd a viszkozitás révén „vezetéssel” határréteg leválással terjed az áramlási térben.

Instacionárius áramlás esetén az előbbi, síkbeli, stacioner örvénytranszport egyenlet bal oldala kiegészül egy időbeli változást kifejező taggal $\left(\frac{\partial (rot\bar{v})_z}{\partial t} \right)$.

$$\frac{\partial (rot\bar{v})_z}{\partial t} + \bar{v} \cdot grad (rot\bar{v})_z = \nu \cdot div (grad (rot\bar{v})_z) \quad (125)$$

16. A Reynolds-egyenlet

16.1. A Reynolds-szám

Az 1800-as évek vége felé egy Osborne Reynolds nevű angol fizikus a csőben áramló víz jellemzőit vizsgálta nyomjelző anyagot használva (28. ábra). Ez volt az első, úttörő jellegű turbulenciával foglalkozó kísérlet és az elemzése során kidolgozott dimenzió nélküli számot róla a Reynolds szám (Re) elnevezéssel látták el. Érdekes észrevétel, hogy az első turbulenciával foglalkozó kutatás tulajdonképpen a szennyezőanyag terjedés példáján került előtérbe, ezért nem is véletlen, hogy a turbulenciát a szennyezőanyag transzportfolyamatok esetében egy fontos befolyásoló faktornak tételezzük fel. Az eredeti kísérleti elrendezéshez hasonló látható az ábrán, amely szerint az ábrázolt tartályból szabályozható

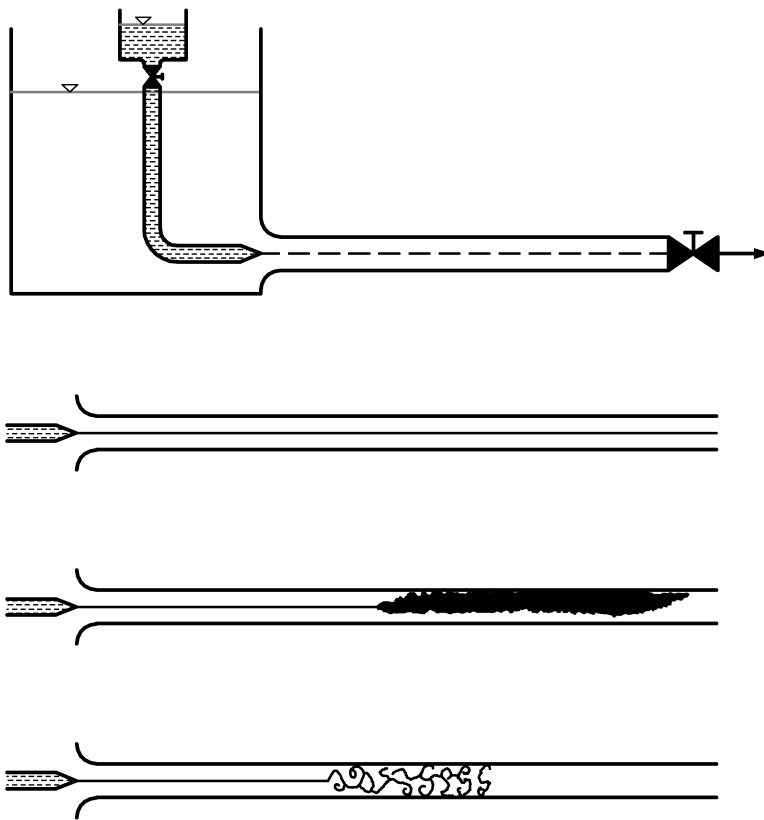
mennyiségű sűrűségű (ρ) és viszkozitású (μ , dinamikai viszkozitás) víz áramlik ki. A d átmérőjű, üvegből készült kifolyócső tengelyébe egy másik, vékonyabb csövön keresztül megfestett folyadékot (nyomjelzőt) vezetünk be. Ha a folyadék sebessége kicsi, a festett folyadékszál végighúzódik a folyadék tengelyében, jól megkülönböztethetően az átlátszó víztől és ahogy a sebességet növeljük az áramlásban a nyomjelző egy sebességhatár átlépése után gomolyogni kezd, majd a gomolyás erőteljesebb lesz és az elkeveredés rövid távon belül bekövetkezik.

Reynolds (1883 in. Socolofsky and Jirka, 2005)-as cikkében az alábbiakat írja: A kísérletet három csövön végeztem. Mindegyik egyenként 4 láb és 6 inch (1,37 m) hosszú volt, és a bemeneti oldalukon egy trombita fúvókájához illesztettem őket, a zavarás kiküszöbölése céljából. A vizet egy nagy üvegtartályból adagoltam, amelybe a csövek belemerültek, az elrendezés olyan volt, hogy az erősen színezett vízből származó festékcsíkok vagy csíkok a csövekbe a vízzel együtt léptek be. A kísérlet általános eredményei a következők voltak:

- Amikor a sebességek megfelelően alacsonyok voltak, a színezett csík egy jól kivethető egyenes vonal formájában húzódott végig a csövön.
- Ha a tartályban lévő víz nem lenne eléggé nyugodt, megfelelően alacsony sebességeknél, a festékcsíkok eltolódnak, de nem jelentkeznének kanyarulatok (gomolygóság).
- Ahogyan a sebességeket kis lépésekben növelte, egy bizonyos pontján a csőnek, mindig egy jelentősebb távolságra a fúvókától, a festék sáv egyszer csak elkeveredett a környező vízzel és betöltötte az áramló keresztmetszet egészét a használt színanyaggal. Bármilyen mértékű növelése a sebességnek az áttörési pont közeledését okozta a szívóka felé, de nem volt olyan alkalmazott sebesség, amivel sikerült volna elérni a fúvókát. A csöveket elektromos szikrával megvilágítva, a keskeny színcsíkok többé kevésbé pontosan leírható gomolygása vált láthatóvá, örvényességet mutatva.

Az első esetben leírtak az alacsony sebességeknél kialakuló lamináris áramlásra vonatkoztak. A vízrészecskék ebben az esetben párhuzamos sávokban mozognak egymáshoz képest és a zavarásokat a viszkozitás megszünteti. Az egyetlen lehetőség, amellyel a színezőanyag laterálisan szét tud terjedni a lamináris áramlásban az a molekuláris diffúzió. Így sokkal hosszabb cső lenne szükséges ahhoz, hogy a molekuláris diffúzió egyenesen szét tudja osztani a cső keresztmetszetében egyenesen a nyomjelző anyagot.

A 2. és 3. pont szerinti nagyobb sebességeknél az áramlás turbulens, a folyadékrészek instabillá válnak, az örvények méretskálája kezd kifejlődni, és a zavarások az instabilitás szerint kezdenek növekedni. A nyomjelző anyag, amelyik passzívan többé-kevésbé követi a folyadékrészek mozgását, az örvények növekedésének megfelelő gyorsasággal elkeveredik a keresztmetszvény mentén és turbulens áramlással tölti meg a csövet. Az elektromos szikrával végzett kísérletek megmutatták, hogy a nyomjelző az örvények alakját jól szemlélteti. Egy bizonyos idő múlva azonban az örvények növekednek és széttöredeznek, mivel a továbbiakban nem áll fenn már az az erős koncentráció gradiens, amely az



28. ábra. A Reynolds-féle kísérlet szemléltetése (felső ábra kísérleti elrendezés, felső cső lamináris áramlás, majd lefelé haladva a turbulencia hatása egyre erősödik) [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán].

örvényekben lévő és közvetlenül mellettük elhelyezkedő folyadékreszek között kezdetben jellemző. Ebben az időpillanatban a nyomjelző anyag már jól elkeveredett és az elkeveredés többé kevésbé véletlenszerűvé vált (annak ellenére, hogy még mindig az egyes diszkrét örvények által vezérelt).

Reynolds összefoglalva az eredményeit, megállapította, hogy az áramlásnak az előbbieken bemutatott karakterisztikus változása egy dimenzió nélküli számmal jellemezhető:

$$Re = \frac{\bar{v} \cdot l}{\nu} \quad (126)$$

ahol az \bar{v} a csőbeni áramlás sebessége, l a cső átmérője és ν a folyadékra jellemző kinematikus viszkozitás. A turbulencia pedig a magasabb Re értékeknél jellemző. A turbulencia fő következménye, hogy hatására növekszik az impulzus és az anyag transzportja.

16.2. A turbulens áramlások statisztikai jellemzése

Stacionárius turbulens áramlásban a sebességvektor (\vec{v}) felírható az átlagsebességvektor ($\bar{\vec{v}}$) és a hozzá kapcsolódó sebességingadozás (\vec{v}') összegeként:

$$\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}' \quad (127)$$

Az időbeli átlagsebesség vektor számításakor az átlagolás időtartamát ($T(s)$) sokkal nagyobbaknál célszerű választani, mint az az időtartam, amely alatt egy örvény a tér vizsgált pontján áthalad.

$$\bar{\vec{v}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \vec{v} \cdot dt \quad (128)$$

A sztochasztikusan változó sebességingadozás (átlagtól való eltérés) időbeli átlaga ezen a jellemző T időtávon véve zérus. Hiszen az örvényáthaladás okozza a sebességingadozások, jellemzően hosszú idő alatt kiejtik egymást.

$$\vec{v}' = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \vec{v}' \cdot dt = 0 \quad (129)$$

A turbulens áramlásban a nyomás ingadozására is a sebességhez hasonló jellegzetességek adódnak.

$$p = \bar{p} + p' \quad (130)$$

A turbulencia nagyságának a jellemzésére használhatjuk pl. a *turbulenciafokot*, amely a sebességkomponensek ingadozását hasonlítja az időbeli átlagsebességhez [Lajos, 2008].

$$Turbulenciafok = \left(\frac{1}{|\bar{\vec{v}}|} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)} \right) \quad (131)$$

16.3. Az időbeli átlagokra vonatkozó mozgásegyenlet, az ún. Reynolds-egyenlet

A Navier-Stokes-egyenlet helyesen írja le a newtoni közegek áramlását, függetlenül attól, hogy az áramlás lamináris vagy turbulens, állandó sűrűségű és viszkozitású közeg esetében. A turbulens áramlások igen bonyolult szerkezete azonban felvetett olyan problémákat, hogy találunk -e olyan módszereket, amelyekkel ezek az áramlások teljes komplexitásukban számíthatók -e egyáltalán. Reynolds a probléma kezelésére levezette az időbeli átlagokra vonatkozó mozgásegyenletét, kövessük mi is az ő gondolatmenetét.

Vegyük a Navier-Stokes-egyenlet x irányú komponensegyenletét és a bal oldalához adjunk hozzá $v_x \cdot \text{div} \vec{v} = 0$ -át.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_x \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (132)$$

Ha a bal oldalon elvégzünk egy-két átalakítást ($2 \cdot v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(v_x \cdot v_x)}{\partial x}$, ill. $v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial(v_x \cdot v_y)}{\partial y}$, stb.) a következőt kapjuk:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial(v_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(v_x \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_x \cdot v_z)}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (133)$$

Helyettesítsük a sebességvektor komponenseket az időbeli átlagokra és az attól való eltérésekre vonatkozó összeggel ($v_x = \bar{v}_x + v'_x$). Ezután képezzük az egyenlet időbeli átlagát (a jellegzetes T időtartamra vonatkozóan). Az összefüggés időbeli átlaga megegyezik az egyes tagok átlagának az összegével, ill. különbségével. Az átlagolás és egyszerűsítés során a következő jellegzetességeket használjuk fel.

- Mivel az időbeli átlagolás tulajdonképpen integrálást jelent, az integrálás és a differenciálás sorrendje pedig felcserélhető ezért a sebességkomponensek ingadozásának átlagát vehetjük, ami zérust kell, hogy adjon ($\overline{\partial v'_x} = \partial \overline{v'_x} = 0$). Így bármelyik tagban szerepel szorozóként a sebességkomponensek ingadozásának átlaga, azt 0-vá teszi.
- Ha viszont a sebességingadozások szorzatának az átlaga szerepel, annak értéke már nem zérus ($\overline{\partial v'_x \cdot v'_x} \neq 0$ vagy $\overline{\partial v'_x \cdot v'_y} \neq 0$, stb.)
- A nyomásingadozásokra ugyanúgy igaz, hogy ($\overline{\partial p'} = \partial \overline{p'} = 0$), így a nyomásingadozások átlagát szorozóként tartalmazó tagok is zérus értékűek lesznek.
- A $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}$ értéke csak akkor zérus, ha az időbeli átlagsebesség is hosszabb időtartamot véve állandó és nem változik trendszerűen.

Az átlagolások és egyszerűsítés után megkapjuk a *Reynold-féle-egyenletet*, amely tulajdonképpen a Navier-Stokes-féle egyenlet időbeli átlagsebességekre vonatkoztatva és kiegészítve a sebességingadozásokat tartalmazó tagokkal. Példaként az x komponensegyenlet a következő:

$$g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(\overline{v_x^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_y'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_z'})}{\partial z} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{v_x^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_z})}{\partial z} = \quad (134)$$

A bal oldali második harmadik és negyedik tagban elvégezve a differenciálást, az időbeli átlagsebességekre vonatkozóan megjelenik a $\bar{v}_x \operatorname{div} \bar{v} = 0$ tag, amit elhagyhatunk.

$$g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial(\overline{v_x^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_y'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v_x \cdot v_z'})}{\partial z} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} = \quad (135)$$

16.4. A látszólagos feszültségek és sebességingadozás kapcsolata

16.4.1. Impulzustétel alkalmazása a sebességvektor felbontásával felírt egyenletre

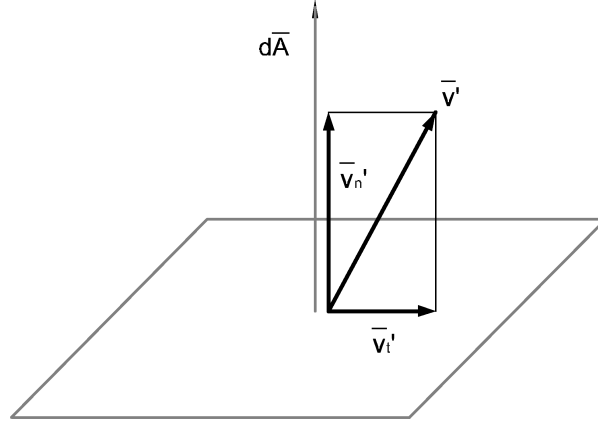
Vizsgáljuk meg az impulzustétel segítségével turbulens, kvázistacionárius áramlás esetén a Reynolds-egyenlet sebességingadozásokat tartalmazó tagjait. Vegyünk egy tetszőleges A ellenőrző felület, $d\bar{A}$ vektorral jellemzett felületelemét (29. ábra). A vektor talpontjában van a sebességingadozás vektor (\bar{v}'), amely felbontható

- normális (\bar{v}'_n) és
- érintőirányú (\bar{v}'_t) komponensekre.

Legyen az időbeli átlagsebesség stacionárius és írjuk fel így stacionárius (valójában kvázistacionárius, mert trend ugyan nincs, de ingadozások vannak a sebességben) impulzustételt az időbeli átlagra és az ingadozásokra felbontott sebességekkel és nyomásokkal. A felírás után vegyük az impulzusegyenlet (mint integrálegyenlet) időbeli átlagát, majd végezzük el az időbeli átlagolásból eredő egyszerűsítéseket.

$$\int_A \bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v} \cdot dA) = \int_V g \cdot \rho \cdot dV - \int_A \bar{p} \cdot dA - \int_A \overline{\bar{v}' \cdot \rho \cdot \bar{v}'} \cdot dA \quad (136)$$

A jobb oldal utolsó tagja fejezi ki a sebességingadozások hatását. Ha figyelembe vesszük, hogy a jobb oldali utolsó integrál számításakor először a \bar{v}' és



29. ábra. A sebességingadozás-vektor értelmezése egy elemi felületelemen [Lajos, 2008, nyomán]

$d\bar{A}$ vektorok skalárszorzását kell elvégezni, ahol $\bar{v}' = \bar{v}'_n + \bar{v}'_t$ és $\bar{v}'_t \cdot dA = 0$, akkor az utolsó tag a következő lesz.

$$-\int_A \overline{\bar{v}' \cdot \rho \cdot \bar{v}'} \cdot dA = -\int_A \overline{\bar{v}'_n \cdot \rho \cdot \bar{v}'_n} \cdot dA - \int_A \overline{\bar{v}'_t \cdot \rho \cdot \bar{v}'_n} \cdot dA \quad (137)$$

A jobb oldali első tag a felületre merőleges, a második tag pedig avval párhuzamos erővektort jelent, így az első integrált a nyomásból származó erővel összevonhatjuk.

$$\int_A \bar{v} \cdot \rho \cdot (\bar{v} \cdot dA) = \int_V g \cdot \rho \cdot dV - \int_A (\bar{p} + \rho \cdot (\bar{v}'_n \cdot \bar{v}'_n)) \cdot dA - \int_A \rho \cdot (\bar{v}'_t \cdot \bar{v}'_n) \cdot dA \quad (138)$$

16.4.2. Látszólagos feszültségek

A kvázistacionárius áramlásra felírt impulzustétel tehát átalakult egy időbeli átlagokra vonatkozó összefüggésben, amelyben megjelentek a sebességingadozásokra vonatkozó tagok. Ezeket a tagok:

- látszólagos (az időben átlagolt mozgásegyenletben a sebességingadozások hatását fejezi ki) nyomásnövekedés $p_l = \rho \cdot (\bar{v}'_n \cdot \bar{v}'_n)$ és

- a látszólagos csúsztatófeszültség $(\tau_l = -\rho \cdot \overline{(v'_t \cdot v'_n)})$, mivel a $d\bar{A}$ felület-elemmel párhuzamos tagot fejez ki.

Az előbbieket alapján a Reynold-egyenlet jobb oldalán a sebességingadozást kifejező tagok hasonlóképpen felírhatóak a látszólagos húzófeszültség (nyomásnövekedés) és a látszólagos csúsztatófeszültségek segítségével.

$$-\frac{\partial \left(\overline{v_x'^2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\overline{v'_x \cdot v'_y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\overline{v'_x \cdot v'_z}\right)}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_{lx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{lyx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{lzx}}{\partial z} \right) \quad (139)$$

Ha mindhárom komponens-egyenletben elvégezzük az átalakítást, akkor észrevehető, hogy jobb oldali három utolsó tag egy *látszólagos feszültségtenzor* $(\bar{\bar{\Phi}}_l)$ és a nabla operátor (∇) szorzata, azaz a turbulens, kvázistacionárius áramlásra a mozgásegyenlet felírható.

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} + \frac{1}{\rho} \cdot \bar{\bar{\Phi}} \cdot \nabla + \frac{1}{\rho} \cdot \bar{\bar{\Phi}}_l \cdot \nabla \quad (140)$$

A látszólagos feszültségeket és a látszólagos feszültségtenzor elemeit Reynolds-feszültségeknek is nevezzük.

A látszólagos feszültségtenzor $(\bar{\bar{\Phi}}_l)$ a következőképpen írható le:

$$\bar{\bar{\Phi}}_l = \begin{bmatrix} \rho \cdot \overline{(v'_x \cdot v'_x)} & \rho \cdot \overline{(v'_x \cdot v'_y)} & \rho \cdot \overline{(v'_x \cdot v'_z)} \\ \rho \cdot \overline{(v'_x \cdot v'_y)} & \rho \cdot \overline{(v'_y \cdot v'_y)} & \rho \cdot \overline{(v'_y \cdot v'_z)} \\ \rho \cdot \overline{(v'_x \cdot v'_z)} & \rho \cdot \overline{(v'_y \cdot v'_z)} & \rho \cdot \overline{(v'_z \cdot v'_z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{lx} & \tau_{lyx} & \tau_{lzx} \\ \tau_{lxy} & \sigma_{ly} & \tau_{lyz} \\ \tau_{lxz} & \tau_{lyz} & \sigma_{lz} \end{bmatrix} \quad (141)$$

A turbulens impulzuscsereből adódó látszólagos feszültségeket Boussinesq javaslatára a Newton-féle viszkozitási törvénnyel analógiát vonva egy, a közegekre jellemző μ_t turbulens, vagy *örvényviszkozitás* (kinematikai viszkozitással analóg) és a deformációsebesség (időben átlagolt) szorzataként írhatjuk fel.

$$\tau_{l,yx} = \tau_{l,xy} = -\rho \cdot \overline{(v'_x \cdot v'_y)} = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) \quad (142)$$

Az turbulens kinematikai viszkozitást $\nu_t = \mu_t/\rho$, az anyagjellemző viszkozitáshoz hasonlóan definiálhatjuk. A turbulens-, vagy örvényviszkozitás, amely az áramlás jellemzésére (és nem az anyagéra) szolgál, az anyagjellemző viszkozitásnál általában egy-két nagyságrenddel nagyobb értéket képvisel [Lajos, 2008].

17. A mozgásegyenlet megoldásával kapcsolatos problematika

A gyakorlatban előforduló komplex környezeti probléma (állandó sűrűségű és viszkozitású közeg esetében) esetében általában a következő egyenletek megoldására van szükség.

a newtoni közegek turbulens áramlását leíró Navier-Stokes egyenlet:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) - \nu \cdot \text{rot}(\text{rot}\bar{v}) \quad (143)$$

a kontinuitási egyenlet:

$$\text{div}\bar{v} = 0 \quad (144)$$

és valamely skaláris mennyiség (pl. szennyezőanyag) transzportját leíró transzportegyenlet (a benne szereplő tagokat itt definiálok):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad}C = \text{div}(D \cdot \text{grad}C) + S_c \quad (145)$$

ahol, a C a szennyezőanyag koncentrációja (kg/m^3), D a turbulens diffúziós tényező (m^2/s) és S_c egy forrástagot ($kg/(s \cdot m^3)$) jelképez [Lajos, 2008].

Az előbbi parciális differenciál egyenlet rendszer (PDE) megoldására csak igen korlátozott esetben léteznek

- analitikus megoldások,
- a jelenségek megismerésére szolgáló fizikai kísérletek (pl. kisminta kísérletek) pedig igen költségesek és kivitelezésük hosszadalmas (bár a belőlük származó eredmények általában megbízhatóak),
- ezért az elmúlt évtizedekben igen jelentős energiákat fordítottak a PDE numerikus megoldására és ezen a területen jelentős előrehaladás történt. A korszerű számítástechnika bármilyen bonyolult határfeltételek mellett képes lamináris áramlás esetén a Navier-Stokes-egyenlet megoldására [Hászpra, 1989]. A turbulens áramlások sokkal nagyobb problémát jelentenek, ott különböző közelítő megoldások lehetségesek.

A numerikus megoldások taglalása nem ennek a tananyagnak a témaköre, így ezt a részt itt le is zárom.

rész VII

A diffúzió értelmezése, a diffúziós egyenlet

Bevezetés

A fejezet megismertet minket az anyagok mozgásával, vagy más néven transzport folyamatokkal, kapcsolatos alapfogalmakkal és ráfordítja a figyelmünket a diffúziós folyamatok fizikájára. Célunk egy fontos, a folyamatot leíró parciális differenciál egyenlethez eljutni. Ez a fejezet hozzá fog segíteni minket a későbbi fejezetben következő bonyolultabb folyamatok megértéséhez és elkezd, ill. folytatja annak a mérnöki intuíciónak a kifejlesztését, aminek a segítségével a környezetben lejátszódó transzportfolyamatokkal kapcsolatos problémákat oldhatunk meg [Gribovszki, 2011].

17.1. Alapfogalmak, lényeges kérdések és definíciók

Egyszerűen fogalmazva a környezetben lejátszódó transzportfolyamatok közül itt most a azokra a folyamatokra koncentrálunk, amelyek a közegben lévő anyagok koncentrációváltásával állnak kapcsolatban.

17.1.1. A koncentráció definiálása

Abból a célból, hogy értékeljük mennyi kémiai anyag van jelen egy folyadék bármelyik régiójában, szükséges hogy számszerűen jellemezzük az adott kémiai anyag intenzitását, ill. jelenlétét. Ezt az alapvető mennyiséget a transzportfolyamatoknál koncentrációnak nevezzük. Általános szóhasználat szerint a koncentráció fogalom egy adott anyag mennyiségének jellemzésére szolgál egy elegen belül.

Matematikailag, a C koncentráció általában egy adott összetevő tömegének (M_i) az aránya a teljes elegy térfogatához (V) viszonyítva.

$$C = \frac{M_i}{V} \quad (146)$$

A koncentráció dimenziója ebben az esetben $[ML^{-3}]$, a leggyakoribb mértékegységek szerint: $mg/l, kg/m^3$, stb.. Egy vagy kétdimenziós problémák esetében a koncentráció esetlegesen kifejezhető tömeg per egységnyi szegmens hossz $[ML^{-1}]$ vagy tömeg per egységnyi felület $[ML^{-2}]$ dimenzióban.

Egy másik lehetőség a tömegarány (χ) alkalmazása, ami az adott összetevő tömegének (M_i) viszonya az elegy összes tömegéhez (M) képest.

$$\chi = \frac{M_i}{M} \quad (147)$$

A tömegarány dimenzió nélküli, mégis gyakran fejezik ki eltérő nagyságrendű tömegre vonatkozó mértékegységekkel, úgy mint pl. mg/kg , parts per million (ppm) vagy parts per billion (ppb).

A kémikusok által elterjedten használt koncentráció definíció a moláris koncentráció (θ). A moláris koncentrációt úgy definiáljuk, mint egy összetevő moljainak N_i a számát az összes térfogathoz (V) viszonyítva.

$$\theta = \frac{N_i}{V} \quad (148)$$

A moláris koncentráció dimenziója a $molekulaszám/L^3$, jellemző mértékegységei a mol/l és a $mmol/l$. Hogy a moláris koncentrációval dolgozni lehessen ismerni kell a vegyületet alkotó atomok súlyát a periódusos rendszer szerint pl. g/mol mértékegységben és tudni kell, hogy egy mól $6,022 \cdot 10^{23}$ db. molekulát jelent.

Annak a kiválasztása, hogy melyik koncentráció definíciót részesítjük előnyben általában a feladatnak megfelelően történik. Arra is figyelni kell azonban, hogy az alkalmazott koncentráció formula mértékegységei megfeleljenek annak az egyenletnek, amelyiket az adott összetevő transzportjának és jövőbeli sorsának az előrejelzésére használunk. Egy gyakori probléma ered abból a tényből, hogy a tömegarányt és a klasszikus koncentrációt gyakran használják egymással felcserélve a vizes rendszerekben történő folyamatok esetében. Az előbbi dolog oka, hogy a tiszta víz sűrűsége $3,98^\circ C$ -on $1g/cm^3$, ami a hagyományos koncentrációban mg/l -ben és a tömegaránnyal ppm -ben kifejezett értékeket azonosá teszi. Kifejezett figyelmet kellene azonban szentelni az előbbieknek, a tengervíz vagy az atmoszféra esetében, ahol a ppm és a mg/l nem azonosak. A konklúzió tehát a következő, minden esetben ellenőrizni kell a mértékegységeket. Ezáltal el is jutunk a következő alapvető kérdéshez a dimenzióvizsgálat módszeréhez [Socolofsky and Jirka, 2005].

18. Dimenzió analízis alkalmazása az elkeveredés jellemzésének példáján

A környezetben lejátszódó transzportfolyamatok esetében, gyakran akarjuk azt megtudni, hogy milyen sokáig tart, amíg egy kémiai anyag megtesz egy bizonyos távolságot, illetve milyen sokáig tart egy adott koncentrációra (általában előírt határértékre) történő hígulása. Ezen probléma esetében három fizikai mennyiséggel (változóval) dolgozunk: l , az a távolság, amely fölött a kémiai anyag már kellőképpen felhígul, szétterjed; D , a környezetbeni szóródás mértéke, az ún. diffúziós ráta vagy tényező; és a t idő. Bár eddig még definíciószerűen nem vettük be a D -t, mint a diffúzió jellemzésére szolgáló mennyiségét, annyit szükséges tudnunk, hogy a dimenziója $[L^2T^{-1}]$, valamint azt, hogy a nagy D értékek gyors elkeveredést, a kis D értékek pedig lassú környezetbeni szóródást jeleznek. Az előbbiek alapján három változónk van (l, D, t), amelyek két dimenzióval a hosszal $[L]$ és az idővel $[T]$ jellemezhetőek. Alkalmazva a Buckingham-féle π elméletet, a következő dimenziótlan számot kapjuk:

$$\pi_1 = \frac{D \cdot t}{l^2} \quad (149)$$

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az így kapott jellemzőnket Peclet-számnak hívják.

Ha azt akarjuk tudni, hogy a diffúzió hatására egy adott kémiai anyag milyen l távolságra jut t idő alatt, akkor átrendezve és l -re megoldva az előbbi dimenzió nélküli számra létrehozott egyenletünket, azt kapjuk, hogy: $l \propto \sqrt{D \cdot t}$.

Az előbbi egyenlet a környezeti áramlástan klasszikus skálázási törvénye, és ez az a képlet, amit szinte a leggyakrabban fogunk használni jelen tananyagban. Az arányossági tényező a különböző geometria szerint ugyan változni fog, de a skálázási törvény érvényessége mindig megmarad. Az előbbiekből eredően a $\sqrt{D \cdot t}$ tényezőt nevezzük a diffúzió hossz léptékének.

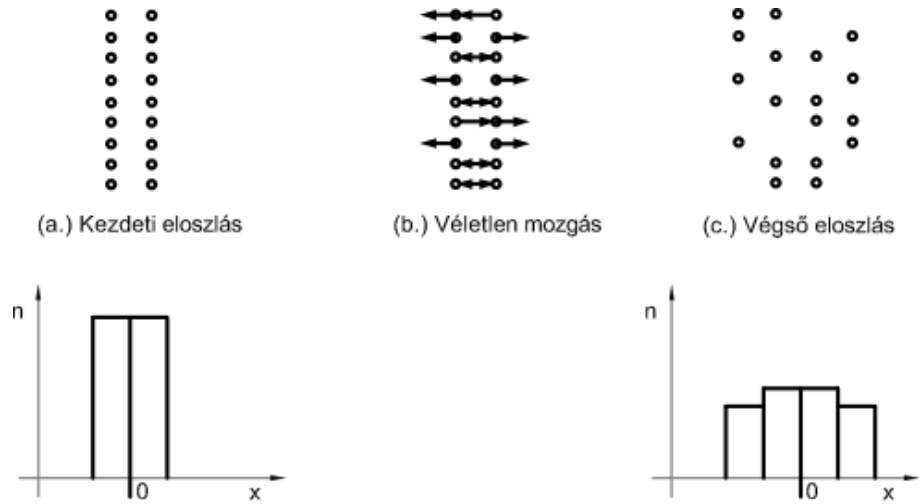
19. A diffúzió

Amint láttuk a környezetbeni áramlások esetében az egyik alapvető transzportfolyamat a diffúzió. A diffúzió, annak véletlenszerű természetében különbözik az advekciónál, de ez a véletlen jelleg nem feltétlenül követ egy adott folyadék részecskét. A diffúzió egyik jól ismert példája a parfümillat szétterjedése egy üres szobában. Ha egy parfümös üveget kinyitnak és az illatosítószerek lehetősége van a levegőbe történő párolgásra, akkor hamarosan az egész szobában érezni lehet majd a parfüm illatát. Tapasztalatból tudjuk, hogy az illat erősebb lesz a kibocsátási forráshoz közel és gyengébb a távolabbi pontokban, de a parfüm molekuláinak ez a megoszlása valójában a véletlen bolyongás és a turbulens mozgás következménye. Ezek alapján a diffúzió két alapvető tulajdonsága van: az egyik, hogy véletlenszerű a természete, a másik pedig, hogy addig indukál transzportfolyamatot a magasabb koncentrációjú helyről az alacsonyabb koncentrációjú hely felé, amíg el nem érjük az egyensúlyi állapotnak megfelelő koncentráció-megoszlást.

19.1. A Fick-féle törvény

Vizsgáljuk meg alaposabban az előbbi parfüm szétterjedésével kapcsolatos példánkat, hogy a diffúzió következtében hogyan terjed a parfüm illata a magasabb koncentrációjú helyről az alacsonyabb koncentrációjú hely felé. Most már a célunk egy matematikai összefüggést levezetése, amely képes leírni ezt a szétterjedési folyamatot. A következőkben a Fischer et al. [1979]-es munkájában szereplő megközelítést fogjuk alapvetően követni.

Hogy a diffúziós fluxusra vonatkozó összefüggésünket levezessük, vegyünk példaként (30. ábra) két sor molekulát párhuzamosan egymás mellett, ahol a két sor közötti középvonal az $x=0$. Ezen molekulák közül minden egyes véletlenszerűen mozog a hőmérsékletnek (Brown-féle hőmozgásnak) megfelelően. Didaktikai célokból, most csak az egyik irányú komponenset vegyük figyelembe a három dimenziós mozgásból: mozgás jobbra vagy balra az x -tengely mentén. A



30. ábra. A Fick-féle diffúziós modell illusztrálása a részecskék egy csoportjának egy dimenziós, ún. Brown-féle molekuláris mozgásának sematikus ábrázolásával. Az ábra felső része magukat a részecskéket mutatja, az alsó rész pedig a részecskék elhelyezkedésének megfelelő hisztogram, amely analóg a koncentrációval.

továbbiakban definiáljuk a részecskék tömegének balra történő mozgását M_l -el, a jobbra történő tömegátadódást M_r -el, és annak a valószínűségét (transzfer ráta per idő), hogy a részecskék az $x=0$ vonalon áthaladnak, jelöljük k -val, dimenzió szerint $[T^{-1}]$.

Egy adott δt idő múlva a részecskéknek átlagosan az egyik fele jobbra, a másik fele balra lép. Ha részecskék térbeli eloszlásáról hisztogramokat készítünk, azt látjuk, hogy ezen véletlen mozgás következtében a maximum koncentráció csökken, míg a részecskéket befoglaló teljes térfogat növekszik (a részecskefelhő szétterjed).

Matematikai formában leírva, a részecskék átlagos fluxusa a bal oldali oszlopból a jobb oldaliba kM_l , míg a jobb oldali oszlopból a bal oldaliba kM_r , ahol a mínusz előjel a kitüntetett irány meghatározására szolgál. Az előbbieket szerint a részecskék nettó fluxusa q_x a következőképpen számítható:

$$q_x = k \cdot (M_l - M_r) \quad (150)$$

Az előbbi egy dimenziós esetre az M_l és az M_r helyett használjunk koncentrációkat:

$$C_l = \frac{M_l}{\delta x \delta y \delta z} \quad (151)$$

$$C_r = \frac{M_r}{\delta x \delta y \delta z} \quad (152)$$

ahol, δx az x tengely menti hossz, δy a mélység és a δz a magassága minden egyes oszlopnak. Fizikailag δx az az átlagos lépéshossz az x tengely mentén, amit a molekulák δt idő alatt tesznek meg. Egy dimenziós esetben azt akarjuk, hogy q_x az x tengelyre merőleges irányban az egységnyi felületen keresztül áramló fluxust jelképezze, így a $\delta y \delta z$ szorzatot egységnyiinek vesszük.

Következő lépésként nézzük, meg dC/dx véges differencia formában történő leírását.

$$\frac{dC}{dx} = \frac{C_r - C_l}{x_r - x_l} = \frac{M_r - M_l}{\delta x \delta y \delta z \cdot (x_r - x_l)} = \frac{M_r - M_l}{\delta x (x_r - x_l)} \quad (153)$$

Az előbbi egyenlet a következő kifejezést adja ($M_l - M_r$)-re.

$$M_l - M_r = -\delta x \cdot (x_r - x_l) \frac{dC}{dx} \quad (154)$$

Figyelembe véve, hogy $\delta x = (x_r - x_l)$ és az előző összefüggést behelyettesítve $q_x = k \cdot (M_l - M_r)$ -be a következő adódik.

$$q_x = -k \cdot (\delta x) \cdot \frac{dC}{dx} \quad (155)$$

Az előbbi egyenlet két ismeretlent tartalmaz k -t és δx -et. Fischer et al. (1979) szerint, mivel q nem függ egy önkényesen felvett δx -től, ezért feltételezhetjük, hogy a $k \cdot (\delta x)^2$ egy konstans. Ezt a adott helyzetre jellemző konstanszt a jövőben diffúziós tényezőnek hívjuk (D). D -t behelyettesítve az előző egyenletbe az egy dimenziós diffúziós fluxus egyenletét kapjuk.

$$q_x = -D \cdot \frac{dC}{dx} \quad (156)$$

Fontos megjegyezni, hogy a diffúziós fluxus egy vektormennyiség, valamint azt, hogy mivel a koncentráció dimenziója [ML^{-3}] ezért a diffúziós fluxus dimenziójára [$ML^{-2}T^{-1}$]. Hogy az összes anyagáramot (tömeg fluxust) \dot{m} számítsuk, [MT^{-1}] mértékegységben, a diffúziós fluxust integrálnom kell egy felületen (általában egy mozgásirányra merőleges felületen). Egy dimenziós esetben az \dot{m} számítása a következő.

$$\dot{m} = A \cdot q_x \quad (157)$$

ahol, $A = \delta y \cdot \delta z$.

Az előbbi egy dimenziós esetet három dimenziósra kiterjesztve, felírhatjuk a diffúziós fluxus vektort egy pontra, különböző jelölésekkel is.

$$\bar{q} = -D \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z} \right) = -D \cdot \nabla C = -D \cdot \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (158)$$

Azokat a diffúziós folyamatok, amelyek az előbbi összefüggés szerint leírhatók Fick-féle diffúziós folyamatoknak hívjuk, és az előbbi egyenletet pedig *Fick-törvénynek*.

Hogy megkapjunk egy adott felületen keresztülhaladó összes anyagáramot (\dot{m} , teljes tömeg fluxust), a \bar{q} -vektor normál komponensét integrálnunk kell a felületen.

$$\dot{m} = \int_A \bar{q} \cdot d\bar{A} \quad (159)$$

ahol, $d\bar{A}$ az elemi felülethez tartozó normál vektor.

19.1.1. A víz levegő határreteken keresztüli diffúziós fluxus példája

Az időben átlagolt oxigén profil $C(z)$ egy tó felszínének lamináris alrétegében a következő egyenlettel határozható meg.

$$C(z) = C_{sat} - (C_{sat} - C_l) \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{z}{\delta \cdot \sqrt{2}} \right) \quad (160)$$

ahol, C_{sat} a vízben az aktuális körülmények közötti telítettségi oxigén koncentráció, C_l az oxigén koncentrációja a tó víztestjében, δ a koncentrációra vonatkozó határreteg vastagsága, és z a vertikális irányú változást jelölő változó lefelé pozitívnak értelmezve.

A tóban jelenlévő turbulencia a felelős a δ , határreteg vastagság állandó szinten tartásáért. Keressük meg azt a kifejezést, amelynek alapján a tóba jutó összes tömeg fluxust (anyagáramot) meghatározhatjuk.

A Fick-féle törvény azt mondja nekünk, hogy az oxigén profilban jelentkező gradiens fogja nekünk indukálni az oxigén tóba irányuló diffúzióját. Mivel a koncentráció x és y irányban azonos, csak a z irányban találunk diffúziós fluxust, amely a következő egyenlettel írható le.

$$q_z = -D \cdot \frac{dC}{dz} \quad (161)$$

A koncentráció gradiens deriváltja tehát szükséges a megoldáshoz, amely jelen esetben a következő.

$$\frac{dC}{dz} = -(C_{sat} - C_l) \cdot \frac{d}{dz} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{z}{\delta \cdot \sqrt{2}} \right) \right) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(C_{sat} - C_l)}{\delta \cdot \sqrt{2}} \cdot \exp - \left(\frac{z}{\delta \cdot \sqrt{2}} \right) \quad (162)$$

A tó felszínén a z értéke zérus, így a diffúziós fluxus a következőképpen számítható.

$$q_z = (C_{sat} - C_l) \cdot \frac{D \cdot \sqrt{2}}{\delta \cdot \sqrt{\pi}} \quad (163)$$

Az q_z dimenziója $[M/(L^2T)]$. Azért, hogy a teljes felszínen keresztüli anyagáramot megkapjuk, a diffúziós fluxust szoroznom kell a tó felületével, A_l -el. Ezek alapján a teljes tófelszínen keresztüli oxigénre vonatkozó diffúziós anyagáram megadható.

Oldott anyag	Diffúziós tényező (b)	Diffúziós tényező (c)
	$(10^{-4} \text{cm}^2/\text{s})$	$(10^{-4} \text{cm}^2/\text{s})$
oxigén O_2	0,20	0,15
szén-dioxid CO_2	0,17	0,12
hidrogén-karbonát HCO_3^-	0,11	0,08
nitrát NO_3^-	0,17	0,13
foszfát PO_4^{3-}	0,05	0,04
vas (ferri) Fe^{2+}	0,06	0,05

6. táblázat. Néhány jellemző vízben oldott anyag molekuláris diffúziós tényezői standard nyomáson, két hőmérsékleti érték mellett (b, 20 °C-on; c, 10 °C-on) forrás: <http://www.talknet.de/difcoef.html>

$$\dot{m} = A_l \cdot (C_{sat} - C_l) \cdot \frac{D \cdot \sqrt{2}}{\delta \cdot \sqrt{\pi}} \quad (164)$$

A $C_l < C_{sat}$ esetére, ami általában jellemző, az anyagáram pozitív, tehát a tóba irányuló fluxust jelöl.

19.2. Diffúziós tényező

A diffúziós tényező előbbi definíciójából ($D = k \cdot (\delta x)^2$) látható, hogy a D dimenziója $[L^2 T^{-1}]$. Mivel a Fick-féle törvényt a molekulák Brown-féle hőmozgására írtuk fel, D egy ún. molekuláris diffúziós tényező, amit néha D_m -nek hívunk, hogy erre a speciális tulajdonságára utaljunk. A D tényező értéke, ebben az esetben a molekulák Brown féle hőmozgásának intenzitását (energiáját és mozgásra való szabadságát) hivatott kifejezni. Előbbiek miatt a D függ a fázis mélységétől (cseppfolyós vagy légnemű), a hőmérséklettől és a molekula mérettől. Híg vizes oldatokra a D általános nagyságrendje $2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$; míg a levegőben diszpergált gázokra $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; Látható, hogy 4 nagyságrendi (10^4) a különbség a két fázis között.

A következő néhány anyag (6. táblázat) alacsony sótartalmú (0,5 ppt (parts per trillion: megadja a rendszer billió (10^{12}) egységében az illető komponens mennyiségét ugyanazon egységben)) vizes oldatának D -tényezőit ismerteti. A táblázatból látható, hogy egy adott hőmérsékleten a diffúziós tényező a molekula méretnek megfelelően (nagy molekula kisebb D) $\pm 10^1$ -szeres tartományban változik. A táblázat alapján az is nyilvánvaló, hogy a D értéke a hőmérsékletnek megfelelően is változik. Egy 10°C -os hőmérsékletváltozás a D esetében egy ± 2 -szeres változást indukál. Ezeket az előbbi megállapításokat úgy összegezzük gyakorlatias nézőpontból, hogy a gyorsabb és kevésbé akadályozott mozgás magasabb diffúziós tényezőt eredményez [Gribovszki, 2011].

20. A diffúziós egyenlet

20.1. A diffúziós egyenlet általános alakja

Bár a Fick-féle törvény a diffúziós folyamatokra tekintettel ad ugyan egy kifejezést az anyagáramokra vonatkozóan, azonban még mindig szükségünk lenne egy olyan egyenletre, ami a szétdiffundáló tömeg idő szerinti koncentrációváltozásait adja meg a tér egy pontjában. Ebben a fejezetben azt fogjuk meglátni, hogy egy ilyen egyenlet hogyan vezethető le az anyagmegmaradás törvényéből.

A diffúziós egyenlet levezetéséhez vegyünk egy kontroll térfogatot (CV , 31. ábra). Egy adott nyomjelző anyag tömegének (M) időbeli megváltozása ebben a kontroll térfogatban (CV) az anyagmegmaradás törvénye szerint a következőképpen írható le.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out} \quad (165)$$

Abból a célból, hogy diffúziós fluxust számoljunk a kontroll térfogatba be- (in) és onnan kiáramló (out) anyagmennyiségek esetében, használjuk a Fick-féle törvényt, amely az x -irányban felírva a következőt adja.

$$q_{x,in} = -D \cdot \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{in} \quad (166)$$

$$q_{x,out} = -D \cdot \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{out} \quad (167)$$

Ahol az in és out a kontroll térfogatba belépő és kilépő felszíneken vannak.

Hogy az összes anyagáramot (\dot{m}) megkapjuk a diffúziós fluxust (q_x) meg kell szoroznunk a kontroll térfogat (CV) megfelelő felületével ($A = \delta y \cdot \delta z$). A következő egyenlet szerint kaphatjuk meg a nettó anyagáramot (anyagáram változást) az x -irányban,

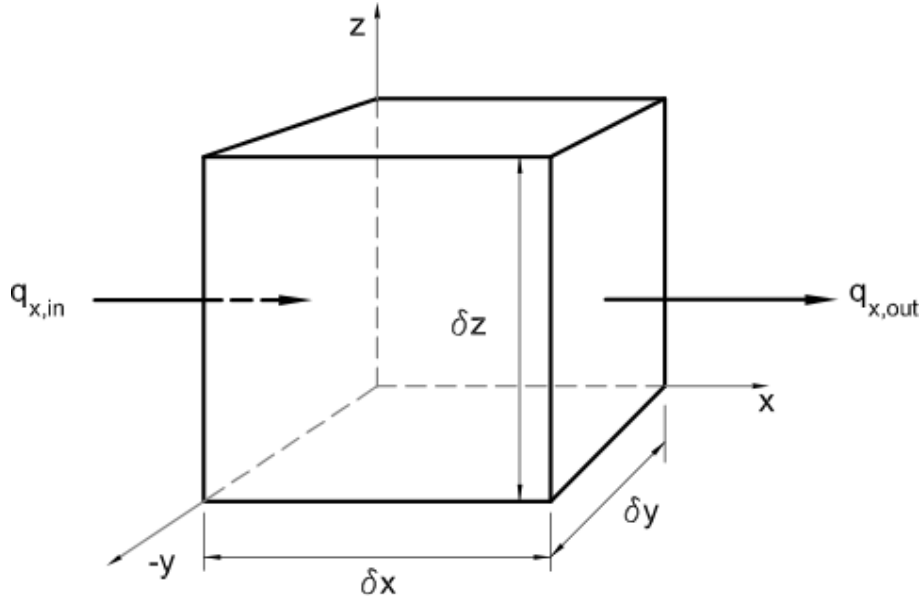
$$\delta \dot{m}_x = -D \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \left(\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{in} - \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{out} \right) \quad (168)$$

Hogy folytathassuk, egy módszert kell találnunk, aminek a segítségével kifejezhetjük a $\partial C / \partial x$ tagot a kilépő, out felületen. Ehhez a feladathoz használjuk a lineáris Taylor sorba fejtést, mint egy fontos lineáris approximációs függvényt. A Taylor sorba fejtés általános formája a következő:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \cdot \delta x + HOTS \quad (169)$$

ahol a $HOTS$ feloldása *higher order terms*, magyarul magasabb-rendű tagok. A $\partial C / \partial x$ -et helyettesítve az $f(x)$ helyére a Taylor sorban adódik,

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{out} = \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{in} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{in} \right) \cdot \delta x + HOTS \quad (170)$$



31. ábra. A diffúziós egyenlet levezetésénél használt differenciális kontroll térfogat [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]

A Taylor sorba fejtés lineáris változatánál elhanyagoljuk a HOTS-t. Az előbbi egyenletet behelyettesítve a nettó anyagáramra vonatkozó egyenletbe 168 és a helyettesítés után is megmaradó *in* kifejezést elhagyva a következőt kapjuk:

$$\delta \dot{m}_x = -D \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \cdot \delta x \quad (171)$$

Az y és z irányokban a kontroll térfogaton keresztüláramló nettó fluxusokat hasonlóképpen számítjuk:

$$\delta \dot{m}_y = -D \cdot \delta x \cdot \delta z \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \cdot \delta y \quad (172)$$

$$\delta \dot{m}_z = -D \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \cdot \delta z \quad (173)$$

Mielőtt a kapott eredményeket a fejezet elején lévő anyagmegmaradásra vonatkozó (165) egyenletbe behelyettesítjük, szintén át kell konvertálnunk az M tömeget koncentrációba, felhasználva, hogy $M = C \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$. A koncentrációt (C) és a nettó anyagáramokat ($\delta \dot{m}$) behelyettesítve az anyagmegmaradási egyenletbe a három dimenziós diffúziós egyenletet kapjuk (amely különböző jelölésrendszereket is felhasználva) a következőképpen néz ki.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) = D \cdot \nabla^2 C = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad (174)$$

Az egyenlet a környezetben lejátszódó transzportfolyamatok egyik alapegyenlete.

20.2. Az egy dimenziós diffúziós egyenlet

Egy dimenziós esetben az y és z irányú koncentráció gradiens zérus és megkapjuk az egy-dimenziós diffúziós egyenletet:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (175)$$

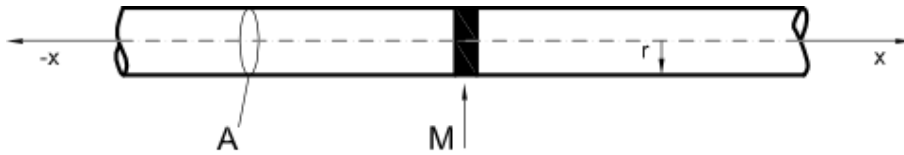
Álljunk meg egy pillanatra az előző egyenletnél, hogy rámutassunk néhány kulcsfontosságú dologra.

- Először is az egyenlet, az idő szerint, elsőrendű differenciál egyenlet, tehát a megoldáshoz el kell látnunk egy kiindulási feltétellel. A megoldása nempermanens, másképpen instacioner, amely szavak azt jelentik, hogy időben változó. Azért, hogy a permanens vagy más néven stacioner megoldást kapjunk az egyenlet bal oldalán a $\partial C/\partial t$ tagot egyenlővé kell tenni zérussal, és ebben az esetben a megoldás nem is igényel kiindulási feltételt. A stacioner megoldása az egyenletnek maga a jól ismert *Laplace-egyenlet*.
- Másodszor az egyenlet térben másodrendű, így két határfeltételt igényel, és a kapott megoldás a térben változó.
- Harmadrészt az egyenlet formája teljesen megegyezik a hővezetési egyenlettel, ahol a D diffúziós tényezőt a κ hővezetési tényező helyettesíti. Ez az észrevétel jól egyezik avval az általános benyomással, hogy a hő a meleg helyekről a hideg helyek felé vezetődik tovább (diffundál), éppúgy, mint ahogy a koncentráció diffúziósan szétterjed a magasabb koncentrációjú hely felől az alacsonyabb koncentrációjú helyek felé. Ez az analógia azért is fontos, mert a hővezetés egyenletének számos megoldása már ismert [Socolofsky and Jirka, 2005]. Az előbbi analógia egyébként a felszín alatti szivárgási folyamatokkal is fennáll, ahol a D helyére a k , szivárgási tényező kerül, a C koncentrációt pedig a h hidraulikus nyomás helyettesíti.

21. Az egy dimenziós diffúziós egyenlet hasonlósági alapon történő megoldása

Mivel a diffúziós egyenletnek, mint láttuk kiemelt fontossága van a környezetben lejátszódó transzportfolyamatok terén, a továbbiakban részletesen taglaljuk az összefüggés egy dimenziós esetének egyik megoldási módját. Az egyenlet sokféle megoldási lehetősége közül a [Fischer et al., 1979] által leírt metódust fogjuk követni. A megoldás az ún. hasonlósági analógiát követjük, abból a célból, hogy demonstrálhassuk az anyagban korábban megismert dimenzió analízist.

Vegyünk egy az egy dimenziós probléma érzékeltetése céljából egy keskeny, végtelen csövet, r sugárral (32. ábra). M tömegű jelzőanyagot injektálunk a cső



32. ábra. Az egy dimenziós tiszta diffúzió esetének ábrázolása egy végtelen csőben [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]

$A = r^2 \cdot \pi$ keresztmetszetébe egyenletes eloszlásban az $x = 0$ pontban a $t = 0$ időpillanatban. A jelzőanyag kiinduló időpillanatban vett szélessége infinitezimálisan (végtelenül) kicsi. A megoldást az időbeli változásokra tekintettel, a molekuláris diffúzió folyamatát egyedül figyelembe véve keressük, a jelzőanyag x -irányú szétterjedésnek esetére.

Mivel egy egy dimenziós ($\partial C/\partial y = 0$ és $\partial C/\partial z = 0$) instacionáris (nem-permanens) diffúziós problémánk van, a vezérlő egyenletünk megoldásához szükségünk van két határ és egy kiindulási feltételre.

Határfeltételként tegyük fel, hogy a koncentráció értéke a $\pm\infty$ -ben zérus értéken maradnak.

$$\text{határfeltételek} : C(\pm\infty, t) = 0 \quad (176)$$

Igaz ez a feltétel, hiszen nem lehetséges, hogy bármelyik nyomjelző molekula elérje majd a végtelent (definíció szerint ugyanis a végtelen nem elérhető).

A kiindulási feltétel az, hogy a nyomjelző anyagot a keresztmetszvényben egysegesen elosztatva juttatják be egy végtelen kicsiny x -irányban értelmezett szélességben. Azért, hogy le tudjunk írni egy ilyen kiindulási feltételt, segítségül kell hívnunk az ún. Dirac-delta függvényt ($\delta(x)$). A kiindulási feltételünk így a következő alakot ölti.

$$\text{kiindulási feltétel} : C(x, 0) = (M/A) \cdot \delta(x) \quad (177)$$

ahol, a $\delta(x)$ mindenhol zérus értékű, kivéve az $x = 0$ pontban, ahol végtelen nagyságú, de úgy hogy az integrálja ebben a pontban $-\infty$ -től $+\infty$ -ig 1-et ad. Előbbiek alapján az összes bejuttatott anyagmennyiség a következő egyenlettel adható meg:

$$\begin{aligned} M &= \int_V C(x, t) dV \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^r \left(\frac{M}{A}\right) \cdot \delta(x) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot dx \\ &= M \cdot QED \end{aligned} \quad (178)$$

A továbbiakban, hogy használhassuk a dimenzió analízist meg kell vizsgálnunk minden megoldást befolyásoló paramétert. A 7. táblázat összegzi azokat a függő és független változókat dimenzióikkal, melyek a megoldásra váró egy dimenziós, diffúziós problémánknál megjelennek.

	Változó	Dimenzió
Függő változó	C	ML^{-3}
Független változó	M/A	ML^{-2}
	D	L^2T^{-1}
	x	L
	t	T

7. táblázat. Az egy dimenziós csőben lejátszódó diffúziót befolyásoló változók és azok dimenziói

A táblázat szerint 5 fizikai mennyiségünk ($n = 5$ változónk) van és 3 dimenzió (r = 3 fizikai alaplmenységünk), ezek alapján a következő két dimenziótlan csoportot képezhetjük.

$$\pi_1 = \frac{C}{M/(A \cdot \sqrt{D \cdot t})} \quad (179)$$

$$\pi_2 = \frac{x}{\sqrt{D \cdot t}} \quad (180)$$

A dimenzió analízis segítségével a $\pi_1 = f(\pi_2)$ függvényt kell meghatározunk, amely alapján a C -t kifejezhetjük.

$$C = \frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{D \cdot t}}\right) \quad (181)$$

ahol, az f egy még ismeretlen függvény π_2 argumentummal. Az előző egyenletet hasonlósági megoldásnak hívják, mert C -nek hasonló alakja van x -ben minden t időre. A következő feladatunk, hogy meghatározzuk az f függvény alakját.

Az f függvényt alapvetően kétféle úton találhatjuk meg.

- Az első esetben kísérleteket kell végrehajtanunk és a kapott π_1 és π_2 adatokat koordinátapárként használva a leginkább simuló görbe illesztésével juthatunk el az f függvényhez.
- A második lehetőség, hogy az előző egyenletet egy differenciálegyenlet megoldásaként használjuk fel és az f függvényt analitikus megoldás alapján határozzuk meg.

Ezt az utóbbi utat követve és a hasonlósági megoldást alkalmazva, az eredeti parciális differenciál egyenletet (PDE) egy közönséges (ordinary) differenciál egyenletté (ODE) alakítjuk át, ami tulajdonképpen mindegyik parciális differenciálegyenlet megoldási módszer célja.

A hasonlósági megoldás valójában csak egy koordináta transzformáció. Meg kell hívnunk egy új hasonlósági változót az $\eta = x/\sqrt{D \cdot t}$ -t. Ahhoz, hogy a fenti egyenletet be tudjuk helyettesíteni a diffúziós egyenletbe, szükségünk van még az η (éta) két deriváltjára.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \quad (182)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{Dt}} \quad (183)$$

Elsőként használjuk a lánc szabályt, a $\frac{\partial C}{\partial t}$ számításához.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot f(\eta) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \right] \cdot f(\eta) + \frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{t} \cdot f(\eta) + \frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \left(-\frac{\eta}{2t}\right) \\ &= -\frac{M}{2 \cdot A \cdot t \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot \left(f + \eta \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \end{aligned} \quad (184)$$

Ugyancsak a lánc szabályt használjuk, a $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ számításához.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot f(\eta) \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] \\ &= \frac{M}{A \cdot D \cdot t \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (185)$$

Az utóbbi két összefüggést ($\frac{\partial C}{\partial t}$ és $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ -re vonatkozó) a diffúziós egyenletbe behelyettesítve, egy közönséges differenciálegyenletet kapunk η -ra.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(f + \eta \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = 0 \quad (186)$$

Hogy meg tudjuk oldani az előző egyenletet, a határfeltételeket és a kiindulási feltételt át kell alakítanunk az f függvénynek megfelelően.

Az η -t behelyettesítve a határfeltételekbe a következő adódik.

régi határfeltételek: $C(\pm\infty, t) = 0$

$$\frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{D \cdot t}}\right)_{(x=\pm\infty)} = 0$$

új határfeltételek $f(\pm\infty) = 0$

A kiindulási feltétellel hasonlóképpen eljárva, η behelyettesítésével a következőhöz jutunk.

régi kiindulási feltétel: $C(x, 0) = \frac{M}{A} \cdot \delta(x)$

$$\frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{D \cdot t}}\right)_{(t=0)} = \frac{M}{A} \cdot \delta(x)$$

átrendezve a fenti egyenletet

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{D \cdot t}}\right)_{(t=0)} = \sqrt{D \cdot t} \cdot \delta(x)_{(t=0)}$$

Az egyenlet bal oldala $+\infty$ -t ad ha $x > 0$ és $-\infty$ -t ha $x < 0$. A jobb oldal mindig zérus, hiszen a $\sqrt{D \cdot t}$ tag mindig zérust ad $t = 0$ -ra. Az előbbieket szerint a kiindulási feltétel a következőre redukálódik.

új "kiindulási" feltétel $f(\pm\infty) = 0$

Ezek szerint az eredeti parciális differenciál egyenletünk három feltétele (két határ és egy kiindulási feltétel) az f -re felírt közönséges differenciál egyenlet esetében két határfeltételre redukálódik.

Egy másik kényszerként lépbe az M tömeg fix értéken tartása, a tömegmegmaradási egyenlet szerint ($M = \int_V C(x, t) dV$). A $dx = d\eta \cdot \sqrt{D} \cdot t$ tagot behelyettesítve az tömegmegmaradási egyenletbe egyszerűsítések után kapjuk.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta = 1 \quad (187)$$

A **186** egyenlet megoldása igényel egy kapcsolt integrálást. Először át kell rendeznünk az egyenletet a következő azonosságot felhasználva.

$$\frac{d(f \cdot \eta)}{d\eta} = f + \eta \cdot \frac{df}{d\eta} \quad (188)$$

Az előbbi **186**-re alkalmazva adódik.

$$\frac{d}{d\eta} \left[\frac{df}{d\eta} + \frac{1}{2} \cdot f \cdot \eta \right] = 0 \quad (189)$$

Az előbbi kifejezést egyszer integrálva kapjuk:

$$\frac{df}{d\eta} + \frac{1}{2} \cdot f \cdot \eta = C_0 \quad (190)$$

Látható, hogy $C_0 = 0$ -át szükséges választani a határfeltételek kielégítéséhez. Válasszunk tehát $C_0 = 0$ -át és értékelve a megoldást, azt kapjuk, hogy az egyenletünk így megfelel a határfeltételeknek (ld. a részletesebb levezetést [Socolofsky and Jirka, 2005] Appendix A) vagyis $f(\pm\infty) = 0$.

$C_0 = 0$ esetre homogén közönséges differenciálegyenlethez jutunk, amelynek a megoldása könnyen megtalálható. Az előző egyenlet bal oldalának második tagját átrendezve kapjuk.

$$\frac{df}{d\eta} = -\frac{1}{2} \cdot f \cdot \eta \quad (191)$$

Mivel szeparálható differenciálegyenletről van szó, az összetartozó f és η tagokat azonos oldalra rendezve adódik.

$$\frac{df}{f} = -\frac{1}{2} \cdot \eta \cdot d\eta \quad (192)$$

Mindkét oldalt integrálva kapjuk.

$$\ln(f) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^2}{2} + \ln(C_1) \quad (193)$$

Átrendezve és mindkét oldalt exponenciális hatványra emelve adódik.

$$f = C_1 \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \quad (194)$$

Ahhoz, hogy C_1 -et megtaláljuk, használnunk kell a korábban megadott $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta = 1$ feltételünket. Ez azért szükséges, mivel bevezetünk egy M paramétert és azt

szeretnénk, ha a koncentráció görbe alatti integrál visszaadná nekünk az összes bejuttatott tömegünket. Ezt a segédfeltételt $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta = 1\right)$ felhasználva f -re a következő adódik.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_1 \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta = 1 \quad (195)$$

Az integrál megoldásához, integrál táblázatban található azonosságot kellene felhasználnunk, ezért még egy transzformációt kell eszközölnünk a változóknál, hogy az $\frac{1}{4}$ -et eltávolítsuk az exponenciális függvény kitevőjéből. Így bevezetjük a ζ (zéta) változót, amely η -val a következőképpen függ össze.

$$\zeta^2 = \frac{1}{2^2} \cdot \eta^2 \quad (196)$$

$$2 \cdot d\zeta = d\eta \quad (197)$$

A $\eta \sim \zeta$ koordináta-transzformációt és C_1 -re megoldva a következőt kapjuk.

$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta} \quad (198)$$

Az integrál táblázatban a megfelelő azonosságot megkeresve, $C_1 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi}}$. Ezt az azonosságot **194**-be visszahelyettesítve kapjuk.

$$f(\eta) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \quad (199)$$

Az f függvényt a korábban kapott hasonlósági megoldásba (181) helyettesítve és az $\eta = x/\sqrt{D} \cdot t$ transzformációt alkalmazva a C -koncentrációra adódik.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (200)$$

Az előbbi összefüggés a környezetben lejátszódó transzportfolyamatok egyik klasszikus egyenlete, amelyet ezen tananyagban számos helyen fogunk használni. Az egyenlet általánosítása három dimenzióra t a következő.

$$C(x, t) = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D_x \cdot D_y \cdot D_z \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D_x \cdot t} - \frac{y^2}{4 \cdot D_y \cdot t} - \frac{z^2}{4 \cdot D_z \cdot t}\right) \quad (201)$$

A megoldáshoz a változók szeparálásának módszerével juthatunk [Fischer et al., 1979].

21.1. A maximum koncentráció meghatározása

A koncentrációra vonatkozó 201. egyenlettel megadott pillanatszerű és pontszerű szennyezés esetét vizsgálva keressük meg a maximális koncentráció helyét.

A klasszikus megközelítés egy függvény maximumának megkereséséhez, hogy a derivált függvény zérushelyeit keressük. Sok koncentráció eloszlás esetében egyszerűbb azonban, ha alaposan szemrevételezzük az egyenlet funkcionális formáját. A pillanatszerű-pontszerű szennyezés formája a következő.

$$C(x, t) = C_1(t) \cdot \exp(-|f(x, t)|) \quad (202)$$

A C_1 ún. amplifikációs (erősítő) faktor független a helytől. Az exponenciális tagnak negatív kitevője van, ami azt jelenti, hogy a maximum akkor jelentkezik, ha az exponenciális kitevőben zérus van. Innen a maximum koncentráció helye adódik.

$$C_{max}(t) = C_1(t) \quad (203)$$

A koncentrációra vonatkozó megoldásra alkalmazva a kapott eredményt.

$$C_{max}(t) = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D_x \cdot D_y \cdot D_z \cdot t}} \quad (204)$$

A maximális koncentráció, abban a pontban jelentkezik ahol az exponenciális tag zérus, ez pedig az előbbi esetben a következő: $x_{(C_{max})} = (0, 0, 0)$.

21.2. A hasonlósági megoldás interpretációja

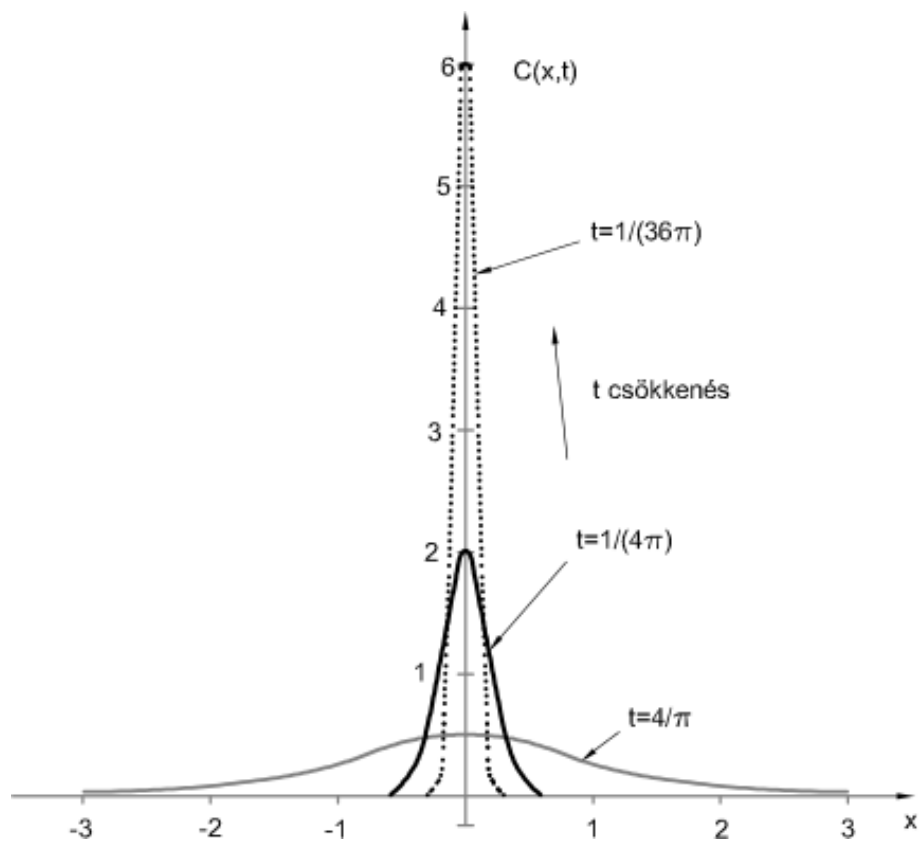
A $C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}\right)$ egyenlet ábrázolása (33. ábra) egy $M = 1$ és $D = 1/4$ esetre azt mutatja, hogy a kezdeti elméletileg egy pontban tömörülő anyag hogyan oszlik el a térben az idő függvényében, ill. hogy megfordítva a folyamatokat a Gauss-féle eloszlás milyen gyorsan redukálódik a Dirac-delta függvényre.

Ha az egy dimenziós megoldást, dimenziómentés térben ábrázolva összehasonlítjuk a Gauss-féle normális eloszlás sűrűségfüggvényével kijelenthetjük, hogy az egyenlet ábrázolásával a Gauss-féle haraggörbét kapjuk σ -szórással, ahol a szórásnégyzet a következő.

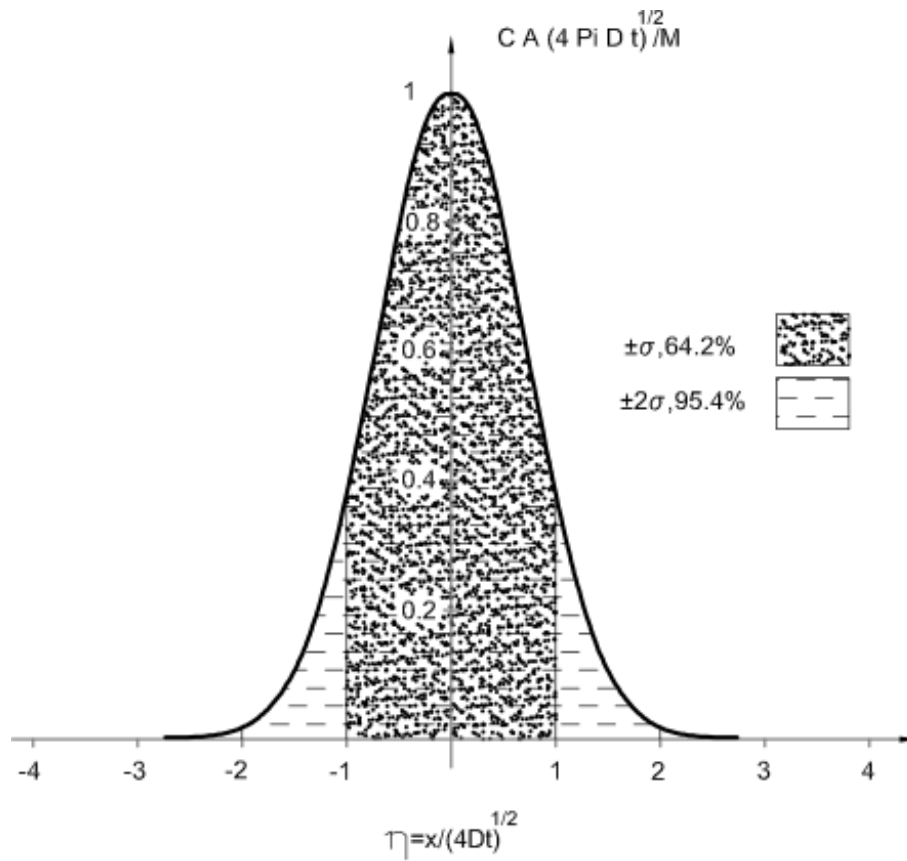
$$\sigma^2 = 2 \cdot D \cdot t \quad (205)$$

Az ön hasonlóság koncepciója az előbbieken alapján most szintén evidensé válik: a koncentráció profil alakja mindig Gauss-i. Dimenziómentes térben ábrázolva az összes profil egy egyszerű alap profilra alakul vissza, így a profilok minden $t > 0$ időre a 34. ábra szerinti alakot követik.

A Gauss-féle normális eloszlást arra is tudjuk használni, hogy előrejelezzük a jelzőanyag (vagy szennyezőanyag) mennyiségét egy bizonyos régióban. Az 34. ábra tanulmányozva szembevetünk, hogy a jelzőanyag zöme a horizontális



33. ábra. A Gauss-féle normális eloszlás redukálódása a kezdetben egy pontban tömörülő jelzőanyag tömeg „spike” irányába ($M=1$ és $D=1/4$ értékek mellett) [Fischer et al., 1979, nyomán]



34. ábra. A pillanatszerű, pontszerű forrás egy dimenziós diffúziójának önazonos megoldása végtelen domainban dimenziómentes formában ábrázolva [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]

tengelyen -2 és $+2$ értékek között jelenik meg. A Gaussi normál eloszlásra vonatkozó táblázatok (bármely statisztika könyvben rendelkezésre áll) alapján az előbbi megállapításunkat számszerűvé is tehetjük. Pl. $\pm\sigma$ tartományban a jelzőanyag 64,2%-a található meg, míg a $\pm 2\sigma$ tartományban már az adott anyag 95,4%-át lelhetjük fel. A mérnöki ököl szabály tehát a következő, egy diffúziós folyamatokkal szétterjedő vizsgált jelzőanyag (szennyezőanyag) jellemzően egy 4σ szélességű régióban oszlik meg, amely régió széle a koncentráció maximumtól $\pm 2\sigma$ távolságra található.

21.3. A koncentráció eloszlás alakja és az önazonossága

Az egy dimenziós pillanatszerű pontszerű forrás megoldása alapján látható, hogy a C/C_{max} arány egy egyszerű α (definiálva $x = \alpha \cdot \sigma$) paraméter függvényében megadható. Nézzük meg, hogy az előbbi észrevétel segítségével hogyan számíthatjuk ki a diffúziós tényezőt a koncentráció profil adatokból.

A korábbiakból tudjuk, hogy a maximum koncentráció egy egydimenziós pillanatszerű, pontszerű forrás esetére a következőképpen adható meg $C_{max} = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}}$. A $C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}\right)$ egyenlet átrendezve ezek alapján a következő adódik.

$$\frac{C(x, t)}{C_{(max, t)}} = \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (206)$$

Az előbbi egyenletbe behelyettesítve $\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}$ és az $x = \alpha \cdot \sigma$ összefüggéseket kapjuk.

$$\frac{C}{C_{max}} = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (207)$$

Ebben az egyenletben csak az α paraméter szükséges a C számításához, amely a szórás alapján történik a tömegközépponttól (legnagyobb koncentráció helye) való távolságot így jellemezve. Az előbbi kifejezés nagyon tisztán illusztrálja az önazonlóságot: a C/C_{max} arány mindig ugyanazt az értéket veszi fel egy adott $\alpha \cdot \sigma$ -val jellemzett helyen, függetlenül az időtől (t), a beadagolt mennyiségtől (M), vagy a diffúziós tényező (D) értékétől.

Az előbbi összefüggés nagyon hasznos a diffúziós tényező számításához. Nagyon gyakori, hogy nem tudjuk pontosan a beadagolt M értéket (vagy pont ezt akarjuk visszaszámítani), azonban mindig van lehetőségünk normalizálni az egy adott időben mért koncentrációprofil (a 33. ábrán látható különböző időpillanatokban) értékét a $C_{max}(t)$ felhasználásával. A normalizálást követően válasszunk egy α értéket, mondjuk 1,0-át. Az előző egyenlet alapján kiszámítható, hogy $aC/C_{max} = \exp(-1/2) = 0,61$ az $x = 1 \cdot \sigma$ helyen. A következő lépés, hogy a kimért koncentrációprofil alapján meghatározzuk azt a helyet, ahol $C/C_{max} = 0,61$ és ezzel az x koordinátával meghatározzuk σ -t. Végül felhasználjuk az $\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}$ összefüggést, valamint at ismert értékét, és ezek alapján becsüljük a D diszperziós tényezőt.

rész VIII

Advektív diffúziós egyenlet

Bevezetés

A természetben a transzportfolyamatok az advektációs és diffúziós folyamatok kombinációján keresztül valósulnak meg. Ha a diffúziós egyenletünket kiegészítjük az advektációs taggal, akkor az ún. advektív diffúziós egyenletet kapjuk. Az advektív diffúziós egyenlet, mint parciális differenciál egyenlet különböző jellemző geometriai és a szennyezőanyagra vonatkozó határ és kiindulási feltétel mellett használható klasszikus mérnöki problémák kezelésére.

22. Az advektív diffúziós egyenlet levezetése

Az advektáció koncepcionális jellemzése céljából vegyünk a folyadék csőbeni, 1D áramlásával kapcsolatos példát. A csőben az áramlás hatása nélkül, a beinjektált nyomjelző mindkét irányban egyenlő mértékben terjed, Gauss-féle eloszlást leírva az időben. Ha megnyitunk egy szelepet és engedjük, hogy a víz a csőben áramoljon, azt várjuk, hogy a nyomjelző anyagfelhő tömegközéppontja az átlagsebességgel mozogjon a csőben. Ha a koordináta-rendszerünket az átlagsebességgel mozgatjuk és viszkozitás-mentes állapotokat feltételünk, akkor a jelenség kinézete teljesen hasonló lesz az előző fejezetben tapasztaltnak. Az új mozgó koordináta-rendszer térbeli koordinátája (η) a következőképpen jellemezhető:

$$\eta = x - (x_0 + v \cdot t) \quad (208)$$

ahol, x_0 , a nyomjelző befecskendezési helye, v , az áramlás átlagsebessége, és $v \cdot t$ az a felhő középpontja által megtett távolság a t idő alatt.

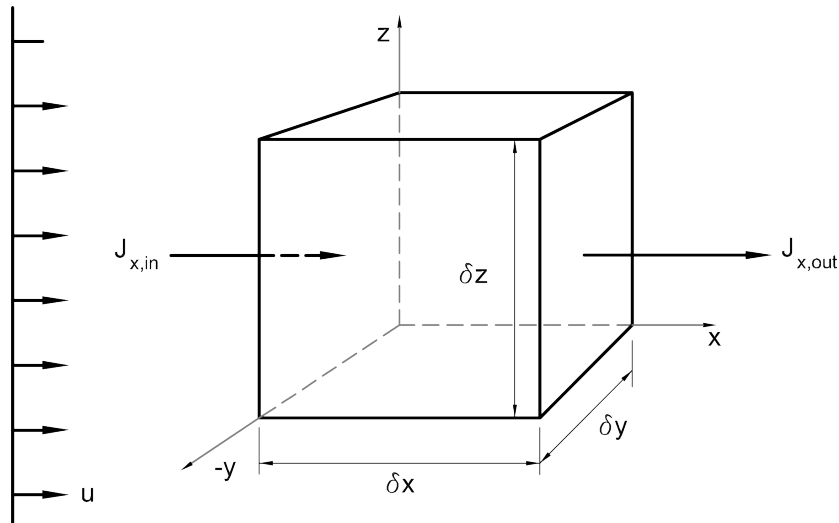
Ha az η -t behelyettesítjük az x helyébe a diffúziós egyenlet korábbi stagnáló környezeti feltételek melletti megoldásába, akkor a következőt kapjuk.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(\frac{-(x - (x_0 + v \cdot t))^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (209)$$

A megoldásunk tesztelése céljából szükségünk van az advektív diffúziós egyenletünk megoldására és azt a megoldást hasonlíthatjuk majd a most kapotthoz.

22.1. Az alapegyenlet általános alakja

Az advektív diffúziós egyenlet levezetése a szuperpozíció elvén alapszik: az advektáció és diffúzió összeadhatóak mivel lineárisan függetlenek egymástól. Honnan tudhatjuk, hogy az advektáció és diffúzió lineárisan független folyamatok? Az egyetlen út, ahogyan függhetnek egymástól, ha az egyik folyamat visszacsatol a másikhoz. Az előző fejezet alapján látható, hogy a diffúzió egy molekuláris mozgásnak megfelelő véletlen folyamat. A diffúziós mozgással, minden egyes



35. ábra. Átfolyással rendelkező kontroll térfogat sematikus ábrája [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]

molekula δt idő alatt vagy egy lépést jobbra vagy egy lépést balra tesz meg ($\pm \delta t$). Az advekciónál minden egyes molekula $v \cdot \delta t$ távolságra elmozdul folyásirányban. Ezek a folyamatok tisztán additívak és függetlenek. Az átfolyás nem okoz zavart annak a valószínűségében, hogy a molekula a diffúziós lépést jobbra vagy balra fogja megtenni, inkább csak hozzáad valamit az adott lépéshez. A molekula nettó mozgása a következő azonossággal jellemezhető.

$$v \cdot \delta t \pm \delta x \quad (210)$$

Az x irányban értelmezett fluxus (J_x) beleértve az advektív transzportot és a Fick-féle diffúziót megadható.

$$J_x = v \cdot C + q_x = v \cdot C - D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \quad (211)$$

Feladatként hagyjuk az olvasóra, hogy ellenőrizze vajon az $v \cdot C$ a megfelelő forma-e az advekciónál leírására (hasonlítsuk össze az $v \cdot C$ és a q_x dimenzióját).

Amint az előző fejezetben is tettük kombináljuk egymással a fluxusra vonatkozó összefüggést és az anyagmegmaradás törvényét létrehozva így az advektív diffúziós egyenletet. Vegyünk egy kontroll térfogatot (35. ábra), ahogy korábban is, de most legyen egy keresztirányú sebességünk is, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$.

Az egyenlet levezetése során ugyancsak Fischer et al. [1979] eljárását fogjuk alkalmazni. Az anyagmegmaradás törvényét alkalmazva a kontroll térfogaton keresztülráamló nettó (eredő) fluxus a következőképpen számítható.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \sum m_{in} - \sum m_{out} \quad (212)$$

Az x irányban megadva az előbbi összefüggés a következő.

$$\delta m_x = \left(v \cdot C - D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 \cdot \partial y \partial z - \left(v \cdot C - D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 \cdot \partial y \partial z \quad (213)$$

Amint korábban is, használjuk a Taylor-féle sorba-fejtést a lineáris tagig és kombináljuk a két fluxust. Először az advекciós tagra.

$$v \cdot C_1 - v \cdot C_2 = v \cdot C_1 - \left(v \cdot C_1 + \left(\frac{\partial (vC)}{\partial x} \right)_1 \cdot \delta x \right) = - \frac{\partial (vC)}{\partial x} \cdot \delta x \quad (214)$$

Később a diffúziós tagra.

$$- \left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 + \left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 = - \left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 + \left(\left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 \cdot \delta x \right) = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \cdot \delta x \quad (215)$$

Az előbbi tagokat az x irányú anyagáram egyenletébe beírva.

$$\delta m_x = \frac{-\partial (vC)}{\partial x} \cdot \delta x \partial y \partial z + D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \cdot \delta x \partial y \partial z \quad (216)$$

Az y és z irányú anyagáramok hasonlóak, de v_y és v_z sebességkomponensek segítségével írhatók fel.

$$\delta m_y = \frac{-\partial (vC)}{\partial y} \cdot \partial y \delta x \partial z + D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \cdot \partial y \delta x \partial z \quad (217)$$

$$\delta m_z = \frac{-\partial (vC)}{\partial z} \cdot \partial z \delta x \partial y + D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \cdot \partial z \delta x \partial y \quad (218)$$

A $\frac{\partial M}{\partial t} = \sum m_{in} - \sum m_{out}$ egyenletbe behelyettesítve az előbbieket és M helyébe a $C \cdot \delta x \partial y \partial z$ értéket beírva és az egyszerűsítéseket elvégezve adódik.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v} \cdot C) = D \cdot \nabla^2 \cdot C \quad (219)$$

Einstein-i jelöléseket alkalmazva.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (v_i C)}{\partial x_i} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad (220)$$

Az előbbi egyenlet a kívánt advекtív diffúziós egyenlet (AD). A tananyag későbbi részében gyakran hivatkozunk majd erre az összefüggésre.

Érdeemes megjegyezni, hogy az egyenlet implicit módon feltételezi a D konstans voltát, amennyiben azonban változó D -ről beszélünk az egyenlet jobb oldali része a következő alakot ölti.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{i,j} \cdot \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) \quad (221)$$

22.2. Pontszerű szennyezés esete, mint egy lehetséges megoldás

Hogy ellenőrizzük vajon az eredeti feltételezésünk helyes volt-e az AD egyenlet megoldásának alakjára vonatkozóan, helyettesítsük a mozgó koordinátarendszerre vonatkozó koordináta-transzformációt az egy dimenziós AD egyenlet, alább megadott alakjába. Egy dimenziós esetben az $\bar{v} = (v, 0, 0)$ és nincs koncentráció gradiens y és z irányokban.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (vC)}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (222)$$

A mozgó rendszerre vonatkozó koordináta-transzformációnk a következő.

$$\eta = x - (x_0 + v \cdot t) \quad (223)$$

$$\tau = t \quad (224)$$

Az előbbi két egyenletet kell behelyettesíteni a $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (vC)}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ -be, majd alkalmazni kell a láncszabályt a következőképpen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + v \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) = \\ D \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (225)$$

A szükséges egyszerűsítéseket $\left(\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -v, \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1, \frac{v}{\partial x} = \frac{1}{\partial t} \right)$ elvégezve az egyenlet a következő formára redukálódik.

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \quad (226)$$

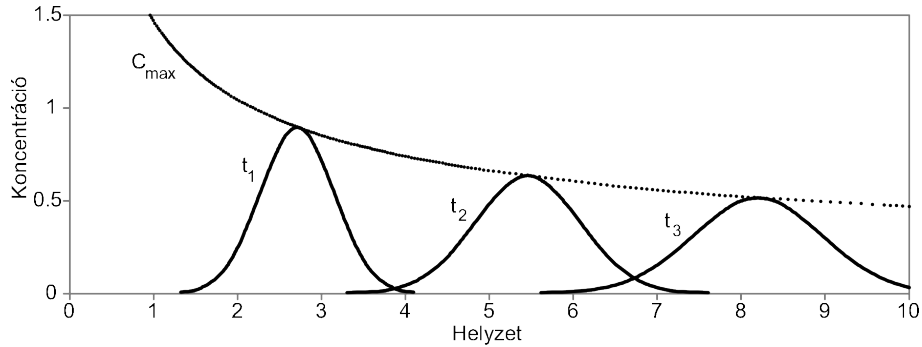
Az előbbi egyenlet pedig azonos az egy dimenziós diffúziós egyenlettel, amelynek megoldása az η és τ koordináták mellett pillanatszerű pontszerű forrást figyelembe véve.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot \tau}} \cdot \exp\left(\frac{-\eta^2}{4 \cdot D \cdot \tau}\right) \quad (227)$$

Visszakonvertálva az x és t koordinátákat az eredetileg feltételezett alakú egyenletet kapjuk.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(\frac{-(x - (x_0 + u \cdot t))^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (228)$$

Tehát az eredeti feltételezésünk a szuperpozíciós megoldásra helyes volt. A következő 36. ábra szemlélteti az AD egyenlet megoldását három különböző egymást követő (t_1, t_2, t_3) időpontban.



36. ábra. Az AD egyenlet egy dimenziós megoldásának sematizált megoldása három időpontra. A pontozott vonal a maximum koncentrációk értékeit mutatja a szennyezőanyag, fő áramlás szerinti mozgásának irányában [Socolofsky and Jirka, 2005]

22.3. Összenyomhatatlan folyadéokra való értelmezés

Összenyomhatatlan folyadék esetében a $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(v_i C)}{\partial x_i} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}$ egyenlet egyszerűsíthető a tömegmegmaradási egyenletnek a környezetben előforduló folyadéokra való alkalmazásánál. Összenyomhatatlan folyadék esetében a sűrűség mindenhol állandó és a tömegmegmaradási egyenlet a kontinuitási egyenletre redukálódik [Lajos, 2008].

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (229)$$

Ha a szorzat deriválási szabálya szerint kifejtjük az AD egyenlet advektív tagját, akkor a következőt írhatjuk.

$$\nabla \cdot (\bar{v} \cdot C) = (\nabla \cdot \bar{v}) \cdot C + \bar{v} \cdot (\nabla \cdot C) \quad (230)$$

A kontinuitási egyenlet ismeretében, a kontinuitási egyenletet alkalmazva a jobb oldali első tagra, $(\nabla \cdot \bar{v}) \cdot C = 0$ adódik. Ezek szerint az összenyomhatatlan folyadéokra az advektív-diffúziós egyenlet a következő formát ölti.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{v} \cdot (\nabla \cdot C) = D \cdot \nabla^2 \cdot C \quad (231)$$

Vagy Einstein-i jelöléseket alkalmazva.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x_i} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad (232)$$

Az advektív-diffúziós egyenletnek ez az előbbi formája az, amit a leggyakrabban fogunk használni a továbbiakban.

22.4. Alkalmazással kapcsolatos szabályok

Álljunk meg egy kicsit az anyag tárgyalásában, hogy néhány észrevételt tegyünk az AD egyenlettel és megoldásaival kapcsolatban.

Elsőként a 36. ábrán látható megoldás egy olyan példát mutat, ahol a diffúziós és advektív transzport körülbelül egyaránt fontos. Ha az áramlás erősebb lett volna (nagyobb \bar{v}), a jelzőanyag-felhőnek kevesebb ideje lett volna, hogy szétterjedjen és minden egyes t_i -re vonatkozóan az ábrán láthatónál keskenyebb alakot vett volna fel. Fordítva, ha a diffúziós lett volna gyorsabb (nagyobb D), a jelzőanyag-felhő jobban szétterjedt volna két különböző t_i időpont között és a koncentrációprofilok jobban átfednének. Az előbbieket alapján látjuk, hogy a diffúzió versus advekció dominancia a t , a D és a v függvénye. Fejezzük ki ezt a tulajdonságot a dimenzió nélküli Peclet-számmal.

$$Pe = \frac{D}{v^2 \cdot t} \quad (233)$$

Egy adott folyásirány szerinti helyre (pl. keresztmetszetre egy vízfolyásnál) a következő adódik $l = v \cdot t$ -t felhasználva.

$$Pe = \frac{D}{v \cdot l} \quad (234)$$

Ha $Pe \gg 1$ akkor a diffúzió a domináns és a felhő gyorsabban terjed szét, mint ahogy folyásirányban lefelé mozog. Ellenben ha $Pe \ll 1$, akkor a folyamat az advekció által vezérelt és a felhő gyorsabban mozog lefelé, mint ahogy szétterjed. Fontos megjegyezni, hogy a Peclet-szám függ attól, hogy milyen a vizsgált térbeli skála kiterjedése. „Nagy” távolságokra és időkre a Peclet-szám kicsi lesz és az advekciós folyamat lesz domináns.

Második szabályként elmondható, hogy a maximum koncentráció csökken áramlási irányban a diffúziós folyamatnak megfelelően. A 36. ábra a jelzőanyag felhők maximum koncentrációit is mutatja, ahogy a felhő mozog áramlási irányban lefelé. Ez a maximumokra vonatkozó burkológörbe akkor kapható meg, ha a $C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(\frac{-(x - (x_0 + v \cdot t))^2}{4 \cdot D \cdot t}\right)$ egyenlet exponenciális tagja éppen 1,0 (vagyis az \exp függvény hatványkitevőjében 0 van). Egy dimenziós esetben a maximum koncentráció csökkenése a következő arányosság szerint jelenik meg.

$$C_{max}(t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (235)$$

Két és háromdimenziós esetben az összefüggés alakja szintén megadható. Két dimenziós formula,

$$C_{max}(t) \propto \frac{1}{t} \quad (236)$$

és három dimenziós eset

$$C_{max}(t) \propto \frac{1}{t \cdot \sqrt{t}} \quad (237)$$

A harmadik figyelemre érdemes dolog, hogy a diffúziós és advekción skálákat gyakran használhatjuk arra, hogy egyszerűsítsük az egyenleteket és közelítéseket alkalmazzunk. Az egyik legfontosabb kérdés mérnöki szempontból, hogy: Egy adott egyenlet illetve közelítés mikor alkalmazható? szennyezőanyag transzport esetében a kérdés általában megválaszolható összehasonlítva a jellemző advekción és diffúziós hossz és időbeli skálákat az adott probléma hossz és időbeli skáláihoz. Advekción esetében (a alsó indexel), diffúzió esetében (d alsó indexel) jelölve a jellemző skálákat a következők írhatóak.

$$l_a = \bar{v} \cdot t, \quad t_a = \frac{l}{\bar{v}} \quad (238)$$

$$l_d = \sqrt{D \cdot t}, \quad t_d = \frac{l^2}{D} \quad (239)$$

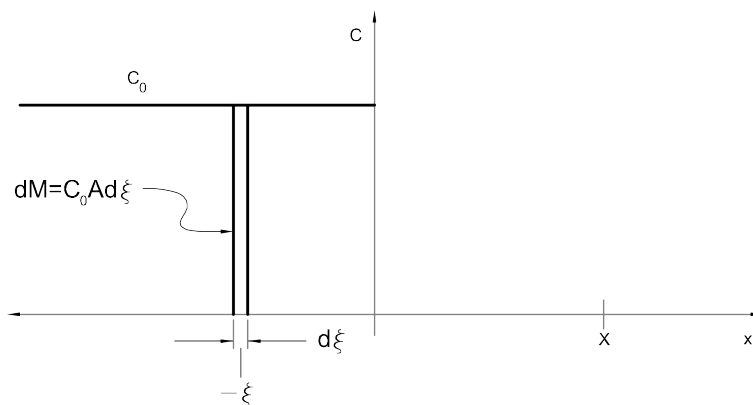
Ezek az előbbi skálák használhatók ökölszabályszerű első becslésként ha ismerjük az illető szennyezőanyag bejutásának helyét és idejét egy alsóbb szelvényben annak eldöntésére, hogy melyik összefüggés lesz érvényben, ill. melyik folyamat az erősebb.

Példaként egy pontforrásból származó anyagkibocsátás egy l hosszúságú régió értelmezett és a kibocsátástól $\pm l/2$ távolságra át nem eresztő határok (víz esetében vízzáró határ) találhatóak. Ebben az esetben az az idő, amíg az adott anyagfélő egyenletesen el nem oszlik a régióban diffúzióval $t_d = \frac{l^2}{8 \cdot D}$. A 8-as szorzó az előbbi kifejezésben abból ered, hogy az egyenletes eloszlás feltételeként azt szabtuk meg, hogy $\pm l/2$ távolságra a koncentráció maximumnak (C_{max}) legalább 97%-a jelenjen meg. Ezeket a karakterisztikus skálákat (amelyek könnyen levezethetők dimenziós analízis segítségével) memorizálni kellene és extenzív módon kellene használni őket a transzport problémák első durva, megközelítésekor.

23. Az advektív diffúziós egyenlet megoldásai

Az előző fejezetben egy pillanatszerű, pontszerű forrás esetében vizsgáltuk a részletes megoldást lépcsőről lépésre stagnáló környezetben. A természetben a kezdeti és a határfeltételek sokban különbözhetnek ettől az előbb említett idealizált esettől. Ebben a részfejezetben néhány technikát ismerünk meg azért, hogy más, sokkal általánosabb esetekben is tudjuk kezelni a helyzetet. Amint az advekción és diffúzió folyamata additív, meg fogjuk mutatni, hogy a szuperpozíció elvét használhatjuk, néhány általános megoldási alapesetből kiindulva és azokból építkezve, komplex geometria és kezdeti feltételek esetében is arra, hogy megoldásokat találjunk.

A fejezetben található megoldások hasonló formában fellelhetőek Fischer et al. [1979] könyvében is. A fejezet végén megtalálhatók egyes analitikus megoldások eredményei. Ezek az eredmények elsősorban a fejezetben bemutatott módszerek segítségével jöttek létre. Az alapeseteket összerakva, a megadott egyenletek a problémák széles tartományában alkalmasak megoldások keresésére.



37. ábra. A kezdeti egyenletes pillanatszerű koncentráció-megoszlás sematikus reprezentációja, a $-\xi$ -ban fekvő dM differenciális elemet ábrázolva [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán].

23.1. Kezdeti ismert egyenletes koncentráció megoszlás esete

Egy jó példája a szuperpozíciós módszer erősségének bemutatására a kezdeti egyenletes térbeli koncentráció-megoszlás esete. Mivel az advekciónak mindig bevitelhető az egyenletbe a mozgó koordináta-rendszer alkalmazásával, ezért az egydimenziós stagnáló közeg esetét vizsgáljuk. A vezérlő alapegyenletünk tehát a következő (az egydimenziós diffúziós egyenlet).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (240)$$

Homogén kezdeti koncentráció-megoszlást feltételezünk az alábbiak szerint definiálva azt.

$$C(x, t_0) = \begin{cases} C_0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 0 & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad (241)$$

ahol, $t_0 = 0$ és C_0 az egységes kiindulási koncentráció, amint azt az 37. ábra is mutatja.

Az $x = \xi < 0$ pontban, az infinitezimális tömeg $dM = C_0 \cdot A \cdot d\xi$, ahol A a keresztmetszeti terület $\delta y \cdot \delta z$. $t > 0$ -ra, a koncentráció bármely x pontban a tömeg diffúziós folyamatainak következtében áll elő minden dM differenciális elemet alapul véve. dC meghatározása, minden dM elemi tömegeből kiindulva a diffúziós egyenlet $\left(\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)$ pillanatszerű, pontszerű forrás esetére adott megoldásból áll elő a következőképpen.

$$dC(x, t) = \frac{dM}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (242)$$

A szuperpozíció elvét alkalmazva, minden dM tömegelem hatását összegezve kapjuk.

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^0 \frac{C_0 \cdot d\xi}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(\frac{-(x - \xi)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (243)$$

Az előbbi egyenlet az előbbi problémánk szuperpozíciós megoldása. Azért hogy az integrált kiszámítsuk, a változókat, ahogy korábban is tettük, meg kell változtatnunk a következőképpen.

$$\zeta = \frac{x - \xi}{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}} \quad (244)$$

$$d\zeta = -\frac{d\xi}{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}} \quad (245)$$

Az új változót ζ -t a $C(x, t) = \int_{-\infty}^0 \frac{C_0 \cdot d\xi}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(\frac{-(x - \xi)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right)$ szuperpozíciós integrál egyenlet megoldásába helyettesítve.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} \exp(-\zeta^2) d\zeta \quad (246)$$

Vegyük figyelembe, hogy az előbbi integrál felső határáként a $\xi = 0$ -a értéket tettük figyelembe a $\zeta = \frac{x - \xi}{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}}$ szerint definiálva. Átrendezve az integrált a következő adódik.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}^{\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\int_0^{\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} \exp(-\zeta^2) d\zeta \right] \quad (247)$$

A kapott két integrál közül az első megoldható analitikusan, integrál táblázat segítségével, a megoldása $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. A második integrál megoldása az úgynevezett hiba függvény (error function), amely a következőképpen definiálható.

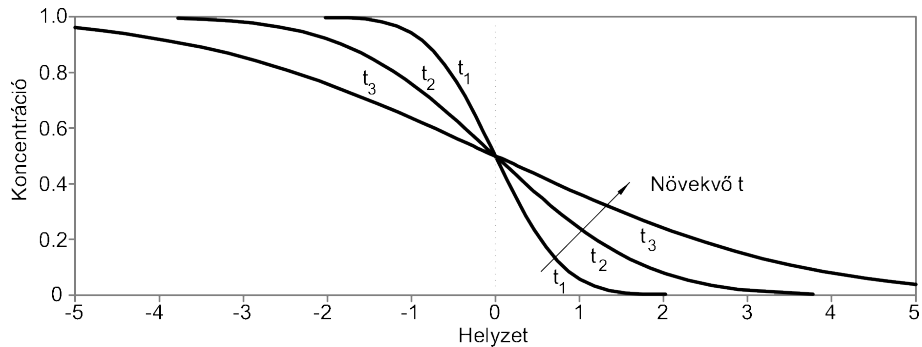
$$\text{erf}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi} \exp(-\zeta^2) d\zeta \quad (248)$$

ahol, $\varphi = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ -vel egyenlő.

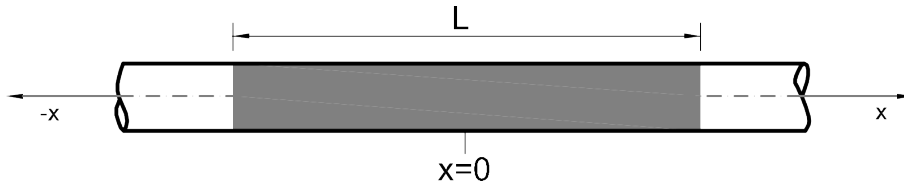
A hiba függvény (error function) megoldása általában megtalálható az integrál táblázatokban, vagy a nagyobb matematikai programokban beépített függvényként. Az előbbieik alapján a fenti egyenlet megoldása a következő.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \cdot \left[1 - \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (249)$$

A38. ábra $C_0 = 1$ esetére növekvő t -re mutatja a kapott függvényalakokat, mint megoldásokat.



38. ábra. A féltérben egyenletes ($x < 0$) kezdeti koncentráció-megoszlás (lépcsőfüggvény) pillanatszerű problémájának megoldása $C_0 = 1$ kiindulási koncentráció esetében [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]



39. ábra. Az intravénás injekció befecskendezési utáni időpillanat leegyszerűsített, sematikus ábrázolása [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán].

23.1.1. Az intravénás injekció, mint a diffúziós folyamatok egy példája

Vegyünk a következő esetet. egy orvos egy allergiától szenvedő beteg vénájába fecskendez egy allergia elleni gyógyszert. A szer bejuttatása T idő alatt történik meg. A vénákban a vér átlagos sebessége v . Így leegyszerűsítve a kiindulási helyzetet a vér az alapállapotban egy $L = v \cdot T$ távolságú régióban tartalmazza a beinjektált kemikáliát. A kemikália kiindulási koncentrációja C_0 , a vérben az előbbi régióban. A kiindulási helyzetet a 39. ábra mutatja be.

Kérdés, hogy milyen a kemikália eloszlása a vénákban, amikor az 75 s múlva eléri a szívet?

A példára alkalmazható az előző fejezetben megismert kezdeti ismert egyenletes koncentráció megoszlás esete. Vegyük fel az $x = 0$ pontot a kezdeti feltételezetten egyenletes koncentráció megoszlás közepén és engedjük, hogy a koordináta-rendszer az vér átlagos v sebességével mozogjon. Az előbbieket miatt a diffúziós egyenletet kell megoldanunk a következő kiindulási feltételek mellett.

$$C(x, t_0) = \begin{cases} C_0 & \text{ha } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{minden más helyen} \end{cases} \quad (250)$$

ahol $t_0 = 0$ a $T/2$ időpillanatban.

Kövessük az előző fejezetben alkalmazott szuperpozíciós megoldást, amely szerint a következő egyenlet adódik.

$$C(x, t) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{C_0 \cdot d\xi}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (251)$$

Az előbbi egyenlet a következőképpen bővíthető.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \left[\int_{-\infty}^{L/2} \exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) d\xi - \int_{-\infty}^{-L/2} \exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) d\xi \right] \quad (252)$$

A korábbi ξ - ζ szerinti koordináta-transzformációt behelyettesítve és az átalakításokat, egyszerűsítéseket elvégezve a következő megoldást kapjuk.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \cdot \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-L/2}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (253)$$

Behelyettesítve a $t = 75$ s-ot az egyenlet megadja a koncentráció eloszlását abban az időpillanatban, amikor az anyagfelhő eléri a szívet [Socolofsky and Jirka, 2005].

23.2. Ismert állandó koncentráció a peremen

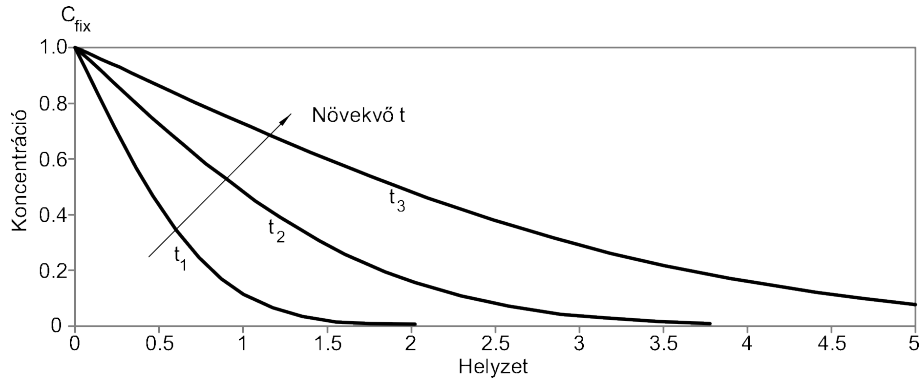
Egy másik tipikus példa, amikor egy fix koncentráció érték adott egy x_1 pontban. Ez lehet például egy oxigén koncentráció érték a levegő-víz határfelületen. A folyamatot vezérlő paraméterek, amelyek a megoldáshoz szükségesek, a fix koncentráció C_0 , a diffúziós tényező D , a koordináták $(x - x_0)$ és a t idő. Ismét hanyagoljuk el az advekcio hatását, mert ez a változó transzformálásán keresztül bevezethető az egyenletbe, az x_0 értékét pedig vegyük fel zérusnak ($x_0 = 0$) az egyszerűsítés céljából. Amint a pontszerű forrás esetében tettük használjuk a hasonlóságon alapuló megoldást, egy vezérlő új változó létrehozása céljából, hogy a megoldás formáját megkaphassuk a következőképpen.

$$C(x, t) = C_0 \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \quad (254)$$

Ha definiáljuk a hasonlósági változót $\eta = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$ és ezt behelyettesítjük az egy dimenziós diffúziós egyenletbe, akkor amint vártuk egy közönséges differenciál egyenletet kapunk f és η szerint.

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{df}{d\eta} = 0 \quad (255)$$

A határfeltételek az egyenlet esetében a következők $f(0) = 1$ és $f(\infty) = 0$. Sajnos azonban a kapott közönséges differenciál egyenlet nem lineáris. Egy gyors pillantás azonban a 38. ábrára lehet, hogy segít nekünk a megoldás megtalálásában. Az ábra szerint az $x = 0$ pontban a fix koncentráció értéke $C_0/2$. Ha



40. ábra. A $C(x, t) = C_0 \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$ egyenlet $x = 0$ pontban $C_0 = 1$ fix koncentrációjú peremmel megadott megoldása [Socolofsky and Jirka, 2005].

a $C(x, t) = \frac{C_0}{2} \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$ egyenletbe C_0 -át helyettesítünk, mint vezérlő tényezőt (a $C_0/2$ helyett) akkor talán egy lehetséges megoldást kapunk. Behelyettesítve a fenti differenciál egyenletbe a határfeltételek meg fogják mutatni, hogy a kapott megoldás korrekt-e. Az előbbieket szerint a következő egyenlettel adható meg a megoldás, amelyet keresünk.

$$C(x, t) = C_0 \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (256)$$

A határfeltételekkel történő ellenőrzés eredménye a következő,

$$C(x, t_0) = \begin{cases} C_0 & \text{ha } x = 0 \\ 0 & \text{ha } x = \infty \end{cases} \quad (257)$$

amely eredmény megfelel az előzetes várakozásoknak.

A 40. ábra mutatja be a $C_0 = 1$ -re vonatkozó megoldást. Fontos megjegyezni, hogy ez a megoldás csak az $x > x_0$ tartományban érvényes.

23.3. Ismert fix, lezárt (no flow) perem

Az utolsó eset, amit részletesen vizsgálunk ebben a fejezetben a lezárt (un. no flow) perem. No-flux határfeltétel megjelenésére számíthatunk minden olyan felületen, amely az adott, vizsgált (szennyező) anyag számára nem átjárható. Hidrológiai vizsgálatoknál ilyen perem például a vízgűjtő határa, egy folyóban a szennyezőanyag szétterjedésének vizsgálatánál ilyen perem a folyó partja (y irányban) és medre (z irányban). A kérdéskör tárgyalásánál ebben a fejezetben feltételezzük, hogy a vizsgált határfelületen nem játszódnak le az adott anyagra vonatkozó kémiai reakciók és a felület teljesen átjárhatatlan az adott anyag szempontjából.

Amint előrelátható az első feladatunk annak a módnak a megtalálása, hogyan specifikálhatunk egy no-flux peremet, mint határfeltételt a vezérlő differenciál egyenletünkben. Az előző probléma a Fick-féle törvény alkalmazásával viszonylag egyszerűen megoldható. Mivel a no-flux perem jelentése, hogy a peremen keresztüli fluxus zérus, $q = 0$ (D értékét konstansnak véve), a határfeltételek a következőképpen írhatók.

$$\bar{q} |_{S_b} \cdot \bar{n} = 0 \quad (258)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z} \right) |_{S_b} \cdot \bar{n} = 0 \quad (259)$$

ahol, S_b a határfelszint leíró függvény (i.e. $S_b = f(x, y)$) és az \bar{n} a no-flux határ normál egységvektora.

Egy dimenziós esetben a no-flux határfeltétel a következőre redukálódik.

$$\frac{\partial C}{\partial x} |_{x_b} \cdot \bar{n} = 0 \quad (260)$$

ahol, x_b , a határ elhelyezkedését adja meg.

Az előbbi egyenletekkel kifejezett tulajdonság nagyon hasznos a koncentráció mérések interpretálásánál, hogy eldöntsük egy adott határ esetében, ami lehet pl. egy tó aljzata, hogy az a határ áteresztő vagy nem.

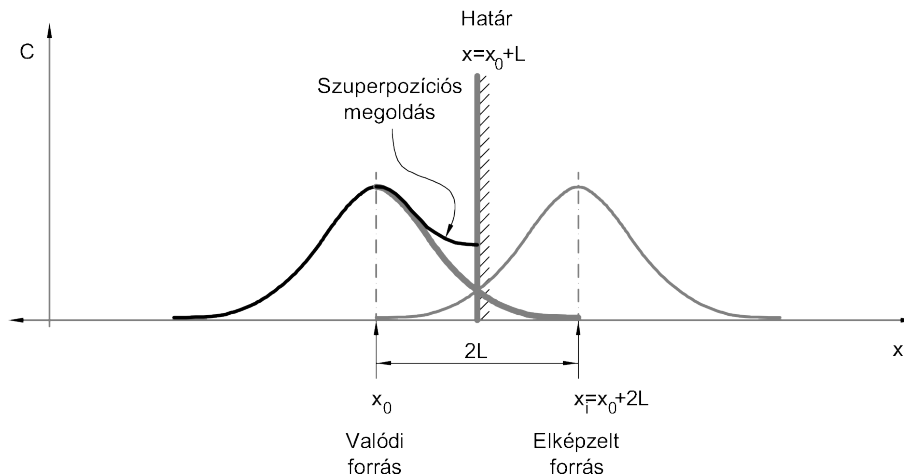
Hogy a határral kapcsolatos problematikát tovább elemezzük, és megoldást találhassunk, vegyünk egy pillanatszerű, pontszerű forrást az x_0 -ban elhelyezve, egy no-flux peremmel L távolságra jobbra, amint az a41. ábrán látható.

Az eredeti (perem nélküli) standard megoldásunk megengedi az adott anyag-tömegnek, hogy a no-flux peremen túlra diffundáljon (amint azt az ábra szaggatott vonallal mutatja is). Azért hogy az elveszett anyagmennyiséget visszahelyezzük, egy „image” forrást helyezünk el a határtól jobbra (szintén L távolságra). Ennek az „image” forrásnak a hatására ugyanaz az anyagmennyiség fog visszajutni a határ bal oldalára, mint amit az eredeti forrásunk a jobb oldalra juttatott. A szuperpozíció elvét alkalmazva a két koncentráció-megoszlásra (összeadva azokat) a határtól balra, megkapjuk a határoló fal leírni kívánt hatását. Amennyiben az előbbieket szerint az „image” forrást a no-flux határtól jobbra L távolságra helyeztük el, a megoldást a következő egyenlet adja.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \left(\exp \left(\frac{-(x - x_0)^2}{4 \cdot D \cdot t} \right) + \exp \left(\frac{-(x - x_i)^2}{4 \cdot D \cdot t} \right) \right) \quad (261)$$

ahol, $x_i = x_0 + 2 \cdot L$. Természetesen az előbbieken megadott egyenlet csak a határtól balra érvényes. A határtól jobbra, a koncentráció mindenhol zérus.

Az „image” forrás alkalmazásának módszere meg komplikáltabbá válik, amikor több határt veszünk figyelembe. A nehézség abban áll, hogy az jobb oldali „image” forrásból diffundáló anyag-tömeg végül eléri a bal oldali határt és ott egy újabb „image” forrás elhelyezését indukálja. Általában amikor két határunk van,



41. ábra. A no-flux perem hatásának ábrázolása egy pillanatszerű pontszerű szennyezőforrás esetében, ahol a bal oldalon az eredeti határ nélküli megoldás látható, míg jobbra a határ reprezentálására egy „image” forrás van elhelyezve. A szaggatott vonal jelöli az egyes forrásokból érkező koncentrációmegoszlást, míg a folytonos vonal a szuperpozíciós megoldást [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]

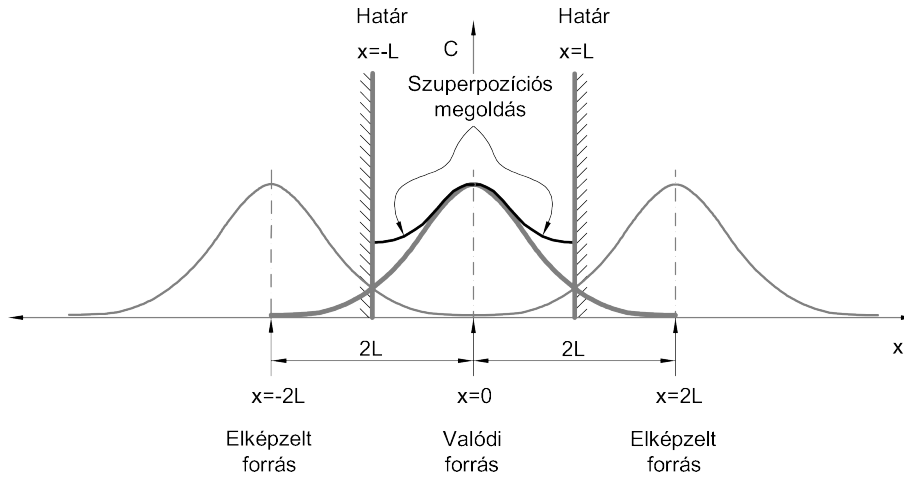
végtelen számú „image” forrás elhelyezése szükséges. A két oldalon elhelyezett határ esetét a 42. ábra mutatja. A gyakorlatban a megoldás rendszerint már néhány „image” forrás elhelyezése után konvergál [Fischer et al., 1979]. Pillanatszerű, pontszerű forrás esetében, amely az origóban van elhelyezve és $\pm L$ -ben van határokkal ellátva, az „image” forrásokkal történő megoldás egyenlete a következő.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp \left(\frac{-(x + 2nL)^2}{4 \cdot D \cdot t} \right) \right) \quad (262)$$

Nyilvánvalóan a konvergáló megoldáshoz szükséges „image” források száma függ az idő skálától, amelyen a megoldást érvényesnek tekintjük.

23.3.1. Egy csésze teában feloldódó cukor példája

Egy hideg téli napon kitöltünk egy csésze teát és 2 g cukrot hozzáadunk a teához, úgy hogy az egyenletes eloszlásban terüljön el a csésze fenekén. A csésze átmérője 5 cm, a magassága pedig 7 cm (a tea felszíne a csésze peremével azonos szintben van). Ha nem keverjük fel a teát, mi lesz az az időpont, amikor a koncentrációmegoszlás széle eléri majd a tea felszínét, és mikorra fog a cukor teljesen feloldódni? Hogyan válaszolhatjuk meg ezeket a kérdéseket abban az esetben, ha megkeverjük a teát?



42. ábra. A két oldalon elhelyezett no flux határ esete, amikor a szuperpozíciós megoldás elvileg végtelen számú „image” forrást igényel. A szaggatott vonal jelöli az egyes „image” forrásokból érkező koncentráció-megoszlást, a vékony folytonos vonal a valódi forrásból származó koncentráció-megoszlást határolás nélkül, míg a folytonos vonal a szuperpozíciós megoldást [Fischer et al., 1979].

A cukor koncentrációja fix értékkel a telítettségi koncentráción található a csésze fenekén és a kezdeti időpontban minden más pontban zérus. Ezek a feltételek azonosak az állandó koncentrációjú peremre vonatkozó megoldással, így a cukor eloszlása a z magasságú teaoszlopban a következő egyenlettel adható meg.

$$C(z, t) = C_{sat} \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (263)$$

ahol, C_{sat} a cukor telítettségi koncentrációja a csésze fenekén.

A koncentráció megoszlás karakterisztikus magassága (ebben az esetben) arányos a $\sigma = \sqrt{2Dt}$ -vel. Tételezzük fel, hogy a koncentráció megoszlás széle akkor éri el a csésze tetejét, amikor $2 \cdot \sigma = h = 7\text{cm}$. Az időre megoldva az előbbi egyenletet, adódik.

$$t_{mix,bl} = \frac{h^2}{8D} \quad (264)$$

Nagyságrendi becslés céljából vegyük fel a diffúziós tényezőre, $D \sim 10^{-9}\text{m}^2/\text{s}$ értéket, ekkor az előbbi egyenlettel megadott időre a következőt kapjuk.

$$t_{mix,bl} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ s} \quad (265)$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk milyen sokáig tart a cukor feloldódása, ki kell számolnunk a cukorra vonatkozó tömegfluxust (anyagáramot) a $z = 0$ pontban. Már korábban kiszámítottuk az anyagáram megadására érvényes hibafüggvény

deriváltját az első fejezetben („A víz-levegő határreteken keresztüli diffúziós fluxus példája” című részben). A cukorra vonatkozó anyagáram a $z = 0$ pontban tehát a következő egyenlettel határozható meg:

$$m(0, t) = \frac{A \cdot D \cdot C_{sat}}{\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} \quad (266)$$

ahol, az A a csésze keresztmetszeti területe, a C_{sat} pedig a telítettségi koncentráció a csésze fenekén.

A feloldódott cukor teljes mennyisége a tömeg fluxus (anyagáram, M_d) időben vett integrálja.

$$M_d = \int_0^t \frac{A \cdot D \cdot C_{sat}}{\sqrt{\pi \cdot D \cdot \tau}} d\tau \quad (267)$$

Az előbbi egyenletet integrálva \sqrt{t} -re megoldva a következő adódik.

$$t_d = \frac{M_d^2 \cdot \pi}{4 \cdot A^2 \cdot D \cdot C_{sat}^2} \quad (268)$$

ahol, t_d az M_d anyagmennyiség feloldódásához szükséges idő.

A kifejezés csak $t < t_{mix,bl}$ esetében érvényes, a $t_{mix,bl}$ időponton túl ugyanis számításba kell vennünk a tea felszínének határként való funkcionálását. Feltételezve, hogy $C_{sat} = 0,58 \text{ g/cm}^3$, a cukor feloldásához szükséges idő $t_d = 5 \cdot 10^4 \text{ s}$.

A tea megkeverésével jelentősen megnöveljük D értékét. Mivel a D a t -re vonatkozó egyenletben a nevezőben van, a D növelésével csökkenteni fogjuk a cukor feloldódásához és csészében való eloszlásához szükséges időt.

A határok figyelembe vétele. Az előzőekben nem tértünk ki arra az időszakra, amikor a tea felszíne már fellép egy határként és egy „image” forrást szükséges elhelyeznünk, hogy a jelenséget a továbbiakban helyesen tudjuk leírni. A határokat figyelembe véve a következő helyzet adódik.

A csésze oldalainak a hatását elhanyagolhatjuk, mivel feltételezzük, hogy a cukor egyenletesen oszlik meg a csésze fenekén, így ez az egyenletes koncentráció-megoszlás zérus koncentráció-gradienst eredményez x és y irányban, úgy mint

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (269)$$

Ezek alapján nincsen diffúziós fluxus a csésze falainak irányában.

Hogy a szabad felszín hatását figyelembe vehessük, egy „image” forrást kell figyelembe vennünk egy állandó C_{sat} fix koncentrációval valahol a csésze fölött. A csésze fenekét $z = 0$ helyként definiálva, az „image” forrást $z = 2 \cdot h$ magasságban kell elhelyeznünk (h -val definiáltuk korábban a csésze magasságát). Figyelembe véve azt a szabályt, hogy

$$C(z, \infty) \rightarrow C_{sat} \quad (270)$$

A cukor koncentráció megoszlásának szuperpozíciós megoldása a következő lehet:

$$C(z, t) = C_{sat} \cdot \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{2h}{\sqrt{4Dt}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{2h - z}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (271)$$

rész IX

Elkeveredési folyamatok vízfolyásokban: Turbulens diffúzió és diszperzió

Bevezetés

A természetes vízfolyásokban jelentkező áramlások nem egyenletes eloszlású sebességmezővel jellemezhetők, ezeknek a gyorsan változó sebességnek a következtében az elkeveredés sokkal gyorsabban megy végbe, mint az a kizárólag molekuláris diffúziós tényező által vezérelt folyamatokban előfordul. A következőkben levezetjük erre a nem egyenletes sebességeloszlásra érvényes egyenletet, hogy bemutassuk ennek a hatásait az elkeveredésre. Először, a véletlenszerű, turbulens sebességmező hatásait taglaljuk. Másodikként megvizsgáljuk a diffúzió (molekuláris vagy turbulens) és a nyíró sebesség profil együttes hatását, hogy létrehozzuk a diszperzióra vonatkozó egyenletünket. Minden egyes esetben megtartjuk az advektív-diffúziós egyenlet korábban levezetett formáját, de az elkeveredést jellemző tényezők az új egyenletben nagyságrendekkel nagyobbak lesznek, mint a diffúziós tényezők voltak.

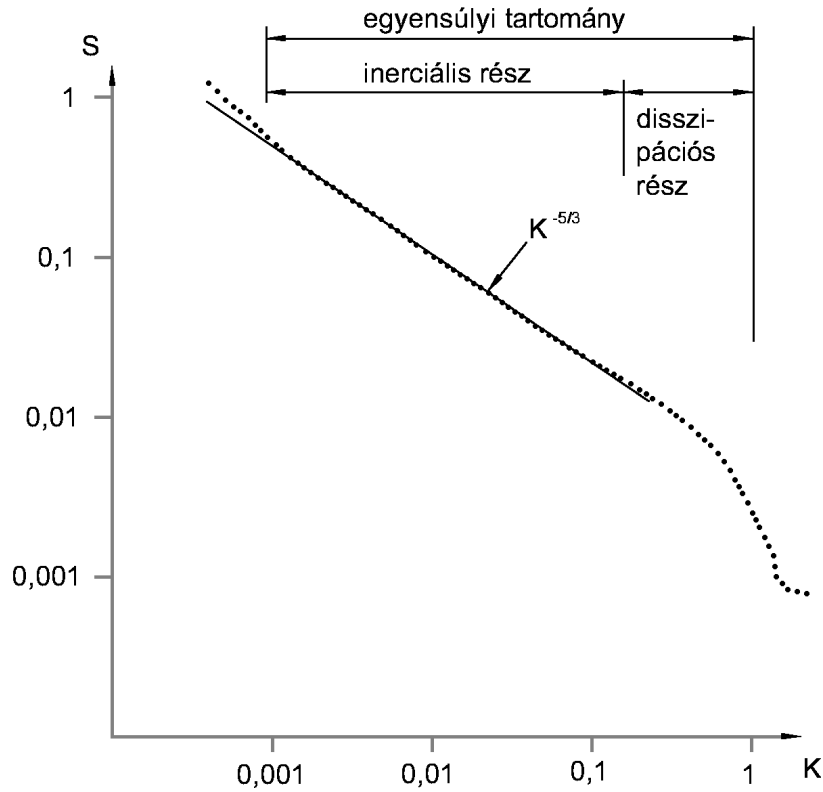
24. A turbulencia matematikai leírása

A következőkben a turbulencia egy speciális esetét a homogén turbulenciát tárgyaljuk. A homogén kifejezés jelentése, hogy az áramlás statisztikai jellemzői állandóak (stacionerek), persze az áramlás ettől még lehet nagymértékben szabálytalan.

Turbulens áramlásban nagyméretű örvények formálódnak folyamatosan majd szétesnek kisebb örvényekre, így mindig különböző méretű örvények spektruma van jelen az áramlásban. Amikor a nagyméretű örvények sok kisebb méretű örvénnyé esnek szét, nagyon kevés kinetikus energia veszik el, ezt úgy mondjuk, hogy az energia hatékonyan adódik át a különböző méretű örvények kaszkádján. Végül, amikor az örvények elég kicsivé válnak, a viszkozitás szerepet kap, a kinetikus energia széteszik és hővé alakul át. Ezt a konverzióját a kinetikus energiának hőenergiává a kis örvényméretű skáláján disszipációnak (ϵ) hívjuk és a következő egyenlettel jellemezhetjük.

$$\epsilon = \frac{E_{kin}}{t} \quad (272)$$

ahol, E_{kin} , a disszipált kinetikus energia, t az idő és az ϵ dimenziója [L^2T^{-3}]. Mivel a kinetikus energia hatékonyan átadódik lefelé a kisebb méretű örvények skálájára, a hővé disszipált kinetikus energia egyenlő kell, hogy legyen az áramlás összes turbulens kinetikus energiájával. Ez azt jelenti, hogy a keletkezése és



43. ábra. Az óceánban jellemző örvények energiaspektuma, ahol K , a hullámszám, S pedig a hullámszám spektruma [Kundu and Cohen, 2002, nyomán]

a disszipációja a turbulens kinetikus energiának egy homogént turbulens áramlásban kiegyenlített. Az előbbieket szemlélteti a 43. ábra, amely az óceánban keletkező jellemző örvények energiaspektrumát mutatja be. Az ábrán jól látható az energia lefelé kaszkádolódása (átadódása) a kisebb méretű örvények felé, amelyet a hullámszám $5/3$ -os kitevőjű függvényével ($K^{-5/3}$) jellemezhetünk.

Az a hossz skálája (mérete) az örvényeknek, amelyen a turbulens kinetikus energia hővé konvertálódik a Kolomogorov-felé L_K méretskála. Milyen nagy ez az L_K ? Használjuk a dimenzió analízist, hogy megválaszoljuk ezt a kérdést. Vegyük észre, hogy az L_K függ az energia disszipációs rátától ϵ és a viszkozitástól ν (itt kinematikus viszkozitás), mivel a sűrűlódás alakítja át a kinetikus energiát hővé. Hozzuk létre egy hossz skálát ezekből a paraméterekből, és így megkapunk egy arányosságot L_K -ra, ami a turbulencia egy fontos méretskálája.

$$L_K \propto \frac{\nu^{3/4}}{\epsilon^{1/4}} \quad (273)$$

Összefoglalva, a Lagrange-i szemléletmód szerint, ha követünk egy folyadék részecskét, amely kezdetben rákerül egy nagy örvényre és aztán vándorol örvényről örvényre, ahogy a nagy örvények kisebbekre esnek szét, de megőrzik kinetikus energiájukat a lefelé kaszkádolódás során. Végül a részecske egy olyan kisméretű örvénybe kerül be (az L_K mérettartományban), hogy a viszkozitás disszipálja a kinetikus energiáját hővé. Ez a kis örvény azonban szintén része egy nagy örvénynek, tehát az örvények mindegyik mérettartománya jelen van folyamatosan az áramlásban.

Mivel nehéz a folyadék részecskét követni egy sebességmérő műszerrel (ez az egyébként, amit a részecskékövető sebességmérés (Particle Tracking Velocimetry PTV) során próbálunk megtenni), a turbulens sebességre vonatkozó méréseket ezért egy ponton végezzük és a turbulenciát az Euler-i közelítéssel írjuk le. Örvények egész spektruma halad át a sebességmérés helyén, az áramlás átlagsebessége által szállítva. A nagy méretű örvények egy hosszú periódusidejű fluktuációt, míg a kis méretű örvények egy rövid periódusidejű fluktuációt indukálnak a sebességmérésnél, és ezek a méretskálák folyamatosan megjelennek az áramlásban. A 44. ábra egy példát mutat a turbulens sebességek egyik sebességkomponensének, egy adott ponton történt mérése alapján. Ha megvizsgáljuk a sebességmérési idősor egy rövidebb darabját, azt látjuk, hogy abban az időben egymást követő sebességek jól korrelálnak (összefüggenek) és determinisztikusnak (korábbi sebességek alapján számíthatónak) tűnnek. Ha viszont a sebesség-idősor távolabbi részeit hasonlítjuk össze, a sebességek teljesen korrelátlannak és véletlenszerűnek tűnnek. Azt az időskálát, amelyen a sebességek az idősorban elkezdnek egymástól függetlenné és véletlenszerűvé válni integrál időskálánk nevezzük, t_I . A Lagrange-i keretek között, ez az az idő, amikor a vizsgált folyadékcsomag már kezdi elfelejteni az ő kezdeti sebességét. Az időskála meghatározható a mérésekre illesztett autokorrelációs függvény alapján. Ez az időskála szintén leírható egy karakterisztikus hosszal és sebességgel, erre az ún. integrál skálára vonatkoztatva: v_I és l_I .

Reynolds javaslatára a t_I -nél hosszabb időintervallumot véve, az x_i pontban mért sebesség felbontható egy átlagsebességre \bar{v} , és az attól való eltérésre $v'(t)$.

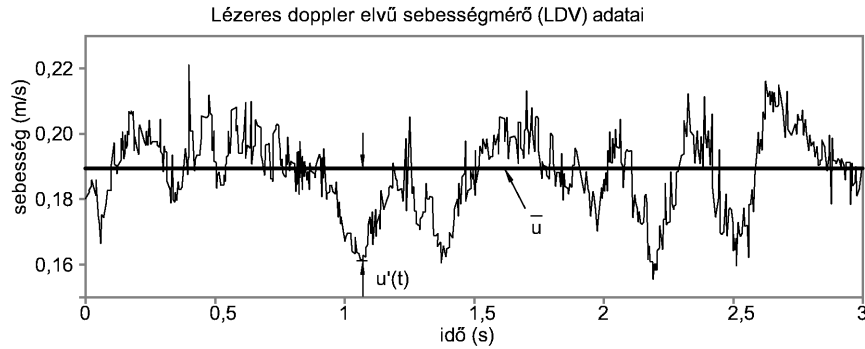
$$v_i(x_i, t) = \bar{v}_i(x_i) + v_i'(x_i, t) \quad (274)$$

A sebességnek ezt a felbontását nevezzük Reynolds féle dekompozíciónak. A t_I ebben az esetben egy nem túl rövid, de nem is túl hosszú időszak, amelynek hossza közel azonos azzal az időtartammal, ami alatt az átlagsebesség már közel állandóvá válik.

Egy másik fontos jelzőszáma a turbulenciának a sebesség fluktuációk négyzetének átlagából képzett négyzetgyök (rms: root mean square).

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v_i' \cdot v_i'}} \quad (275)$$

amely, mivel a kinetikus energia arányos a sebesség négyzetével, az áramlás turbulens kinetikai energiájának egy mérőjegye (megjegyzendő, hogy az áramlás átlagos kinetikai energiája ebben a tagban nem szerepel, mivel az v_i az átlagtól való eltérés).



44. ábra. A turbulensen fluktuáló sebesség egy ponton történő mérése, ahol az \bar{v} , az átlagsebesség és az $v'(t)$ a fluktuáló komponens [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]

24.1. A turbulens advektív diffúziós egyenlet

Az advektív diffúziós egyenlet turbulens körülmények között alkalmazható formájának leírásához, alkalmazzuk a Reynolds-féle dekompozíciót a normál advektív diffúziós egyenletre és elemezzük az eredményt. A Reynolds-féle dekompozíciót a koncentráció esetében alkalmazva a sebességek analógiájára.

$$C(x_i, t) = \bar{C}(x_i) + C'(x_i, t) \quad (276)$$

Mivel csak a szennyezőanyag (vagy nyomjelző) felhő hosszú-távú (hosszú összehasonlítva a t_I -vel), átlagos viselkedésére vagyunk kíváncsiak, egy időbeli átlagolást fogunk alkalmazni. Példaként vizsgáljuk meg az időben átlagolt tömeg fluxust x -irányban a sebességmérés helyén, $v \cdot \bar{C}$.

$$\begin{aligned} q_x = \overline{v \cdot C} &= \overline{(\bar{v}_i + v_i') \cdot (\bar{C} + C')} = \\ &= \overline{\bar{v}_i \cdot \bar{C}} + \overline{\bar{v}_i \cdot C'} + \overline{v_i' \cdot \bar{C}} + \overline{v_i' \cdot C'} \end{aligned} \quad (277)$$

Ahol a felülvonás időbeli átlagot jelöl.

$$\overline{v \cdot C} = \frac{1}{t_I} \cdot \int_t^{t+t_I} v \cdot C \cdot d\tau \quad (278)$$

ahol, a t_I a korábban megfogalmazott integrál időskála, ami hosszabb, mint egy jellemző nagy örvény áthaladási ideje a mérési ponton.

Homogén turbulencia esetére a fluktuáló sebességek és koncentrációk időbeli átlagai nullát kell, hogy adjanak, vagyis $\overline{v_i'} = \overline{C'} = 0$. Így a $\overline{v \cdot C}$ -re vonatkozó szorzatokból a következő marad vissza:

$$\overline{v \cdot C} = \overline{\bar{v}_i \cdot \bar{C}} + \overline{v_i' \cdot C'} \quad (279)$$

Az előbbi egyenlet jobb oldali első tagjánál elhagytuk a kettős felülvonást (kétszeres átlagolás), mivel egy átlagnak az átlaga az csak újra az átlagot adja. Érdemes kiemelni azonban, hogy a jobb oldal második tagjának keresztiszorzatáról ($\overline{v'_i \cdot C'}$) nem feltételezhetjük annak zérus voltát.

Az előbbieken kifejtett tagok ismeretében, most már készek vagyunk arra, hogy behelyettesítsük a Reynolds-féle dekompozíciót a vezérlő advektív-diffúziós egyenletünkbe (amelyben molekuláris diffúziós tagok szerepelnek).

$$\frac{\partial(\overline{C+C'})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{(\overline{v_i+v'_i}) \cdot (\overline{C+C'})})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial(\overline{C+C'})}{\partial x_i} \right) \quad (280)$$

A következő lépésben integráljuk az egyenletet a t_I integrál időskála időtartamban.

$$\frac{1}{t_I} \cdot \int_t^{t+t_I} \left\{ \frac{\partial(\overline{C+C'})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{(\overline{v_i+v'_i}) \cdot (\overline{C+C'})})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial(\overline{C+C'})}{\partial x_i} \right) \right\} d\tau \quad (281)$$

$$\frac{\partial(\overline{C+C'})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{(\overline{v_i} \cdot \overline{C} + \overline{v'_i} \cdot \overline{C'} + \overline{v'_i} \cdot \overline{C} + \overline{v_i} \cdot \overline{C'})})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial(\overline{C+C'})}{\partial x_i} \right)$$

Vegyük észre, hogy az $\overline{v_i \cdot C'}$, az $\overline{v'_i \cdot C}$ és a $\overline{C'}$ tagok zérus értékűek. Átmozgatva a $\overline{v'_i \cdot C'}$ tagot a jobb oldalra a következő egyenlet marad vissza.

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{v_i \cdot C})}{\partial x_i} = -\frac{\partial(\overline{v'_i \cdot C'})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} \right) \quad (282)$$

Ha a vizsgált x_i irányban a sebesség átlagos értéket állandónak tekintjük a bal oldali második tagból az $\overline{v_i}$ kiemelhető a differenciáljel elé.

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{v_i} \cdot \frac{\partial(\overline{v_i \cdot C})}{\partial x_i} = -\frac{\partial(\overline{v'_i \cdot C'})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} \right) \quad (283)$$

Hogy valóban használhassuk az előbbi egyenletet a gyakorlatban az $\overline{v'_i \cdot C'}$ tagra valamilyen modellt kell felállítanunk. Mivel ez a tag $v \cdot C$ alakú, tudjuk róla, hogy valami tömeg fluxust jelképez. Mivel a szorzat minkét komponense az átlag körüli változást (fluktuációt) jelképezi, a szorzatuk által képezett tömeg fluxus a turbulenciával kell, hogy kapcsolatos legyen. Reynolds ezt a turbulens komponens minőségileg egy gyors elkeveredést jelképező tényezőként írta le, így ezek alapján analógiát vonhatunk a molekuláris diffúzióval. Taylor 1921-ben (in Socolofsky and Jirka 2005) egy részét levezette ennek az analógiának, és általánosan, hogy analitikusan követte egy nyomjelző részecskékből álló felhő útját egy turbulens áramlásban és számította a Lagrange-i autokorrelációs függvényt. Az eredményei azt mutatták, hogy a t_I -nél nagyobb időkre, a nyomjelző részecske felhő nagysága lineárisan nő az idővel. Fischer et al. [1979] ezt az előbbi eredményt használta fel a molekuláris diffúzióval kapcsolatosan felállított analógia

igazolására. Érdekes azonban rámutatni, hogy Taylor az analógia alkalmazásában nem ment ilyen messzire. A diffúzióval kapcsolatos analógia esetében az átlagos turbulens diffúziós időskála $\Delta t = t_I$, és az átlagos turbulens diffúziós hossz mérték $\Delta x = v_I \cdot t_I = l_I$, innen következik, hogy a modell csak t_I -nél nagyobb időkre érvényes. A Fick-féle törvény alakjához hasonló kapcsolatot alkalmazva a turbulens diffúzióra adódik:

$$\overline{v'_i \cdot C'} = -D_t \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \quad (284)$$

ahol, D_t értékét a következő összefüggés adja meg.

$$D_t = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = v_I \cdot l_I \quad (285)$$

Behelyettesítve ezt a modellt az átlagos turbulens diffúziós transzportot megadó korábbi (283) egyenletbe és elhagyva az átlagolást jelző felülvonásokat a következőt kapjuk.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_m \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \right) \quad (286)$$

Amint látni fogjuk a következő szakaszban, a turbulens diffúziós tényező (D_t) általában sokkal nagyobb, mint a molekuláris diffúziós tényező (D_m), így az előző egyenlet utolsó tagját általában el is hanyagoljuk.

24.2. Turbulens diffúzió egy szobában

Azért, hogy a turbulens diszperzió jelenségét egy zárt helyiségben demonstráljuk, fecskendezzünk ki pontszerű forrásként parfümöt egy előadóterem elülső részén. A helyiség hosszdimenziói 10 m, 10 m és 5 m és 50 ember tartózkodik benne. Mennyi ideig tarthat, míg a parfüm turbulens diffúzióval szétterjed a helyiségben?

Hogy ezt a kérdést megválasszunk szükséges, hogy megbecsüljük a levegő sebességének skáláját a helyiségben. Minden egyes személy egy kb. 60 W-os hőforrásként is felfogható, innen kijelenthető, hogy a levegő áramlása szempontjából a domináns folyamat a konvekció. A vertikális felhajtóerőből (sűrűségkülönbség) származó sebesség v_{z*} dimenzióanalízissel a következőképpen adható meg.

$$v_{z*} = (B \cdot L)^{\frac{1}{3}} \quad (287)$$

ahol, B a felhajtóerőből származó fluxus egységnyi területen [$L^2 T^{-3}$] és L [L] a szoba vertikális dimenziója (5 m). A levegő felhajtóereje a hőmérséklet növekedésével növekszik a kiterjedés miatt. A nettó felhajtóerőből származó fluxus egységnyi felületen a következőképpen adható meg.

$$B = \beta \cdot g \cdot \frac{H}{\rho \cdot c_v} \quad (288)$$

ahol, β a hő okozta expanziót jellemző tényező ($0,00024 K^{-1}$ a levegőre), H a látens hő fluxus egységnyi területen, ρ a közeg sűrűsége ($1,25 kg/m^3$ a levegőre) és c_v egy konstans térfogatnál értelmezett fajhő ($1004 J/(kg \cdot K)$ a levegőre).

Az előbbi problémára a H értéke a következő:

$$H = \frac{50f\delta \cdot 60W/f\delta}{10^2 m^2} = 30 \frac{W}{m^2} \quad (289)$$

Ezen H érték alapján az egységnyi területre érvényes felhajtóerő fluxus $5,6 \cdot 10^5 m^2/s^2$ és a vertikális sebesség $v_{z*} = 0,07 m/s$.

Most már megvannak a szükséges távolság és időskáláink a turbulens diffúziós tényező becsléséhez a $D_t = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = v_I \cdot l_I$ egyenlet alapján. Vegyük, hogy az $v_I \propto v_{z*}$ és $l \propto h$, ahol a h a helyiség magassága. A D_t érték becslése tehát a következő:

$$D_t \propto v_{z*} \cdot h \approx 0,35 m^2/s \quad (290)$$

amely, nagyságrendekkel nagyobb a molekuláris diffúziós tényezőnél (összehasonlítva a molekuláris diffúziós tényező értéke a levegőre $D_m = 10^{-5} m^2/s$).

Az elkeveredés ideje a felhő szélességnek szóródása alapján számítható.

$$t_{mix} \approx \frac{L^2}{D_t} \quad (291)$$

A vertikális elkeveredés esetére $L = 5m$ a t_{mix} kb. 1 perc, a horizontális elkeveredésre $L = 10m$ a t_{mix} kb. 5 perc. Ezen eredmények alapján eltart néhány percig (de nem egy-két szekundumig és nem órákig) amíg a teremben lévőek elkezdik megérezni a parfüm illatát.

25. Turbulens diffúziós tényezők értelmezése vízfolyásokban

Milyen nagyok lehetnek a turbulens diffúziós tényezők? Hogy ezt a kérdést megválaszoljuk, azt szükséges meghatározni, hogy a diffúziós tényező mitől függ, használjuk a dimenzió analízis módszerét.

Hogy megválaszoljuk az előző kérdést vegyünk példaként egy széles (W) folyót h átlagos mélységgel, ahol $W \gg h$. A három dimenzióban értelmezett turbulencia fontos tulajdonsága, hogy a legnagyobb örvények méretét általában a legkisebb térbeli dimenzió irányában értelmezett kiterjedés befolyásolja, ebben az esetben a mélység. Ez azt jelenti, hogy egy széles folyó turbulenciával kapcsolatos tulajdonságai függetlenek kellene, hogy legyenek a vízfolyás szélességétől, de függenek a mélységtől. Gondoljunk csak meg, hogy a turbulencia a nagymértékű nyírással jellemezhető zónákban generálódik, amely zónák egy folyó esetében lehetnek például a vízfolyás medrének közelében. A nyírás erősségének a jellemzésére szolgáló sebesség (amely több turbulenciát jellemző értékkel

is arányos) a súrlódási vagy más néven fenékcúsztató sebesség, $v_*[LT^{-1}]$. a következőképpen jellemezhető:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (292)$$

ahol, a τ_0 (N/m^2) a mederfenéken jellemző nyírófeszültség és ρ (kg/m^3) a folyadék sűrűsége. Nyíltfelszínű csatornában történő egyenletes folyadékmozgás esetében a gravitációs erőt ez a nyírásból származó súrlódás ellensúlyozza, tehát a v_* -a következőképpen számítható:

$$v_* = \sqrt{g \cdot h \cdot S} \quad (293)$$

ahol, ahol az S a csatorna hosszúsága.

Használjuk fel a tárgyalt két paraméterünket, hogy egy diffúziós tényezőt hozzunk létre.

$$D_t \propto v_* \cdot h \quad (294)$$

Mivel a sebesség profil nagyon különböző vertikális (z) irányban a transzverzális (y) iránytól, D_t -vel kapcsolatban nem feltételezhetjük, hogy izotrop (tehát a tér különböző irányában más és más értéket vesz fel).

25.1. Vertikális elkeveredés

A vertikális értelmű turbulens diffúziós tényező a vertikális sebességprofilból származtatható (lásd Fischer et al. 1979). A teljesen kifejlődött turbulens nyílt felszínű áramlás esetére megmutatható, hogy az átlagos turbulens sebesség profil az univerzális (logaritmikus) faltörvény alapján [Lajos, 2008] a következőképpen adható meg:

$$\bar{v}_t(z) = v + \frac{v_*}{\kappa} \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{z}{h}\right)\right) \quad (295)$$

ahol, κ a Kármán-féle konstans, κ -t 0,4-nek véve a D_t -re a következő adódik:

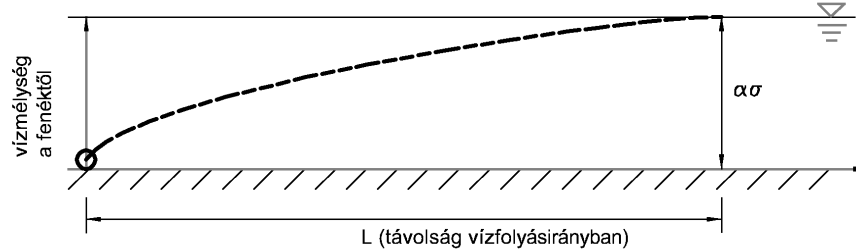
$$D_{t,z} = 0,067 \cdot h \cdot v_* \quad (296)$$

Ez az egyenlet a vízfolyásokra és az atmoszférikus határretegére kísérletek által verifikált és $\pm 25\%$ -os pontosságúak vehető.

25.1.1. Vertikális elkeveredés egy vízfolyásban

Egy gyár szennyvizét egy laterális elhelyezkedésű perforált csövön vezetik be egy vízfolyás mederfenekére, amint az a 45. ábrán látható. A kérdés az, hogy milyen távolságra a bebocsájtástól lefelé tekinthető a bejuttatott anyag vertikálisan teljes elkeveredettnek.

A teljesen elkeveredés azzal az állapottal definiálható, ahol koncentráció változása a keresztmetszvény mentén egy küszöbszint alatt van. Mivel a vertikális (z irányú) domain-nak két határa van (alsó a meder, a felső a vízfelszín), az



45. ábra. Vertikális elkeveredés szemléltetése egy vízfolyás mederfenekén bejutott szennyvíz példáján [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]

„image” (elképzelt) forráson alapuló (tükrözéses) megoldást célszerű használni a koncentráció kiszámításához:

$$C(z, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{-(z+2nL)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \right) \quad (297)$$

A kapott eredményeket az alkalmas alfa paraméter meghatározásával összegezzük a következő egyenletre vonatkozóan:

$$h = \alpha \cdot \sigma \quad (298)$$

ahol, h a mélység és σ a koncentráció eloszlás szórása. Fischer et al. [1979] javaslatára az α paraméter $\alpha=2,5$ -nek vehető.

Vertikális elkeveredésnél, minket elsősorban a vertikális diffúziós tényező érdekel, így írhatjuk, hogy:

$$h = 2,5 \cdot \sqrt{2 \cdot D_{t,z} \cdot t} \quad (299)$$

ahol, a t a vertikális elkeveredés kifejlődéséhez szükséges idő. A t idő alatt a felhő a vízfolyás mentén L távolságra ($L = \bar{v} \cdot t$) jut. A \bar{v} -ra vonatkozóan szintén alkalmazhatunk egy közelítést $v_* = 0,1 \cdot \bar{v}$. Behelyettesítve ezeket az előbbi összefüggéseket a $D_{t,z} = 0,067 \cdot h \cdot v_*$ egyenlettel kombinálva adódik:

$$h = 2,5 \cdot \sqrt{2 \cdot 0,067 \cdot h \cdot (0,1 \bar{v}) \cdot L / \bar{v}} \quad (300)$$

L -re megoldva az előbbi egyenletet a következőt kapjuk:

$$L = 12 \cdot h \quad (301)$$

Az előbbiekből alapján, a felszínen vagy a mederfenéken beinjektált anyagáram egy természetes vízfolyásba (pl. tisztított szennyvízbeocsátás), kb. 12-szeres vízmélységnél nagyobb távolságra a beocsátástól, már vertikálisan teljes mértékben elkeveredettnek fogható fel.

25.2. Keresztirányú elkeveredés

Általában nem jellemző nagymértékű keresztirányú sebesség profil a vízfolyásoknál és így az elkeveredési tényezőket kísérletek alapján célszerű számítanunk. Jól felszerelt laboratóriumban végzett mérések és terepi kísérletek alapján Fischer et al. [1979] az átlagos keresztirányú, turbulens diffúziós tényezőkre, egyenes csatormaszerű meder esetében a következő összefüggést adja:

$$D_{t,y} = 0,15 \cdot h \cdot v_* \quad (302)$$

A kísérletek azt mutatják, hogy a mélység is szerepet játszik a keresztirányú elkeveredésben, azonban az nem tisztázott, hogyan lehet ezt a hatást kifejezni. A keresztirányú elkeveredés nem követi minden esetben, az előbbi egyenletben megfogalmazott összefüggést különösen igaz ez nagy, koherens, laterális mozgások esetében, amelyeknek valójában nem a turbulens tulajdonságaik az elsődlegesek. A kísérletekben vizsgált tartományokra vonatkozóan az előbbi egyenlet megbízhatósága legjobb esetben is csak $\pm 50\%$.

Természetes vízfolyásokban, a keresztmetszvény ritkán egységes mélységű, és a helyszínrajzi vonalvezetés is meanderező. Az előbbi két hatás fokozza a keresztirányú elkeveredést, így a természetes vízfolyásokra $D_{t,y}$ esetében, Fischer et al. [1979] a következő összefüggést ajánlja:

$$D_{t,y} = 0,6 \cdot h \cdot v_* \quad (303)$$

Abban az esetben, ha a vízfolyás csak kissé meanderező és a partok vonalvezetésének szabálytalansága csak mérsékelt, az előbbi egyenlet jobb oldalának szorzótényezője általában a 0,4-0,8 tartományban vehető fel.

25.3. Hosszirányú elkeveredés

Ha feltételezzük, hogy nincs határból eredő visszaverődés a keresztirányú vagy hosszirányú szennyezőanyag terjedésnél a hosszirányú turbulens elkeveredés a keresztirányúhoz hasonlóan kezelhető. Ebben az esetben a turbulens diszperziós tényező megegyeznek:

$$D_{t,x} = D_{t,y} \quad (304)$$

Azonban a vertikális sebességprofil nem egységes volta és más egyenlőtlenégeket okozó hatások (holt terek, csavart áramlások, nem egységes mélység, stb.) egy hosszirányú diszperzióknak nevezett, a hosszirányú elkeveredésben domináns folyamatot indukálnak. Emellett a hosszirányú diszperziós folyamat mellett (amely a következőkben kerül tárgyalásra) a hosszirányú diffúzió ($D_{t,x}$) gyakran elhanyagolható és az előbbi folyamat veszi át a helyét.

A turbulens diffúziós folyamatok összefoglalás a vízfolyások esetében

Egy természetes vízfolyás esetében, amelynek szélessége $W=10\text{m}$, mélysége $h=0,3\text{m}$, vízhozama $Q=1 \text{ m}^3/\text{s}$ és medrének esése $S=0,0005$, az előbbi egyenletek alapján a diffúziós tényezők a három fő koordinátatengely irányában a következők.

$$D_{t,z} = 6,4 \cdot 10^{-4} m^2/s \quad (305)$$

$$D_{t,y} = 5,7 \cdot 10^{-3} m^2/s \quad (306)$$

$$D_{t,x} = 5,7 \cdot 10^{-3} m^2/s \quad (307)$$

Érdemes kiemelni, hogy a természetes medrű (szabálytalanul meanderező, stb.) vízfolyásokra a $D_{t,y} = 0,6 \cdot h \cdot v_*$ képlettel megadott számítás a $D_{t,y}$ és így a $D_{t,x}$ tényezőkre is mintegy négyszer nagyobb értéket ad.

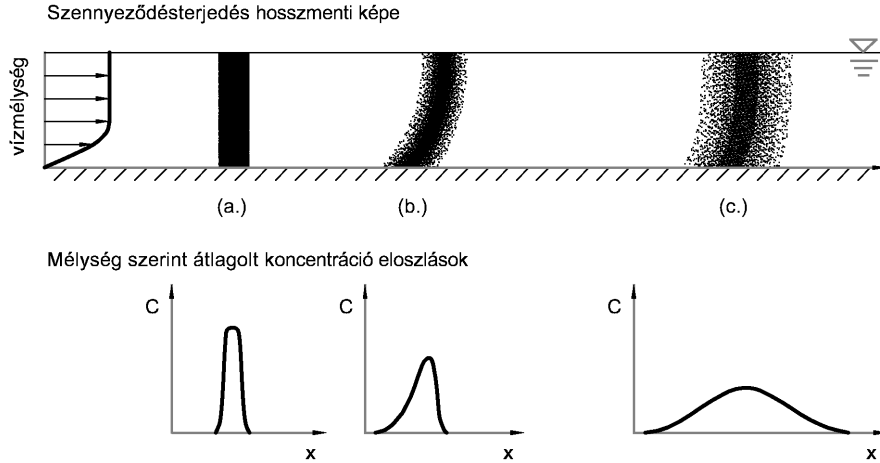
Az előbbi számítások értékei azt mutatják, hogy a turbulens diffúziós tényezők a természetes vízfolyásokban több nagyságrenddel nagyobbak, mint a molekuláris diffúziós tényezők, biztonsággal eltávolíthatjuk tehát a D_m -re vonatkozó tagot a 286. egyenletből.

26. A hosszirányú diszperzió értelmezése

Az előző részben láthattuk, hogy a sebesség turbulens fluktuációja egy véletlenszerű elkeveredést okoz, ami a Fick-féle diffúziós egyenlet segítségével leírható, a molekulárisnál nagyobb ún. turbulens diffúziós tényezőt figyelembe véve. Ebben a részben azt akarjuk megvizsgálni, hogy milyen a sebességek eltéréseinek hatása térben, a nem egyenletes sebességmegoszlásnak, vagy nyíróáramlásnak, kifejezett sebességprofilnak a szennyezőanyagok terjedésére.

A következő 46. ábra szemléletesen mutatja be, hogy mi történik egy nyomjelzőanyag felhővel, hogyan változik annak mintázata egy olyan nyíróáramlásban, ami a nyílt felszínű csatornában jellemző.

- Vegyük egy vízfolyás átlagos, egységnyi széles hosszirányú metszetét. Ha beinjektálunk egy jelzőanyagot (ami pl. egy szennyezőanyagot szimbolizál) az áramlás (a.) szektorába keresztaszelvény mentén egyenletesen elosztva, akkor a bebocsájtás pillanatában nem lesz jelen vertikális koncentráció gradiens (keresztirányú sem, de azt most nem vizsgáljuk). Mivel nincs koncentráció gradiens, nem lesz diffúziós fluxus sem az adott bebocsájtási pont vertikális függvényében.
- A jelzőanyag mintázata azonban advekción mozgással folyásirányban elmozdul és közben szét is húzódik a vertikálisan eltérő advekción sebességek következtében előálló nyírás miatt. Egy rövid távolságra lefelé tehát a jelzőanyag felhő mintázata a (b.) szelvényben láthatóhoz lesz hasonló. Ebben a pontban egy erős vertikális koncentráció gradiens lesz jellemző, aminek következtében nagy nettó diffúziós fluxus jelentkezik vertikális irányban.
- Ahogy a széthúzó mintázat folyásirányban lefelé mozog tovább, a (turbulens) diffúzió ki fogja simítani a vertikális koncentráció gradienst, és elegendő távolságra lefelé, a jelzőanyag felhő mintázata a (c.) pontban rajzolthoz válik hasonlóvá.



46. ábra. A hosszirányú diszperzió folyamatának sematikus ábrája. Egy nyomjelzőt injektálunk a keresztiszelvényben egyenletesen elosztva az áramlási tér (a.) pontjában, amely a nyíróáramlás sebességprofilja következtében széthúzódik (b.) helyen. A (c.) szelvényben a vertikális diffúzió már homogenizálta a koncentráció gradienst és egy mélység átlagolt Gauss-féle normális eloszlás formájában várható a hosszirányban vett koncentráció profil megjelenése [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]

Az a jelzőanyag mennyiség, ami a lent fekvő, (c.) szelvényig jellemzően széterjedt azonban jóval nagyobb, mint ami a hosszirányú (turbulens) diffúziós folyamatok kizárólagos (itt most nem vizsgált) és a vertikális turbulens diffúziót elhagyva) figyelembe vételével széterjedhetett volna. Ezt a kapcsolt megjelenését a diffúziós (itt most vertikális) és advekciónak hívjuk diszperzióknak.

Ha három dimenzióban oldjuk meg transzport egyenletet, megfelelő molekuláris vagy turbulens diffúziós tényezőket felhasználva, akkor nem szükséges semmi speciálisat tennünk, hogy a sebességprofil fent említett széthúzó hatását pontosan lekövethessük. A diszperzió ugyanis implicit módon benne van a három dimenziós transzport modellben.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(v_x \cdot C)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y \cdot C)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z \cdot C)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \cdot \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (308)$$

ahol, C , a koncentráció [ML^{-3}], t , az idő [T], x , y , és z a hossz-, kereszt-, és függőleges irányú koordináta [L]; v_x , v_y és v_z az áramlási sebesség [LT^{-1}], D_x , D_y és D_z a diffúziós tényezők [L^2T^{-1}] a megfelelő koordinátatengely szerinti irányokban.

A gyakorlati feladatok többségénél az v_x , v_y és v_z sebesség-összetevők, valamint a D_x , D_y és D_z (turbulens) diffúziós tényezők nem ismertek kielégítő pontossággal ahhoz, hogy érdemes lenne, különösen ha a matematikai nehézségeket is figyelembe vesszük, a turbulens diffúzió előbbi egyenletének három dimenzióban történő megoldása. Vízfolyások esetében az előbbi egyenlet vízmélység ($h[L]$) illetve szelvényterület ($A [L^2]$) szerint vett integrál alakjainak, azaz a turbulens diszperzió egyenleteinek az alkalmazása szokásos [Somlyódi, 1985].

A vízmélység szerint vett integrál alak a következő:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h \cdot \bar{C}) + \frac{\partial (h \cdot \bar{v}_x \cdot \bar{C})}{\partial x} + \frac{\partial (h \cdot \bar{v}_y \cdot \bar{C})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \cdot D_x^{**} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \cdot D_y^{**} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) \quad (309)$$

ahol, a felülvonás a sebességek és a koncentráció esetében a mélység menti átlagot jelöli, a D_x^{**} és a D_y^{**} pedig a kétdimenziós egyenlet hossz- és keresztirányú turbulens diszperziós tényezői. A (h) mélység értékével, ha a vizsgált szakaszon kereszt- és hosszirányban állandónak vehető egyszerűsíthetünk.

A kereszt-szelvény szerint vett integrál alak így írható fel:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \cdot \bar{C}) + \frac{\partial (A \cdot \bar{v}_x \cdot \bar{C})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \cdot D_L \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) \quad (310)$$

ahol, a kettős felülvonás a sebesség és a koncentráció esetében a kereszt-szelvény területre vonatkozó átlagot jelöli, a D_L pedig az egydimenziós egyenlet hosszirányú turbulens diszperziós tényezője [$L^2 T^{-1}$]. A (A) kereszt-szelvényterület értékével, ha a vizsgált szakaszon hosszirányban állandónak vehető egyszerűsíthetünk. A kettős felülvonást a későbbiekben nem fogjuk használni, hanem csak szóban utalunk az összefüggés kereszt-szelvény mentén átlagolt voltára.

Az előbbieket szerint tehát diszperzió alatt tehát azt a térbeli egyenlőtlenségek-ből adódó valójában advektív transzportot értjük, amely az átlagolás eredményeként jelenik meg (a vízrészecskék előresietnek, illetve elmaradnak az átlagos elmozduláshoz viszonyítva), és amely a diffúzióhoz hasonlóan a koncentráció kiegyenlítődsét idézi elő. A turbulens diszperziós tényező a diffúzív és diszperzív transzportot együttesen jellemzi és alapvetően a sebességtér függvénye. Értéke tehát annál nagyobb, minél szabálytalanabb jellegű a vízfolyás, illetve egy adott vízfolyás esetén, minél nagyobb az átlagolás alapjául szolgáló felületelem kiterjedése ($D_x < D_x^{**} < D_L$). Megjegyzendő, hogy előbbi zárójeles tagból a D_x még nem a diszperziós, hanem a sima diffúziós tényező.

A diszperzió egyenleteinek alkalmazásához még az alábbi korlátozások megtevéle is szükséges:

- A vízmélység szerint vett integrál egyenlet nem használható a szennyező anyag felhő azon kezdeti szakaszára, amely szakaszon belül a koncentráció jelentős mélység szerinti gradienssel rendelkezik, vagyis jelentős a koncentráció változása a mélységgel (sekély vízfolyások esetében ez a szakasz általában elhanyagolható hosszúságú).

- A keresztmetszvény szerint vett integrál egyenlet a szennyezőanyag felhőnek (csóvának) csak arra, a szennyezőanyag bebocsájtástól távolabbi szakaszára érvényes, amelynek keresztmetszvényein belül a koncentráció már többé-kevésbé kiegyenlített. A keresztmetszvény szerint vett integrál egyenlet használata ezért általában nem ajánlott széles vízfolyásokra [Somlyódi, 1985].

Vizsgáljuk a továbbiakban a transzportegyenlet szelvényterület mentén vett integrál alakját részletesebben. A továbbiakban ki szeretnénk használni annak az előnyét, hogy a koncentráció megoszlása a (c.) szelvényben lényegében csak egy dimenziós, mivel y , keresztirányban (előbbieken nem vizsgált) és z , vertikális irányban a vizsgált anyag már jól eloszlott (nincs jelentős koncentráció gradiens). Az előbbieken kívül a koncentráció eloszlása a (c.) pontban a Gauss-féle normális eloszlást követi, így alkalmazható a Fick-féle diffúziós törvény. Taylor elemzése a diszperzióra, ezt a későbbiekben bemutatjuk, egy olyan módszer, ami a diszperziós anyagfelhő széthúzó hatását egy 1D modellbe helyezi el. Az eredmény egy 1D transzport egyenlet egy jelentősebb hosszirányú elkeveredési tényezővel, amit hosszirányú elkeveredési tényezőnek nevezünk.

Amint Fischer et al. [1979] már rámutatott, a következőkben bemutatandó G. I. Taylor által leírt elemzés, amely a hosszirányú diszperziós tényező számítására vonatkozik a nyíró sebesség profil alapján egy külön érdekes példája G. I. Taylor géniuszának.

26.1. Az advektív diszperziós egyenlet levezetése

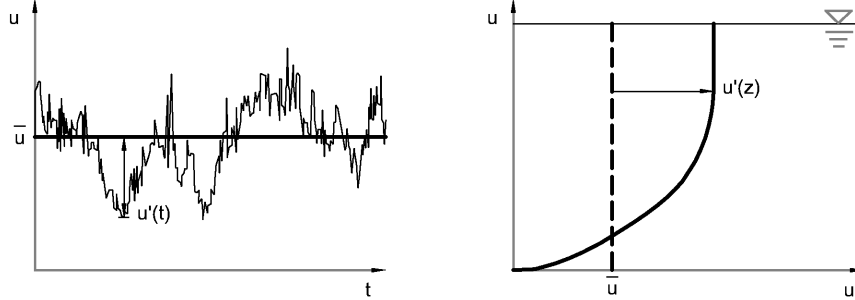
Hogy levezethessük a hosszirányú diszperzióra vonatkozó egyenletünket, használjuk a Reynolds féle dekompozíció előző fejezetben levezetett változatának módosított formáját a turbulencia kezelésére. A következő 47. ábra mutatja a sebességvektor egyik komponensének turbulens dekompozícióját, ahol megvan az átlagos sebesség ($\bar{v}(x_i)$), ami a három dimenziós tér x_i pontjában konstans és a sebesség fluktuáció ($v'(x_i, t)$), ami változik az időben, egyenlettel kifejezve:

$$v(x_i, t) = \bar{v}(x_i) + v'(x_i, t) \quad (311)$$

A nyíróáramlás dekompozíciója (az ábrán egy logaritmusos vertikális sebességprofil látunk egy folyóban) esetében van egy mélység szerint átlagolt sebességünk (\bar{v}), ami egy konstans értéket képvisel és egy deviációs (ettől eltérő) sebességünk ($v'(z)$), ami a mélység szerint különböző mértékben tér el az átlagtól, egyenletszerűen a következőképpen.

$$v(z) = \bar{v} + v'(z) \quad (312)$$

Explicit módon feltételezzük, hogy az \bar{v} és az $v'(z)$ független az x -től. A fő különbség ezek között az egyenletek között, hogy míg az előbbi egyenletben egy véletlenszerűen fluktuáló sebességkomponens $v'(x_i, t)$ van; addig az utóbbiban egy determinisztikus, nem véletlenszerű (és jellegetben teljes mértékben ismert) eltérést kifejező „fluktuációs” komponens $v'(z)$, amit inkább hívhatunk deviációs, mint fluktuációs.



47. ábra. A Reynolds féle dekompozíció összehasonlítása egy (adott ponton mért) turbulens áramlás (bal oldal) és egy (térben változó) nyíróáramlás (jobb oldal) sebességértékeinek esetére [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]

Amint a turbulens diffúzió esetében tettük, a koncentrációkra szintén alkalmazhatjuk a Reynolds-féle dekompozíciót.

$$C(x, t) = \bar{C}(x) + C'(x, t) \quad (313)$$

amely, szintén függ az x -től, és amelyre $C'(x, t)$ ismeretlen.

Felszerelve az előbbi ismeretekkel, készek vagyunk a Taylor-féle elemzést követni és alkalmazni egy nyílt felszínű csatornában kialakuló áramlás esetében a hosszirányú diszperzióra. A levezetéshez tételezzünk fel lamináris áramlást és végtelenül széles csatornát (medret) egy alsó és felső áramlás szempontjából záró határral, így a $v_y = v_z = 0$. A h mélység a csatornában legyen, mind hossz- mind keresztirányban állandó és a D_x és D_z tényezők is legyenek konstansok a vizsgált szakaszon. A nyomjelző anyagot egy keresztmetszvény mentén juttatjuk be így elhanyagolható az y , keresztirányú diszperzió ($\frac{\partial C}{\partial y} = 0$). A vezérlő, advektív.diffúziós egyenletünk így a következő formát ölti:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_z \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (314)$$

Az előbbi egyenlet a fent említett feltételek mellett három dimenzióban érvényes és tartalmazza a diszperziós hatásokat. A diffúziós tényezők lehetnek molekulárisak vagy turbulensek, attól függően, hogy lamináris vagy turbulens áramlásra alkalmazzuk az egyenletet. Helyettesítsük be a nyíróáramlásra vonatkozó Reynolds-féle dekompozíciós összefüggést az előbbi fenti egyenletbe.

$$\frac{\partial (\bar{C} + C')}{\partial t} + (\bar{v} + v') \cdot \frac{\partial (\bar{C} + C')}{\partial x} = D_x \cdot \frac{\partial^2 (\bar{C} + C')}{\partial x^2} + D_z \cdot \frac{\partial^2 (\bar{C} + C')}{\partial z^2} \quad (315)$$

Mivel már korábban megállapítottuk, hogy a hosszirányú diszperzió sokkal nagyobb, mint a hosszirányú diffúzió, ezért el fogjuk hanyagolni a D_x -es tagot az egyenlet rövidebbé tétele céljából (ezt később bármikor később visszaadhatjuk, egy additív diffúziós tagként). Szintén célszerű észrevenni, hogy a \bar{C} nem függvénye a z -nek, így a jobb oldali utolsó, D_z -re vonatkozó tagból kihagyható.

$$\frac{\partial (\bar{C} + C')}{\partial t} + (\bar{v} + v') \cdot \frac{\partial (\bar{C} + C')}{\partial x} = D_z \cdot \frac{\partial^2 C'}{\partial z^2} \quad (316)$$

Amint korábban tettük, egyszerűbb kezelni az egyenletet egy átlagos advekción sebességgel mozgó koordinátarendszerhez rögzítetten. Az előbbi célból vezessük be tehát a következő koordináta-transzformációt.

$$\xi = x - \bar{v} \cdot t \quad (317)$$

$$\tau = t \quad (318)$$

$$z = z \quad (319)$$

A láncszabályt felhasználva a differenciáloperátorok a következőképpen alakulnak át.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (320)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - v \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (321)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (322)$$

Az előbbi transzformációkat behelyettesítve a 316. egyenletbe, amelyen már alkalmaztuk a korábban említett egyszerűsítéseket a következő egyenlet adódik.

$$\frac{\partial (\bar{C} + C')}{\partial \tau} + \frac{\partial v' (\bar{C} + C')}{\partial \xi} = D_z \cdot \frac{\partial^2 C'}{\partial z^2} \quad (323)$$

Ez az egyenlet az, amely Taylor analízis effektív kiinduló pontját képezi.

Az előbbi diszkusszió már megmutatta, hogy a vertikális értelemben létező koncentráció és sebességgradiens az, ami a felelős a megnövekedett hosszirányú diszperzióért. Így ezen a ponton azt szeretnénk elérni, hogy eltávolítsuk a fluktuációt nem mutató tagokat (amelyeken nincs vessző) az előbbi egyenletből. Ez a lépés nagy bátorságot és alapos körütekintést igényel, hiszen azt jelenti, hogy éppen a $\frac{\partial \bar{C}}{\partial t}$ tagot dobjuk el, ami pont az a mennyiség, amit végül is szeretnénk előrejelezni. Amint látni fogjuk azonban, pontosan ez az, ami képessé tesz majd minket, hogy egy összefüggést határozzunk meg a diszperziós tényezőre vonatkozóan.

Abból a célból, hogy eltávolítsuk az állandó komponenseket az előbbi egyenletből, számítsuk ki az egyenlet mélység mentén vett átlagát és vonjuk ki ezt az átlagolt formát az eredeti egyenletből. A mélységi átlagolást kifejező operátor a következő:

$$\frac{1}{h} \int_0^h dz \quad (324)$$

Alkalmazva, tehát a mélység menti átlagolást a 323. egyenletre a következőt kapjuk.

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial \overline{v' \cdot C'}}{\partial \xi} = 0 \quad (325)$$

mivel, a C' és az v' mélység mentén átlagolt értéke is zérus, de az $\overline{v' \cdot C'}$ keresztorzata már nem lehet az. Ez az előbbi egyenlet tulajdonképpen az az egy dimenziós vezérlő egyenlet, amit keresünk. Vissza is fogunk térni tehát ehhez az egyenlethez, amint megtaláltuk az $\overline{v' \cdot C'}$ tagra vonatkozó összefüggést. Kivonva tehát a korábbi 323. egyenletünkből a most megkapott fenti összefüggést a következő adódik.

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} + v' \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} + v' \cdot \frac{\partial C'}{\partial \xi} = \frac{\partial \overline{v' \cdot C'}}{\partial \xi} + D_z \cdot \frac{\partial^2 C'}{\partial z^2} \quad (326)$$

amely összefüggés megadja nekünk a koncentráció eltérésekre (deviációkra) vonatkozó vezérlő egyenletünket. Ha ezt az előbbi egyenletet meg tudjuk oldani C' -re, akkor vissza tudjuk helyettesíteni a megoldást a $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial \overline{v' \cdot C'}}{\partial \xi} = 0$ -ba, hogy megkapjuk a \bar{C} -re vonatkozó óhajtott összefüggést.

Mielőtt megpróbáljuk megoldani az előbbi egyenletet, vegyük fontolóra minden egyes tag nagyságrendjét és a nagyságrendek alapján döntsük el vajon szükséges-e mindegyik tag figyelembevétel az egyenletben. Ezt az eljárást hívják scale (lépték vagy nagyságrend) analízisnek. A 46. ábra (c.) pontjára keresünk megoldásokat. Ebben a pontban egy részecskét a csóvában a sebességprofil mentén vizsgálva megállapítható, hogy $C' \ll \bar{C}$. Így a következő nagyságrendi relációk adódnak az egyes tagok között.

$$v' \cdot \frac{\partial C'}{\partial \xi} \ll v' \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \quad (327)$$

$$\frac{\partial \overline{v' \cdot C'}}{\partial \xi} \ll v' \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \quad (328)$$

Az előbbieket alapján a fenti egyenlőtlenségek bal oldalán lévő tagokat elhanyagolhatjuk és a 326-ból a következő összefüggés marad vissza.

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} + v' \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = D_z \cdot \frac{\partial^2 C'}{\partial z^2} \quad (329)$$

Ha megnézzük ezt az összefüggést a következő meglepő dolgot vehetjük észre. A turbulens diffúziós esetre, a $\overline{v' \cdot C'}$ keresztszorzat volt az, amelyik a turbulens diffúziós taggá vált. Most meg éppen eldobtuk ezt a tagot. Turbulens mozgásnál (ami itt a diszperzióra is a jellemző körülmény lesz), az előbbi keresztszorzat reprezentálja a fluktuáló sebességek miatt előálló anyagtranszportot. De nézzük csak meg egy kicsit közelebbről a fenti egyenlet középső tagját. Ez az elem egy advekciós tag, amely az átlagkoncentrációval (\overline{C}) dolgozik, de a nem véletlenszerű vertikális sebességeltérések ($v'(z)$) szerint. Így tehát ez egy transzport tag, ami a nyíró sebességprofil működését reprezentálja.

A következőkben nézzünk meg egy másik Taylor által elkészített éles elméjűségre valló egyszerűsítést. A diszperziós folyamat kezdeti szakaszában (46. ábra (a.) és (b.) pontjában) a koncentráció fluktuációja változó (unsteady). De lefelé haladva (a (c.) pontban), miután a sebességprofil hatása már mindenhol érvényesült, a vertikális koncentráció fluktuáció el fog érni egy állandósult (steady-state) állapotot (az anyagok vertikális irányú transzportja ekkor kiegyenlített lesz), amely egy konstans (idő invariáns) diszperziós tényező esetét reprezentálja. Ebben az állandósult állapotban az előző egyenlet leegyszerűsödik (a koncentráció fluktuáció időbeli változását reprezentáló tag kiesik).

$$v' \cdot \frac{\partial \overline{C}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \cdot \frac{\partial C'}{\partial z} \right) \quad (330)$$

amely, összefüggésben, a megelőzőhöz képest, egy nem állandó D_z tényezőt tételeztünk fel.

Kétszeres z -szerinti integrálással C' -re megoldva az előbbi egyenletet a következőt kapjuk.

$$C'(z) = \frac{\partial \overline{C}}{\partial \xi} \cdot \int_0^z \frac{1}{D_z} \cdot \int_0^z v' dz dz \quad (331)$$

amely egyenlet ígéretesnek látszik, de még mindig tartalmaz egy ismeretlen \overline{C} -ra vonatkozó tagot.

Lépjünk vissza egy pillanatra és vegyük fontolóra mennyi a hossz irányban értelmezett tömeg-fluxus. A mozgó koordinátarendszerünkben, csak egy sebességünk van, így az advektív tömeg-fluxus (q_a) a következő kell, hogy legyen:

$$q_a = v' \cdot (\overline{C} + C') \quad (332)$$

Hogy megkapjuk az integrált tömeg fluxust (kereszt-szelvényre vonatkozó anyagáramot), számítsuk ki az előbbi összefüggés mélység szerinti átlagát (vigyázzunk az átlagos fluxus, még nem a kereszt-szelvényre vonatkozó anyagáram).

$$\overline{q_a} = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h v' \cdot (\overline{C} + C') \cdot dz = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h v' \cdot C' \cdot dz = \overline{v' \cdot C'} \quad (333)$$

Az előbbi egyszerűsítésnél felhasználtuk, hogy $v' \cdot \overline{C}$ szorzat mélység szerinti átlaga zérus.

Behelyettesítve a 331-es, C' -re vonatkozó megoldást az előbbi összefüggésünkbe, a mélység mentén átlagolt tömegfluxusra adódik.

$$\bar{q}_a = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h v' \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \cdot \int_0^z \frac{1}{D_z} \cdot \int_0^z v' dz dz dz \quad (334)$$

A $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi}$ tagot kivehetjük az integrál jel elé, mivel független a z -tól. A kapott összefüggésre a Fick-féle törvény tömeg-fluxusra vonatkozó alakját alkalmazva kapjuk a következőt.

$$\bar{q}_a = -D_L \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \quad (335)$$

ahol, a D_L tag jelentése:

$$D_L = -\frac{1}{h} \cdot \int_0^h v' \cdot \int_0^z \frac{1}{D_z} \cdot \int_0^z v' dz dz dz \quad (336)$$

Mivel a D_L tagra vonatkozó összefüggésünk csak a mélység és a sebességprofil függvénye (meg a D_z paraméteré, ami viszont szintén az előbbiek alapján adható meg lásd. a korábbi összefüggéseket) D_L értékét bármilyen sebességprofilra számíthatjuk integrálással. Az előbbiek szerint tehát sikerült egy analitikus megoldást kapnunk a hosszirányú diszperziós tényezőre.

Az utolsó lépés, hogy behelyettesítsük a kapott eredményünket a mélység szerint átlagolt ($\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial v' \cdot C'}{\partial \xi} = 0$) vezérlő egyenletünkbe. Vegyük észre azonban, hogy a mélység szerint átlagolt vezérlő egyenletünk nemcsak mélység szerint átlagolt, hanem keresztirányban is, hiszen a kiindulási feltételek között szerepelt, hogy a keresztirányú koncentráció gradiensünk zérus volt.

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_L \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \right) \quad (337)$$

Az előbbi egyenlet az eredeti, álló koordinátarendszerre visszatranszformálva megadja az egy dimenziós advektív diszperziós egyenletet.

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_L \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) \quad (338)$$

amelyben, a D_L a 336.egyenlet szerint korábban definiált [Socolofsky and Jirka, 2005].

26.2. Hosszirányú diszperziós tényezők számítása

Az előző részben megadott analitikus megoldás alapján próbáljunk meg számítási módszereket találni gyakorlati problémák megoldásához. Valódi vízfolyások esetében, általában inkább a keresztirányú (y koordinátatengely iránya) nyíróáramlás, mint a vertikális (z irányú) irányú nyírás játszik fontosabb szerepet. A keresztirányú nyíróáramlás esetére Fischer et al. [1979] az előző részben leírthoz hasonló elemzés alapján vezette le a következő összefüggést:

$$D_L = -\frac{1}{A} \cdot \int_0^W v' \cdot h \cdot \int_0^y \frac{1}{D_y \cdot h} \cdot \int_0^y v' \cdot h \cdot dy dy dy \quad (339)$$

ahol, A , a keresztmetszvény területe [L^2] (korábban már definiált), W pedig a szélessége [L] a vizsgált vízfolyásnak. Függetlenül attól melyik összefüggést választjuk, a kérdés még mindig fennáll, hogy hogyan tudjuk ezeket az integrálokat a legalkalmasabb módon kiszámítani.

26.2.1. Analitikus megoldás

Lamináris áramlások esetére létezhetnek analitikusan megadható sebesség profilok és a 336 összefüggés analitikusan is számítható. Fischer et al. [1979] példáját követve, a legegyszerűbb áramlás a két végtelen felületű lap közötti áramlás, ahol a felső lap V relatív sebességgel mozog az alsó laphoz képest. Erre az esetre D_L értékre adódik:

$$D_L = \frac{V^2 \cdot d^2}{120 \cdot D_z} \quad (340)$$

ahol, a d a két lap közötti távolság [L].

Hasonlóan megadható a csőben kialakuló lamináris áramlás esetére a D_L .

$$D_L = \frac{V_0^2 \cdot a^2}{192 \cdot D_r} \quad (341)$$

ahol, a a cső sugara [L], V_0 a cső tengelyében mérhető sebesség [LT^{-1}] és D_r a radiális diffúziós tényező [L^2T^{-1}].

Turbulens áramlásokra az elemzés hasonló ahhoz, amit a turbulens diffúzióval foglalkozó alfejezetben végrehajtottunk és az eredmény a következő

$$D_L = -\frac{1}{h} \cdot \int_0^h v' \cdot \int_0^z \frac{1}{D_z} \cdot \int_0^z v' dz dz dz \quad (342)$$

összefüggés szerinti formáját tartja meg. Az összefüggésbe a turbulens diffúziós tényezőt és az átlagos turbulens nyírósebesség profilt helyettesítjük be a D_z és az v' helyére. Ezek alapján egy csőben beálló turbulens áramlás hosszirányú diszperziós tényezője a következő.

$$D_L = 10,1 \cdot a \cdot v_* \quad (343)$$

ahol, v_* [LT^{-1}] a már korábban definiált nyíró vagy más néven fenékcúsztató sebesség.

Egy különös fontossággal bíró eredmény egy végtelen széles, h mélységű nyílt felszíni csatornára érvényes összefüggés. Logaritmikus sebesség profilt használva a Kármán-féle konstans $0,4$ -nek véve a diszperziós tényező a következőképpen számítható.

$$D_L = 5,93 \cdot h \cdot v_* \quad (344)$$

Összehasonlítva az eredményt a hosszirányú turbulens diffúzióra kapott összefüggéssel az előző fejezetből ($D_{t,x} = 0,15 \cdot h \cdot v_*$) láthatjuk, hogy a D_L -re vonatkozóan hasonló alakú összefüggést kapunk ($\propto h \cdot v_*$), azonban a D_L sokkal nagyobb, mint a hosszirányú turbulens diffúziós tényező. Valódi nyílt felszíni csatornák esetére, ahol a két part közötti keresztirányú nyírósebesség profil dominánsá válik, a D_L -re vonatkozó szorzótényező 5 és 7000 között változhat [Fischer et al., 1979].

26.2.2. Numerikus integrálás

Számos gyakorlati mérnöki alkalmazás esetében, a változó medergeometria lehetetlenné teszi, hogy egy analitikus nyíró sebesség profilt becsljünk. Ebben az esetben egy alternatív lehetőség, hogy a vízfolyás keresztiszelvényét szektorok sorozatára bontjuk szét, minden egyes szektorban egy jellemző függély mentén, több helyen megmérjük a sebességet (a klasszikus vízhozammérés nagyobb vízfolyásokon hasonló, így az adatok sok időpontra vonatkozóan rendelkezésre állhatnak). A sebességekből szektoronként átlagot számolunk, így a keresztirányú sebességprofil rendelkezésre áll, ezután számítjuk a vízfolyás keresztiszelvényre vonatkozó átlagsebességétől való eltéréseket. A sebesség eltérések alapján a

$$D_L = -\frac{1}{A} \cdot \int_0^W v' \cdot h \cdot \int_0^y \frac{1}{D_y \cdot h} \cdot \int_0^y v' \cdot h \cdot dy \cdot dy \cdot dy \quad (345)$$

összefüggés segítségével numerikus integrálást alkalmazva számítjuk a diszperziós tényező értékét.

26.2.3. Mérnöki becslés

Amikor csak durva mérések állnak rendelkezésre, akkor is valahogyan szükséges egy mérnöki szempontból okszerű becslése a hosszirányú diszperziós tényezőnek. Hogy ezt megtehesük, írjuk fel a numerikus integrálásnál is felhasznált előző (339) összefüggésünket dimenzió nélküli (*-al jelölve) formában.

$$y = W \cdot y^*; v' = \sqrt{v'^2} \cdot v'^*; D_y = \overline{D_y} \cdot D_y^*; h = \bar{h} \cdot h^* \quad (346)$$

ahol, a felülvonások keresztiszelvény menti átlagot jelentenek.

Amint már elmondtuk a vízfolyások hosszirányú diszperzióját a keresztirányú nyíró sebesség profilok határozzák meg dominánsan. Ez az amiért y és D_y van a D_L -re vonatkozó fenti egyenletben feltüntetve. Az előbbi tagokat dimenziómentes formában behelyettesítve a D_L -re vonatkozó korábbi (339) egyenletbe, a következőt kapjuk.

$$D_L = \frac{W^2 \cdot \overline{v'^2}}{\overline{D_y}} \cdot I \quad (347)$$

ahol,

$$I = - \int_0^1 v'^* \cdot h^* \cdot \int_0^{y^*} \frac{1}{d_y^* \cdot h^*} \cdot \int_0^{y^*} v'^* \cdot h^* \cdot dy^* dy^* dy^* \quad (348)$$

Fontos megjegyezni, hogy itt a d_y^* nem a keresztirányú diszperziós tényezőt jelöli, hanem a D_y keresztirányú diffúziós tényező dimenziómentes formáját. Fischer et al. [1979] kimutatta, hogy a legtöbb gyakorlati esetben megfelelő, ha az I -t a 0,01-0,1 tartományban vesszük fel.

Egy lépéssel továbbmenve, újabb nagyságrendi becslések vezethetők be Fischer et al. [1979] vizsgálatai alapján. Kísérletek és terepi mérések alapján megállapítható, hogy a $\frac{v'^2}{\bar{v}^2}$ arány 0,2±0,03 között vehető fel. Szabálytalan vízfolyásokra a $\overline{D_y} = 0,6 \cdot h \cdot v_*$ adható meg a korábbiak szerint. Ezeket az értékeket behelyettesítve a $D_L = \frac{W^2 \cdot \bar{v}^2}{D_y} \cdot I$ -ba, az $I=0,033$ értéket felvéve adódik.

$$D_L = 0,011 \cdot \frac{W^2 \cdot \bar{v}^2}{h \cdot v_*} \quad (349)$$

amely összefüggés egy durván 4-szeres szorzón belül volt általában érvényes a vizsgálatok alapján. Az eltérések elsődlegesen az elemzés során egyes faktorok figyelembe nem vételéből adódtak, ilyen tényezők például a recirkulációk (visszaforgások) és holt zónák (holt terek).

26.2.4. Geomorfológiai alapú becslés

Deng et al. [2001] az előbbieken tárgyalt mérnöki becsléshez hasonló megközelítést publikáltak a diszperziós tényezők egyenes vonalvezetésű vízfolyások esetében történő becslésére a jellemző geomorfológiai paraméterek alapján. Az általuk megadott kifejezés a következő alakú.

$$\frac{D_L}{h \cdot v_*} = \frac{0,15}{8 \cdot \epsilon_{t0}} \cdot \left(\frac{W}{h} \right)^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{\bar{v}}{v_*} \right)^2 \quad (350)$$

ahol, ϵ_{t0} egy dimenzió nélküli szám, amely a következőképpen adható meg.

$$\epsilon_{t0} = 0,145 + \frac{1}{3520} \cdot \frac{\bar{v}}{v_*} \cdot \left(\frac{W}{h} \right)^{1,38} \quad (351)$$

Ezek az egyenletek stabil medrű folyók hidraulikájának és geometriájának kapcsolatán alapulnak, avval a feltételezéssel, hogy az egyenletes áramlásra vonatkozó formula érvényes helyi mélység szerint átlagolt változókra. Deng et al. [2001] az előbbi összefüggés által megadott becslést összehasonlította a 349. egyenlettel számított becsléssel és 73 db. terepi mérésorozat adataival. Több, mint 64%-a az előbbi [Deng et al., 2001] egyenlettel történt becslésnek a mérésekből származó értékekkel összehasonlítva a $0,5 \leq D_{L, \text{becslés}} / D_{L, \text{mérés}} \leq 2$ tartományon belülre esett. Ez a pontosság átlagban jobb, mint ami a 349. összefüggés alapján adódott, de megjegyzendő, hogy néhány esetben a Fischer-féle egyenlet (349) jobb eredményt adott.

26.2.5. Nyomjelzős vizsgálatok használata

Az egyik leginkább megbízható módja a diszperziós tényezők számításának nyomjelzős vizsgálatok végzése. Fontos figyelni arra, hogy mivel a D_L a sebességprofiltól függ, tehát általában a vízhozamnak is függvénye. Így a nyomjelzős vizsgálattal egy adott vízhozamnál meghatározott diszperziós tényező nem szükségszerűen alkalmazható egy másik helyzetre eltérő vízhozam-tartományban. Az ilyen esetekben valószínűleg az adja a legjobb megoldást, hogy nyomjelzős mérések sorozatát végezzük el különböző vízhozam tartományokban. Egy másik megoldás egyetlen nyomjelzős vizsgálat esetében, hogy annak eredményét összehasonlítjuk pl. a $D_L = 0,011 \cdot \frac{W^2 \cdot \bar{v}^2}{h \cdot v_*}$ egyenlet alapján történő becsléssel, acélból hogy az összevetés alapján az egyenletet alkalmasabbá tehesük a más vízhozam-tartományokban (vagy egyéb körülmények között) történő becslésre.

26.2.6. Elkeveredés vizsgálata vízfolyásokban

Egy elkeveredési jellemzők becslésre végzett nyomjelzős vizsgálat részeként pontszerű forrásként nyomjelzőt adagolunk folyamatosan egy felszíni vízfolyásba a keresztiszelvény középső részén. Tárgyaljuk meg a lezajló elkeveredési folyamatokat és azokat a hossz skálákat, amelyek a bejuttatott nyomjelző útját befolyásolják.

Bár a bejuttatott nyomjelző kezdeti vertikális impulzusa általában jó függélymenti elkeveredést idéz elő, tételezzük fel most azt, hogy a diák nagyon óvatosan csak a felszínre juttatja ki a nyomjelzőt. Ebben az esetben a vertikális turbulens diffúzió fogja elkeverni a nyomjelzőt a mélység szerint és a „vertikális elkeveredés egy vízfolyásban” című alfejezet példájából tudjuk, hogy a bejuttatott anyag vertikálisan teljesen elkeveredtként kezelhető a bebocsátási ponttól,

$$L_z = 12 \cdot h \quad (352)$$

ahol, h a vízfolyás mélysége [L].

Amint az anyagfelhő (csóva) lefelé mozog, folyásirányban a keresztirányú turbulens diffúzió elkeveri a nyomjelzőt keresztirányban [Socolofsky and Jirka, 2005].

Amennyiben arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi az a távolság, ami alatt a vízfolyás sodorvonalában (az előbbieket a keresztiszelvény középvonalát említettük, ami kanyarulatmentes szakaszon megegyezik a sodorvonallal) permanens formában bebocsátott szennyezőanyag (mélység mentén átlagolt jellemzőkkel) csóvájának széle mikor éri el a vízfolyás partját először definiálnunk kell a csóva szélét (48. ábra) Ezt tegyük meg a keresztirányú szórás (σ_y) segítségével, amely a csóva keresztirányú eloszlására a Gauss-féle normális eloszlás analógiája, amely a \bar{C} , mélység mentén átlagolt koncentráció eloszlását adja meg,

$$\bar{C}(x, y) = \frac{M}{h \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D_y \cdot \bar{v} \cdot x}} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{v}}{4 \cdot D_y \cdot \bar{v} \cdot x} \cdot y^2\right) \quad (353)$$

alapján a következőképpen írható.

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{2 \cdot D_y^{**} \cdot x}{\bar{v}}} \quad (354)$$

ahol, \bar{v} a hosszirányú sebesség átlaga, $[LT^{-1}]$, D_y^{**} a keresztirányú turbulens diszperziós tényező, x pedig a hossz menti koordináta $[L]$. A csóva szélét definiáljuk most úgy, hogy ahhoz a legnagyobb koncentráció bizonyos rögzített százaléka tartozzék. Amennyiben ez 10%, akkor $y = 2,15 \cdot \sigma_y$, és így a csóva a szélessége ($W_{cs}[L]$) a szimmetria figyelembevételével a következő:

$$W_{cs} = 4,3 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot D_y^{**} \cdot x}{\bar{v}}} \quad (355)$$

A $W \approx W_{cs}$ feltételből, ahol W a vízfolyás szélessége, a partélek eléréséhez szükséges távolság az elkeveredés egyik fontos jellemzője a következő.

$$L_1 = 0,027 \cdot \frac{\bar{v} \cdot W^2}{D_y^{**}} \quad (356)$$

ahol, L_1 az úgynevezett első elkeveredési távolság $[L]$.

Az előbbi L_1 -re vonatkozó egyenlet alapján viszont az alábbi lényeges következtetések vonhatóak le.

- Az L_1 egyenesen arányos a sebességgel és fordítottn arányos a diszperziós tényezővel,
- L_1 a szélesség négyzetével nő. Ez magyarázza azt, hogy míg értéke pl. Sajó nagyságú vízfolyásoknál néhány száz méter, addig a Duna esetében 100 km-t is elérhet.

A koncentráció szelvényen belüli teljes elkeveredéséhez (kiegyenlítődéshöz) szükséges távolság (L_2 úgynevezett második elkeveredési távolság) jelentősen nagyobb, mint az L_1 , de a Gauss-féle analóg egyenletből (353) nem vezethető le, mivel a megoldás a partélek hatását nem veszi figyelembe. Ha a partélek hatását is figyelembe vesszük, de a bevezetés parti, a L_2 távolság durván az L_1 háromszorosának adódik.

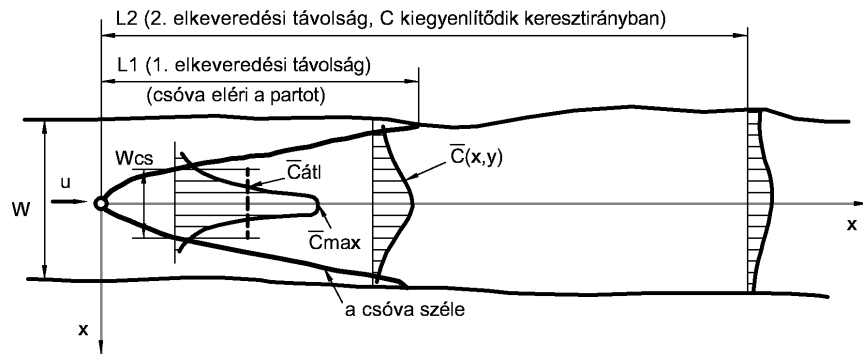
$$L_2 \approx 3 \cdot L_1 \quad (357)$$

Egy másik megközelítés szerint újra a „vertikális elkeveredés egy vízfolyásban” című alfejezet okfejtését segítségül hívva a nyomjelzőt keresztirányban teljesen elkeveredtetnek vehetjük a bebocsájtási ponttól,

$$L_y = \frac{W^2}{3 \cdot h} \quad (358)$$

ahol, W a vízfolyás szélessége $[L]$. Ez az egyenlet tehát egy más megközelítésemből ad becslést a L_2 $[L]$, úgynevezett második elkeveredési távolságra.

A bebocsájtási pont és az L_z távolság között az csóva teljes mértékben három dimenziós mozgású és nem kell egyszerűsítéseket tennünk a transzport egyenletben. Az L_z távolságon túl a csóva vertikálisan elkeveredett és a hosszirányú



48. ábra. Szennyezőanyagok permanens elkeveredésének szemléltetése keresztirányban (középvonalban történő bevezetés esete [Somlyódi, 1985, nyomán])

diszperzió fogalma használható. Az L_y -nál kisebb távolságokra azonban két dimenziós modellt célszerű használni, ahol keresztirányú és hosszirányú diszperziós tényezőket célszerű használni a mélységi átlagolás miatt. Az L_y távolságon túl az egy dimenziós hosszirányú diszperziós modell alkalmazható (keresztmetszely szerint átlagolt jellemzőket használva).

rész X

A Szivárgás

Bevezetés

Számos gazdasági szempontból is fontos természeti folyamat működik a felszín alatti közegben, amely a felszín alatti víz mozgása által meghatározott vagy az által befolyásolt. Mind gazdasági mind környezetvédelmi szempontból fontos tehát, hogy megértsük ezen vízmozgás sajátosságait, az azt befolyásoló faktorokat, hatásokat és a felszín alatti áramlási rendszerek kialakulását. Az előbbiekhöz kapcsolódóan lényeges az is, hogy eljárásokat fejlesszünk ki ezen áramlások tanulmányozására, pontos matematikai formában történő leírására és esetleges módosítására.

A felszín alatti vízmozgás meghajtó erejének, térbeli áramlási mintázatának és befolyásoló faktorainak tanulmányozása, az áramlás mind tudományos, mind gyakorlati szempontból lényeges volta miatt, régóta a hidrológusok, hidrogeológusok, mérnökök és manapság egyre inkább az általános földtudománnyal, környezetvédelemmel foglalkozó szakemberek érdeklődésének középpontjában áll.

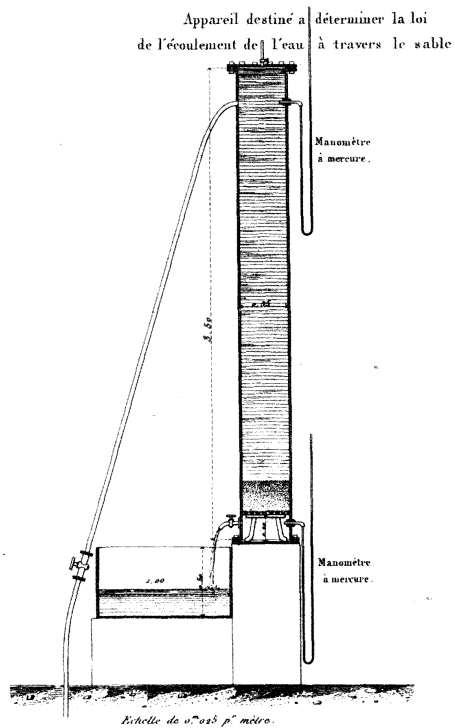
27. A Darcy-féle kísérlet

A felszínalatti közegben jellemző áramlás és az azt befolyásoló faktorok közötti alapvető kapcsolatot laboratóriumi kísérleti alapján egy francia mérnök Henry Darcy (1856) állapította meg elsőként. A törvény kidolgozása Dijon városának vízellátása (forrásokból, kutakból) kapcsán készített tanulmányhoz kapcsolódik. Az folyadék áramlására felírt törvény ekvivalens az elektromos áramlásra vonatkozó Ohm törvénnyel és a hőáramlásra vonatkozó Fourier törvénnyel. Az ekvivalencia azért is jogos, mivel az áramlásokra vonatkozó fő fizikai törvényeket veszi alapul. A Darcy által kidolgozott és később róla elnevezett törvény jelenleg a felszín alatti víz mozgásának tanulmányozásánál alapvető érvényű.

Darcy a szivárgással kapcsolatos kísérleteit 3,00 m effektív hosszúságú és 0,35 m átmérőjű homokkal töltött fémcsövekben végezte (49. ábra, Darcy [1856]), amely fémcsövek alsó és felső végeihez nyomásmérő manométerek voltak kapcsolva. A méréssorozat során a homok szemcseátmérőjét és az átfolyó vízhozamot változtatta. A vizsgálatok azt mutatták, hogy az átfolyó vízhozam, mivel az átmérő állandó volt, azonos szemcseméretű homoknál a manométerekben mért nyomáskülönbséggel egyenes arányban változott. A homok szemcseméretének csökkenésével pedig azonos nyomáskülönbség mellett az átfolyó hozam csökkent. Az előbbieket szerint a Darcy-által megállapított összefüggés az átfolyó hozamra ($Q[L^3T^{-1}]$).

$$Q = A \cdot k \cdot (h_1 - h_2) / \Delta l \quad (359)$$

ahol, A , a homokkal töltött oszlop keresztmetszeti területe [L^2], Δl , a mano-



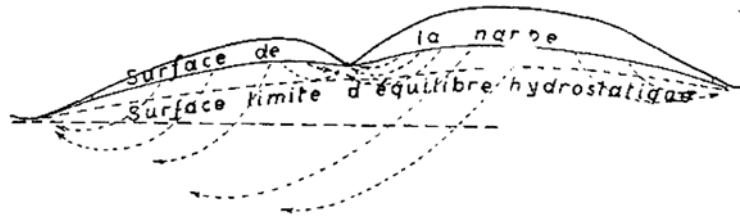
49. ábra. Az eredeti Darcy-féle kísérleti elrendezés [Darcy, 1856]

méterek mérési pontjai közötti hossz, h , a manométerekben mért nyomómagasság $\frac{p_w}{\chi_w} [L]$ a manométer egy adott viszonyítási sík fölötti mérési magasságához $z [L]$ hozzáadva $h = z + \frac{p_w}{\chi_w} [L]$, k , az egyenletben egy arányossági tényező, amely a szemcseméret növekedésével növekedett, jelenleg hidraulikus vezetőképességnek vagy szivárgási tényezőnek hívjuk [LT^{-1}].

A szivárgási tényező mérésére a laboratóriumban, jelenkorban használt, *permeaméter* elnevezésű, berendezés nagyon hasonló kialakítású az eredeti Darcy-féle kísérlet elrendezéséhez.

28. Felszín alatti áramlási rendszerek tanulmányozása

Az egyik legkorábbi publikáció a felszín alatti áramlás térben osztott rendszereinek leírásáról D'Andrimont-tól származik 1906-ból (50. ábra, Tóth [2006]). Az ábra közepén lévő völgy aljához konvergáló áramvonalak egy helyi áramlási rendszert mintáznak. Megfigyelhető azonban, egy erre a helyi áramlási rendszerre szuperponálódó regionális áramlási rendszer is, ami az előbbit magába



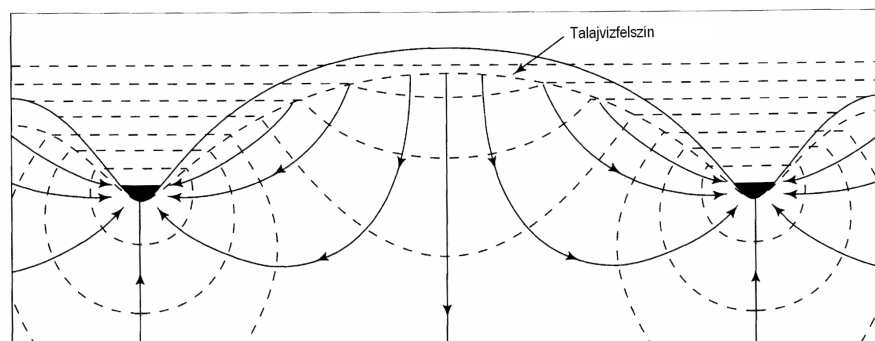
50. ábra. Egy felszín alatti szabad felszínű áramlási rendszer komplex mintázata (forrás D'Andrimont 1906 in Tóth 2006)

foglaló nagyobb vízgyűjtőhöz tartozik és áramvonalai egy nagyobb fő völgy felé irányulnak. Az ábra egy lényegét megfogó általánosítása egy nagyobb vízgyűjtőben jelentkező komplex áramlási rendszereknek. Bár az előbbieken vázolt elképzelés helyes, csak egy személy gondolatban alkotott képe marad mindaddig, amíg meg nem születik az elképzeléshez kapcsolódóan a rendszer és a folyamat matematikai leírása, ami lehetővé teszi mások számára is a reprodukálást és a továbbfejlesztést.

Az átmenetet a felszín alatti áramlási rendszerek spekulatív megközelítéséből a szigorú matematikai formulákat alapul vevő leírás felé Hubbert [1940] munkája jelentette „*The Theory of Ground Water Motion*”. A víz mozgása a felszín alatt potenciálos szivárgás. A potenciált, Φ , Hubbert [1940] úgy definiálta, mint „*egy olyan fizikai mennyiséget, amely egy áramlási közeg bármely pontjában meghatározható és amely nagyságával meghatározza térbeli irányultágtól függetlenül a szivárgás irányát oly módon, hogy a szivárgás mindig a nagyobb potenciálú hely felől a kisebb potenciálú hely felé történik*” (51. ábra).

A potenciál konstans értékeivel jellemzett pontok összessége az ún. *ekvipotenciális* felület. A gradiens az ekvipotenciális felületre merőleges és a potenciál növekedésének irányába mutat. Nagysága megadja a potenciálnak a gradiens irányában mért egységnyi hosszra eső változását. Ebben az esetben a gradiens vektor a sebesség, és így a gradiens-vektorokra érintőlegesen illeszkedő görbék az áramvonalak. Az áramvonalak (ψ) ezek szerint merőlegesek az ekvipotenciális felületekre, amelyek síkbeli áramlásnál ekvipotenciális görbék (φ). Az előbbieken miatt mondhatjuk, hogy a potenciálvonalak (ekvipotenciális görbék) és az áramvonalak egymásnak ortogonális trajektóriái (51. ábra), a közbezárt elemi idomok, pedig görbevonaltú téglalapok [Haszpra, 2002].

1962-ben a magyar származású Tóth József Kanadában egy új felfedezést tett. A fenti Hubbert-féle ábra áramvonalrendszerét terepi tapasztalati alapján megkérdőjelezte. Hubbert [1940] szerint ugyanis a beszivárgó vizek mind a folyóvölgy feneké felé tartanak, mivel azt feltételezte, hogy a folyómeder hasonló egy lecsapoló, víztelenítő árokhoz. A Hubbert-féle a folyóvölgy fenekéhez konvergáló áramkép, ezen a konvergencián, mint előzetes feltételezésen alapul és nem pedig egy valódi áramképszerkesztés eredménye. Tóth [1962] a Laplace-egyenlet megoldásával egy egyszerű geometriájú vízgyűjtő esetében meghatározta, hogy



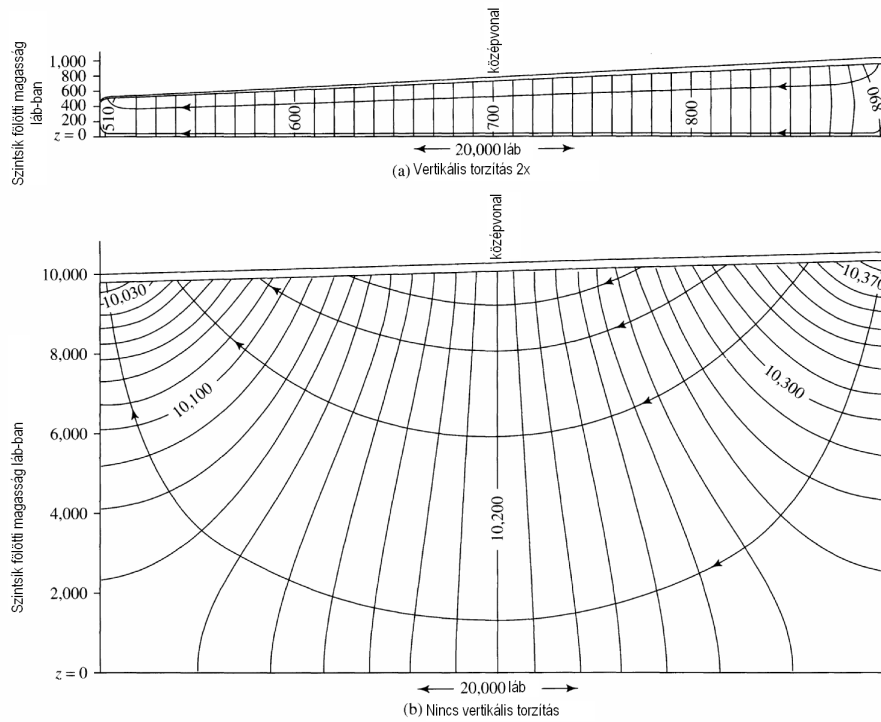
51. ábra. Felszín alatti vizek áramlási rendszereinek közelítő ábrázolása egy idealizált metszetben, homogén és izotróp felszín alatti közegben egy horizontális vízzáró réteg fölött. Az áramvonalak végükön az áramlás irányát megadó nyílal, folytonos vonallal jelöltek az un. ekvipotenciális vonalak pedig szaggatott vonallal (forrás Hubbert 1940 in Tóth 2006).

hová akar a víz valójában eljutni magától az előbbi (Hubbert-féle) előfeltételezés figyelmen kívül hagyásával. Tóth [1962] elemzése alapján azt találta (52. ábra), hogy a talajvíz áramlási vonalai nemcsak a völgy aljára koncentrálnak, hanem az általa vizsgált síknak tekinthető lejtő (idealizált fél vízgyűjtőmetszet) teljes alsó fele *kilépési zónának* (vagy más néven *feláramlási zónának*) számít a szivárgás szempontjából.

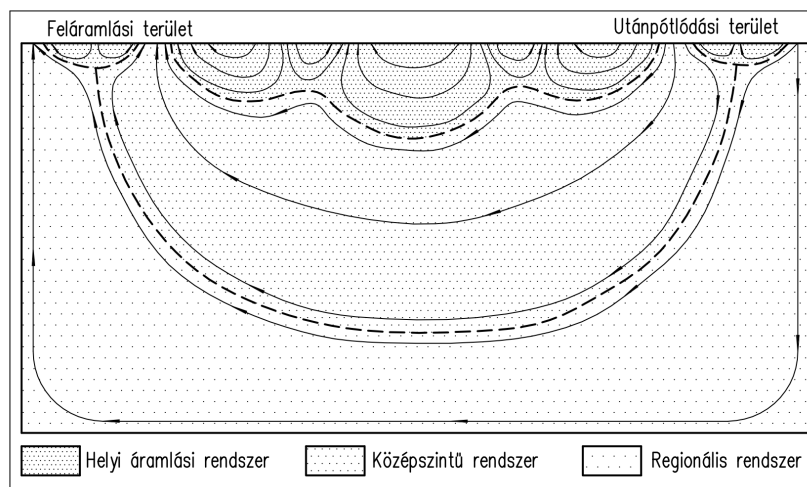
Tóth [1963] később úgy találta, hogy az általa először vizsgált síknak tekinthető völgyoldal túlzott egyszerűsítésnek számít, így megoldotta a problémát a sík lejtőre szuperponálódó szinuszosan változó felszín esetében is (53. ábra). Bár a vizsgált rendszer homogén és izotróp volt, a kapott áramlási kép mégis igen komplex úgynevezett hierarchikusan egymásba ágyazott áramlási rendszereket mutat. A 53. ábrán a sík lejtőre szuperponálódó hullámzó felszín nincs megjelenítve, de az áramlási rendszerekkel összefüggésben a következőképpen értelmezhető:

- A lejtő, amely a fő vízgyűjtő egyik oldali keresztmetszetét jelképezi, felső része a fő beszivárgási terület, alsó része pedig a fő feláramlási zóna.
- A hullámzó felszín felső részei a közbenső hegyhátakat jellemzik, ezek az alsóbb szintű áramlási rendszerek beszivárgási területei. A szinuszos hullámok alsó részei pedig a mellékvölgyeket jelzik, amelyek a helyi és középszintű rendszerek feláramlási zónái.

Egy szerencsés egybeesés, hogy Alan Freeze a kaliforniai Berkeley Egyetemen éppen ez időtájt keresett egy Ph.D. témát azzal a szándékkal, hogy az éppen terjedőfélben lévő numerikus módszerek előnyeit bemutassa a talajvízzel kapcsolatos problémák esetében. Freeze Tóth vízgyűjtők összetett áramlási



52. ábra. Elméleti potenciálmegoszlás és áramlási mintázat különböző mélységű vízzárórtegek esetében sík lejtőjű vízgűjtő esetében [Tóth, 1962].



53. ábra. A különböző szintű felszín alatti víz áramlási rendszerek elvi vázlata [Tóth, 1963, nyomán]

rendszerre vonatkozó eredményeit felhasználva egy három cikkből álló briliáns publikáció sorozatot (Freeze és Winterspoon 1966, 1967, 1968 in Tóth 2006) közölte a felszín alatti áramlási rendszerek numerikus, de az analitikussal összhangban lévő, módszerekkel való számításáról. Az új numerikus számítási eljárás a gravitáció által meghatározott felszín alatti szivárgást vízgyűjtő szinten is képes volt számítani tetszőleges terepfelszín, heterogén és anizotróp felszín alatti közeg esetében is.

A fenti 1962 és 1968 között megjelent publikációk együttesen alapvető befolyást gyakoroltak a hidrogeológia tudományának fejlődési irányára és tématerületére. Az addigi víztartóra és kutak hidraulikájára vonatkozó megfontolások mellett a felszín alatti vízkészletekkel foglalkozó kutatók egy vízgyűjtő szintű megközelítés alapján is vizsgálódhattak. A tudományterület bővült a cikkek által elkezdődő célraorientált terepi vizsgálatokkal, amelyek a felszín alatt mozgó vizet, mint geológiai elemet vették figyelembe. Az előbbieken alapján a regionális áramlási rendszerek elképzelése számos egyéb tudományterületre is beépült, úgy, mint a talajtanba, az olajbányászatba, a talajmechanikába, a szedimentológiába, stb. Így a hidrogeológia felszín alatti áramlásokkal foglalkozó része egyúttal mind alap-, mind speciális tudományterületévé is vált a föld- és hidrogeológiai tudományoknak.

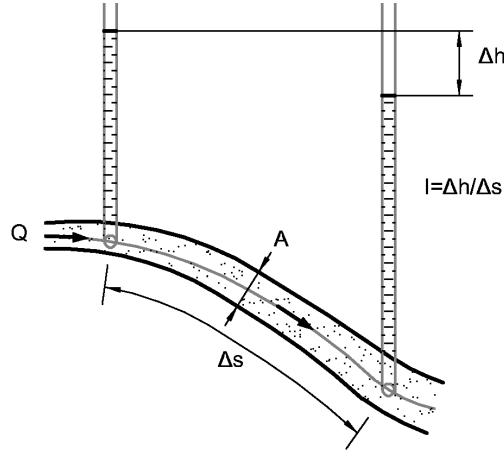
29. A hidraulikus nyomás, a nyomómagasság és a potenciál értelmezése

Valójában a korábban Hubbert [1940] által definiált potenciál abszolút nagysága önmagában nem mérhető, ugyanakkor annak változása igen. Tehát a potenciált mindig egy viszonyítási helyhez képest vizsgáljuk.

A folyadék áramlása porózus közegben egy mechanikai folyamat. A folyadék mozgását előidéző erőknek le kell győzniük azt a súrlódási erőt, amely a mozgó folyadék és a közeg szemcséi között lép fel. A szivárgás folyamán a súrlódás következtében a mechanikai energia irreverzibilis hővé alakulása is fellép. A szivárgás ezért nem lehetséges olyan irányba, ahol a folyadék tömegegységére eső mechanikai energiája az adott helynél magasabb, vagyis szükségszerűen olyan irányba történik, ahol a folyadék tömegegységére eső mechanikai energiája a vizsgált helynél alacsonyabb (54. ábra).

A folyadék tömegegységére eső mechanikai energiáját a szivárgási tér bármely pontjára meghatározhatjuk úgy, hogy meghatározzuk azt a munkát, amit akkor kell végezni, amikor egy tetszőleges választott zérus helyről egy tömegegységnyi folyadékot a kérdéses pontra juttatunk el. Mint azt a korábbi definíció sugallja: *a folyadék szivárgási potenciálját a porózus közegben a folyadék tömegegységére vonatkoztatott mechanikai energiájaként értelmezzük.* Mivel ez abszolút értelemben nem meghatározható, helyesebb úgy fogalmazni, hogy a potenciál megváltozása az a munka, amit be kell fektetni vagy nyernünk, miközben a vizsgált folyadék az áramlási térben az egyik pontból egy másik pontba jut.

A potenciál fogalmának megértéséhez végezzünk el egy gondolat kísérletet:



54. ábra. A porózus közegben lezajló áramlás sémája, a folyadék mindig az alacsonyabb energiaszintű hely felé törekszik [Haszpra, 2002, nyomán].

tételezzünk fel egy olyan helyet az áramlási térben, ahol a z magasság zérus, a p nyomás a légköri nyomásnak felel meg, azaz $p = p_0$. A ρ_0 sűrűségű folyadék egy tömegegységnyi mennyisége $V_0 = 1/\rho_0$ térfogatot foglal el. Számítani kívánjuk azt W a munkát, amely ahhoz szükséges, hogy a tömegegységnyi folyadékot egy olyan másik P helyre juttassuk el, amelynek magassága z és nyomása p . Ezen a helyen a folyadék sűrűsége ρ , ezért a tömegegységnyi folyadék $V = 1/\rho$ térfogatot foglal el. Továbbá tételezzük fel, hogy a folyadék sebessége kezdetben $v = 0$, és a P helyen v . Az a W munka amit el kell végezni az három komponensből tevődik össze.

Egyrészt szükséges a tömeget a $z = 0$ magasságról z magasságra emelni (w_1).

Másrészt a tömeget $v = 0$ sebességről v sebességre kell gyorsítani (w_2).

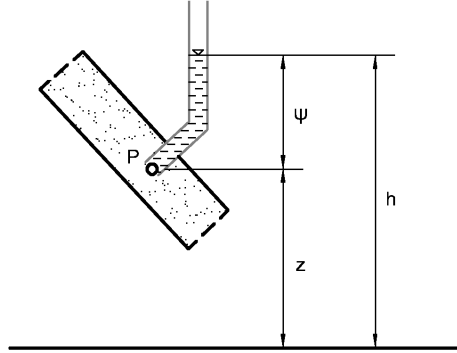
Harmadrészt munkát kell végezni ahhoz, hogy a p_0 nyomású folyadékot p nyomásúvá alakítsuk (w_3).

Az előbbieket matematikai formában a következőképpen írhatjuk fel:

$$W = w_1 + w_2 + w_3 = mgz + \frac{mv^2}{2} + m \int_{p_0}^p \frac{V}{m} dp$$

$$W = mgz + \frac{mv^2}{2} + m \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$$
(360)

Mivel a potenciál a tömegegységre vetített munka, ezért a következőt kapjuk:



55. ábra. A ψ nyomómagasság, a z magasság és a h hidraulikus nyomás értelmezése [Freeze and Cherry, 1979, nyomán]

$$\Phi = gz + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \int_{p_0}^p dp \quad (361)$$

Mivel a porózus közegbeli szivárgás sebessége mindig nagyon kicsi, ezért a második tag, a folyadék-gyorsításból eredő munka – szinte mindig – elhanyagolható. Összenyomhatatlan folyadékok esetében a sűrűség állandó, azaz a p nyomásának nem függvénye, tehát a következő adódik:

$$\Phi = gz + \frac{p - p_0}{\rho} \quad (362)$$

A potenciál és a hidraulikus nyomásszint kapcsolatának megértéséhez értelmezzük a ψ nyomómagasságot, a z magasságot egy zérus dátumvonalhoz viszonyítva és a h hidraulikus nyomást a 55. ábra szerint. A P helyen a folyadék p nyomását a következő összefüggés szerint számíthatjuk:

$$p = \rho g \psi + p_0 = \rho g(h - z) + p_0 \quad (363)$$

A potenciálra vonatkozó összefüggésbe az előbbi képletet behelyettesítve:

$$\Phi = gz + \frac{(\rho g(h - z) + p_0) - p_0}{\rho} = gh \quad (364)$$

azaz a potenciál a hidraulikus nyomás és a nehézségi gyorsulás szorzata. Tekintettel arra, hogy a g gravitációs gyorsulás a vizsgált közegben általában állandónak tekinthető, ezért a hidraulikus nyomás gyakorlatilag a potenciál helyett használhatjuk. A felszín alatti áramlások vizsgálatánál a nyomásokat gyakran

nyomásmérővel mérjük, amely a légköri nyomást meghaladó nyomásértéket mutatja, ekkor a p_0 nyomást zérusnak tekinthetjük, azaz a fenti egyenlet evvel a feltételezéssel is átalakítható:

$$\Phi = gz + \frac{p - p_0}{\rho} = gz + \frac{p}{\rho} = gh \quad (365)$$

Mivel ha $p_0 = 0$ akkor $p = \rho g \psi$. Ezt az előző egyenletbe helyettesítve $h = z + \psi$ összefüggést kapunk, amely jelentése, hogy a h hidraulikus nyomásszint a z magasság és a ψ nyomómagasság összege. Ennek a rövid levezetésnek a telítetlen közegbeli vízmozgás számításánál is kiemelt jelentősége lesz.

30. A szivárgás alapegyenlete

A szivárgás alapegyenlete matematikai formában írja le a vízmozgás törvényszerűségeit. *A szivárgást leíró alapvető összefüggés a Darcy-törvény és ezt a porózus közegben áramló folyadékok tömegmegmaradásának kontinuitási egyenletével összeillesztve a szivárgás alapegyenletét kapjuk meg.*

A Darcy-féle törvény a korábbiak alapján a következő formában írható fel, amelynek értelmezését egyszerű formában a 56. ábra is mutatja:

$$v = q = \frac{Q}{A} = -k \cdot \frac{dh}{ds} = -k \cdot I \quad (366)$$

ahol, v , a szivárgás látszólagos sebessége vagy q , egységnyi felületen áthaladó hozama [L/T], k , szivárgási tényező [L/T], $I = dh/ds$, hidraulikus gradiens.

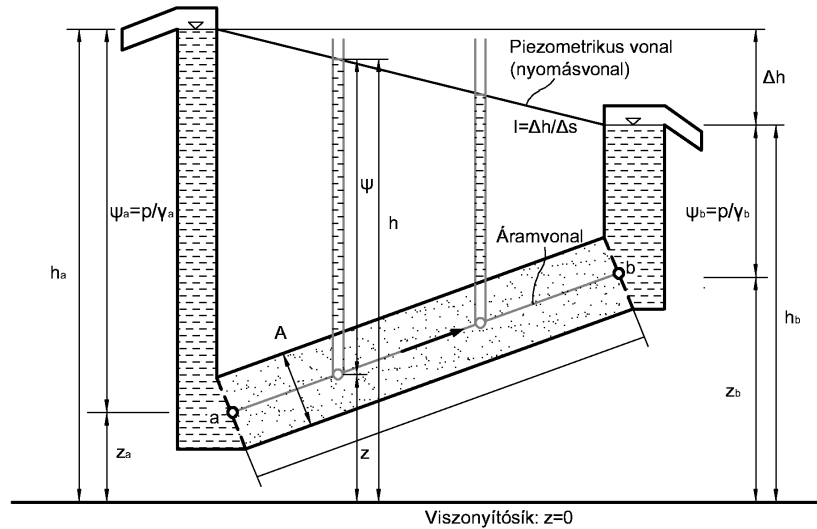
A szivárgás valódi sebessége (amellyel pl. a szennyezőanyagok is terjednek) a Darcy-féle sebességnél, ami inkább fajlagos hozam, mint sebesség, nagyobb, mivel csak a szemcsék közötti pórusokban tud a víz mozogni. Így a Darcy-féle sebességet a pórusok térfogatával (n) korrigálni szükséges a valódi szivárgási sebesség (v_v) számításához.

$$v_v = \frac{v}{n} \quad (367)$$

Folyadékok kontinuitási egyenlete a felszín alatti áramlásokra vonatkozóan a következőképpen vezethető le (57. ábra). Alkalmazzuk az általános anyagmegmaradási egyenletet és vizsgáljuk a egy $dx \, dy \, dz$ oldalhosszúságú kockába (vagy általánosabban paralelepipedonra) a dt időegység alatt be és kilépő vízmennyiségeket. A térfogatnak elég nagyoknak kell lennie, hogy számos a közegre jellemző pórust tartalmazzon, de elegendően kicsinynek is, hogy matematikailag a folytonosság kezelhető legyen.

$$M_{in} - M_{out} = \Delta M \quad (368)$$

ahol, M_{in} és M_{out} , a belépő és kilépő folyadéktömegek, ΔM , az adott térfogatban raktározott folyadék tömegváltozása.



56. ábra. A Darcy-törvény értelmezése [Öllös, 1966, nyomán]

A vizsgált térfogatba való belépés (szivárgás) bármelyik irányból lehetséges és a fajlagos hozam vektorok a kijelölt térfogat élével párhuzamosak, v_x , v_y és v_z . Az M_{in} (vagyis az 1, 2 és 3-as felületen belépő mennyiségek):

$$M_{in} = \rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt + \rho \cdot v_y \cdot dx \cdot dz \cdot dt + \rho \cdot v_z \cdot dx \cdot dy \cdot dt \quad (369)$$

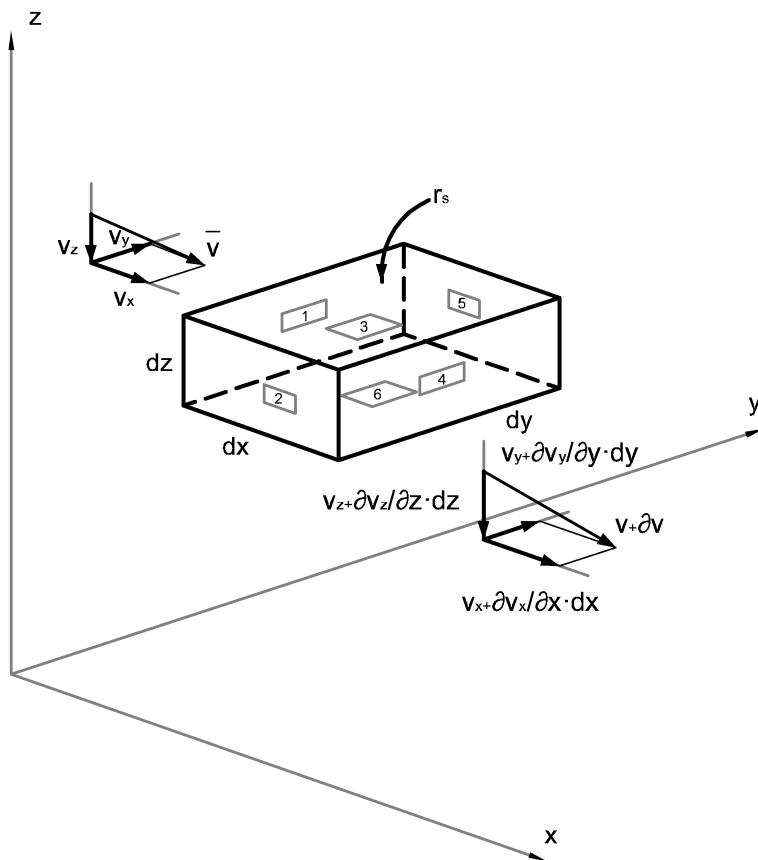
Általában a kocka belépővel párhuzamos oldalain kifolyó vízmennyiségek M_{out} (az 4, 5 és 6-os felületen kilépő vízmennyiségek) adott irányban mások, mint a befolyóak:

$$M_{out} = \left(\rho \cdot v_x + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz \cdot dt + \left(\rho \cdot v_y + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz \cdot dt + \left(\rho \cdot v_z + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dt \quad (370)$$

A vizsgált térfogatban lévő vízmennyiség megváltozása a következőképpen írható fel:

$$\Delta M = \rho \cdot S_S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (371)$$

ahol S_S , a fedett víztartóban (rétegvíz) a fajlagos tárolási tényező vagy a nyílt felszínű víztartóban (talajvíz) a fajlagos hozam.



57. ábra. A felszín alatti közegben történő áramlásra vonatkozó kontinuitási egyenlet értelmezése [Dingman, 2002, nyomán]

A korábbi egyenletek összevonásával és a vizsgált térfogattal leosztva a következő egyenletet kapjuk, amely három dimenzióban leírja a nem permanens felszín alatti vízáramlást.

$$-\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = -\rho \cdot S_S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (372)$$

A két egyenlet (az előbbi ún. folytonossági és a Darcy-féle) összekapcsolásával, a sűrűséget konstansnak véve kapjuk a szivárgás alapegyenletét:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (373)$$

Az eredményként kapott parciális differenciál-egyenlet egymástól alig eltérő formában írható fel a permanens és nem permanens, telített közegbeli áramlás esetére, sőt kiterjeszhető a telítetlen közegbeli szivárgásokra is. Mindhárom esetre vonatkozóan megállapítható, hogy a kapott parciális differenciálegyenlet a matematikusok számára jól ismert, ezért megoldásukra vonatkozóan számos eljárást dolgoztak ki.

30.1. Telített közegbeli permanens szivárgás

Tekintsük a porózus közeg egységnyi térfogatú részét. A permanens esetre, telített közegre felírt tömegmegmaradási-egyenlet megköveteli, hogy a vizsgált térrészbe be és kilépő vízhozamok egyenlők legyenek. A 57. ábra alapján felírt összefüggés szerint tehát:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = 0 \quad (374)$$

ahol ρ , az áramló folyadék sűrűsége és v_x , v_y és v_z a szivárgási sebességvektor komponensei. Amennyiben a folyadék összenyomhatatlan, akkor $\rho = konstans$, ezért az egyenletből elhagyható. Amennyiben a folyadékot összenyomhatónak tekintjük, akkor $\rho \neq konstans$, de kimutatható, hogy a lánc-szabály szerint képzett $\rho \cdot dv_x/dx$ kifejezés sokkal nagyobb, mint a $v \cdot d\rho/dx$, ezért mind összenyomható, mind összenyomhatatlan folyadék esetére felírható, hogy

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (375)$$

Amennyiben az előző egyenletbe a szivárgási sebességvektor komponensei helyére beírjuk a Darcy-féle összefüggést, akkor a szivárgás alapegyenletét kapjuk anizotróp, porózus, telített közeg esetére permanens helyzetet feltételezve:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (376)$$

ahol k_x , k_y és k_z a szivárgási-tényező tenzor főátlójának elemei [Kovács, 2004].

Ha a közeg izotrópna tekinthető, akkor $k_x = k_y = k_z$, ekkor a szivárgás alapegyenlete még egyszerűbbé válik:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (377)$$

Ez az egyenlet a matematikában jól ismert *Laplace-egyenlet*, melynek megoldása mutatja meg a h piezometrikus szint nagyságát bárhol egy háromdimenziós áramlási térben. Kétdimenziós esetben a Laplace-egyenlet megfelelő tagja kiesik, így kapjuk a nyomás-szint eloszlást a vizsgált sík mentén.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (378)$$

Ezt az előbbi egyenletet használta fel Tóth [1962] és Tóth [1963] a 52. és 53. ábrán látható áramlási rendszerek képeinek analitikus meghatározásához.

30.2. Telített közegbeli nem permanens szivárgás

A nem permanens szivárgás vizsgálatához, azaz az időbeli folyamatok követéséhez néhány újabb közegjellemzőt szükséges bevezetni. Ezek a közegjellemzők levezethetők a következő paraméterekből: a folyadék ρ sűrűsége, μ viszkozitása, β kompresszibilitása, és a közeg n hézagterfogata vagy e hézagtérfogata, k átteresztőképessége és α kompresszibilitása.

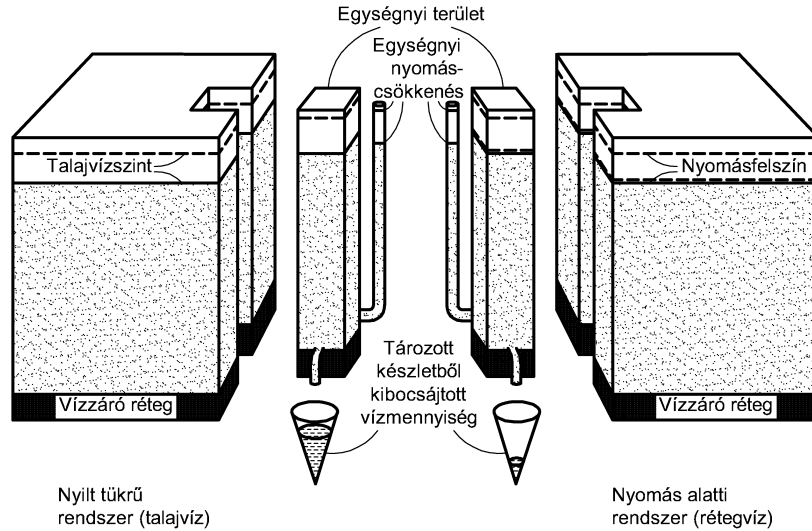
A víztároló képességet nyomás alatti rendszerekben a *fajlagos tárolási tényező*vel jellemezhetjük, amely az a vízmennyiség, amelyet az áramlási közeg egységnyi térfogata tárolni vagy kibocsátani képes egységnyi nyomásszint-változás (növekedés vagy csökkenés) hatására (58. ábra).

A piezometrikus (nyomás) szint változásának hatása kettős egyrészt hat a semleges, másrészt a hatékony feszültségekre a közegben. A nyomás növekedése a folyadéknyomás (semleges feszültségek) növekedését és egyben hatékony feszültségek csökkenését okozza és fordítva.

Ennek értelmében a tárolt vízmennyiség megváltozása a vízádban két folyamatra vezethető vissza: a hatékony feszültségek változása miatti közet-, illetve a semleges feszültségek változása miatti folyadék összenyomódás vagy tágulásra. Az első folyamatot a közet, a másodikat a víz összenyomhatósága, kompresszibilitása határozza meg.

A közet kompresszibilitásának meghatározásához vezessük be az összes, a hatékony és a semleges feszültségek fogalmát. Egy adott vízádban a fedő képződmények és a víz hatására feszültségek ébrednek. Ezek a feszültségek egyrészt a szemcsék között, másrészt a pórusokban tárolt vízben alakulnak ki. Az összes feszültség azon részét, mely nem a tárolt folyadékban ébred σ_{eff} hatékony feszültségnek, a folyadékban kialakuló feszültségeket semleges feszültségnek nevezzük. A hatékony feszültségek növekedése a közetváz összenyomódását, kompresszióját és a szemcsék átrendeződését okozzák. Ennek alapján a σ_T összes feszültségeket az alábbi egyenlettel lehet felírni:

$$\sigma_T = \sigma_{eff} + p \quad (379)$$



58. ábra. A víztároló képesség értelmezése nyomás alatti (fajlagos tárolási tényező) ill. nyílt tükrű (fajlagos hozam) rendszerben [Dingman, 2002, nyomán]

Ahol, p a folyadék nyomása a pórusban (semleges feszültségként jelentkezik).

A feszültségek megváltozása pedig az előbbieket alapján a következőképpen írható:

$$d\sigma_T = d\sigma_{eff} + dp \quad (380)$$

Egy adott helyen a fedőkőzetek és víz tömege általában állandónak tekinthető, ezért az összes feszültség $d\sigma_T$ megváltozása zérus, ekkor

$$d\sigma_{eff} = -dp \quad (381)$$

Egy adott helyen tehát a pórusvíz nyomása határozza meg a kőzet-deformációt. Mivel $p = \rho g \psi$ és $\psi = h - z$, ahol adott helyen z mindig állandó, ezért a hatékony feszültségek megváltozását a pórusvíznyomás-változás, illetve a hidraulikus nyomómagasság-változás függvényében az adott pontra vonatkozóan alábbi módon írhatjuk fel:

$$d\sigma_{eff} = -\rho \cdot g \cdot d\psi = -\rho \cdot g \cdot dh \quad (382)$$

30.2.1. A kőzet α kompresszibilitása

A kőzet α kompresszibilitása, összenyomhatósága a kőzet teljes térfogathoz viszonyított térfogatváltozásnak mértéke a hatékony feszültség-változáshoz viszonyítva, azaz definíciószerűen:

$$\alpha = \frac{-\frac{dV_T}{V_T}}{d\sigma_{eff}} \quad (383)$$

ahol V_T a teljes kőzet térfogata. A kőzet azonban szilárd szemcsékből és pórusokból áll, azaz $V_T = V_s + V_v$, ahol V_s a szilárd szemcsék térfogata és V_v a vízzel telített pórusok térfogata.

A teljes térfogat megváltozása bekövetkezhet a szemcsék összenyomódásából és a szemcseszerkezet átrendeződéséből, illetve a pórusfolyadék összenyomódásából:

$$dV_T = dV_S + dV_V \text{ mivel } dV_S \approx 0 \rightarrow dV_T = dV_V \quad (384)$$

A szemcsék összenyomódását elhanyagolhatjuk és a pórusfolyadék összenyomódása sem jelentős néhány speciális esettől eltekintve, ekkor $dV_T = dV_V$.

A hézagtérfogat a pórustérfogat aránya a szilárd részek térfogatához képest, azaz telített közegben $e = V_v/V_s$, ekkor felhasználva, hogy $dV_T = dV_V$ a kompresszibilitása hézagténytényezővel kifejezve:

$$\alpha = \frac{-\frac{dV_T}{V_T}}{d\sigma_{eff}} = \frac{-\frac{dV_V}{V_S+V_V}}{d\sigma_{eff}} = \frac{-\frac{\frac{dV_V}{V_S} \cdot V_V}{V_S+V_V}}{d\sigma_{eff}} = \frac{-\frac{de}{1+e}}{d\sigma_{eff}} \quad (385)$$

A kőzet kompresszibilitása, tekintettel a nem lineárisan és nem rugalmas viselkedésre nem állandó, hanem függ a kialakuló feszültségek nagyságán túl a korábbi terhelésektől, feszültségváltozásoktól, azaz a terhelési úttól is.

Egy vízáadó esetén a kompresszibilitást, mint egy egydimenziós folyamatot értelmezzük, ahol a b vastagságú vízáadó vastagsága db -vel csökken, dh nyomásszint-változás hatására. Ekkor a dh nyomásszint-változás hatására a σ_{eff} hatékony feszültség megnő és a vízáadó összenyomódását, kompaktációját a következőképpen számíthatjuk:

$$db = \alpha \cdot b \cdot d\sigma_{eff} = -\alpha \cdot b \cdot \rho \cdot g \cdot dh \quad (386)$$

Határozzuk meg a kőzet kompressziójából származó vízmennyiségeket. A vízáadó térfogategységéből kinyomódó vízmennyiség megegyezik, az egységnyi térfogatú vízáadó térfogatának csökkenésével, tehát amíg a σ_{eff} hatékony feszültségek hatására bekövetkező dV_T térfogatváltozás negatív, addig a keletkező dV_w vízmennyiség pozitív:

$$dV_W = -dV_T = \alpha \cdot V_T \cdot d\sigma_{eff} \quad (387)$$

Egységnyi térfogatban a $V_T = 1$, a hatékony feszültségek megváltozására a korábbi összefüggést $d\sigma_{eff} = -\rho g dh$ felhasználva, ha a nyomásszint csökkenése egységnyi, azaz $dh = -1$, ekkor a következőt kapjuk a felszabaduló vízmennyiségre:

$$dV_W = \alpha \cdot \rho \cdot g \quad (388)$$

30.2.2. A víz β kompresszibilitása

A víz β kompresszibilitása a teljes V_w térfogatú víztömeghez viszonyított dV_w térfogatváltozás nagysága a pórúsvíznyomás változáshoz viszonyítva, azaz

$$\beta = \frac{-\frac{dV_w}{V_w}}{dp} \quad (389)$$

A víz kompresszibilitása az áramlástanban reális nyomástartományban, speciális esetektől eltekintve, állandónak tekinthető, ezért egy adott tömegű vízre felírható:

$$\beta = \frac{-\frac{d\rho}{\rho}}{dp} \quad (390)$$

amiből integrálással a víz állapotegyenletét kapjuk:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{\beta \cdot (p - p_0)} \quad (391)$$

ahol, p_0 , a referenciapont nyomása és ρ_0 , a folyadék sűrűsége p_0 nyomáson [Freeze and Cherry, 1979].

Ha a folyadék összenyomhatatlan, akkor $\beta = 0$, és ekkor $\rho = \rho_0 = \text{állandó}$.
Visszatérve a víz tágulásából származó vízmennyiségek meghatározására:

$$dV_W = -\beta \cdot V_W \cdot dp \quad (392)$$

A V_T teljes vízadó térfogatban tárolt vízmennyiség telített közegben $n \cdot V_T$, tekintettel arra, hogy egységnyi térfogatra számítva $V_T = 1$ és a dp nyomásváltozás $dp = \rho \cdot g \cdot d\psi = \rho \cdot g \cdot d(h - z) = \rho \cdot g \cdot dh$, valamint, hogy egységnyi a nyomásszint-változás, azaz $dh = -1$, ekkor:

$$dV_W = \beta \cdot n \cdot \rho \cdot g \quad (393)$$

30.2.3. Tárolási tényező

A *fajlagos tárolási tényező* S_S az egységnyi nyomásszint-változás hatására a kőzet kompressziója miatt, illetve a víz tágulása miatt felszabaduló vízmennyiség összege, azaz

$$S_S = \rho \cdot g \cdot (\alpha + n \cdot \beta) \quad (394)$$

A fajlagos tárolási tényező dimenziója $[1/L]$, általában $1/m$ az SI rendszerben.

Egy m vastagságú telített rétegben (zárt tükrű vízadó) a transzmisszibilitás $T = k \cdot m$ és a *tárolási tényező* definíciószerűen $S = S_s \cdot m$. Felhasználva a összefüggést:

$$S = S_S \cdot m = m \cdot \rho \cdot g \cdot (\alpha + n \cdot \beta) \quad (395)$$

A *tárolási tényező* egy zárttükrű vízadóban megmutatja, hogy mekkora vízmennyiség szabadul fel egy egységnyi felületű részén a vízadónak, miközben a nyomásszint egységnyit csökken. A tárolási tényező dimenzió nélküli szám, nagysága a 0,005-0,00005 intervallumban szokott változni [Kovács, 2004]. Az Alföldön a tárolási tényező nagysága 0,001 körüli.

A tárolási tényező vízrekesztő képződményekre is definiálható, azonban ebben az esetben az $n \cdot \beta$ tag elhanyagolható nagyságú.

30.2.4. A fajlagos hozam

A nyílt tükrű rendszerben a víztárolási képességet a fajlagos hozammal jellemezhetjük. A *fajlagos hozam* S_y az a vízmennyiség, amennyi egy egységnyi felületű, nyílt tükrű vízadóból felszabadul miközben a nyomásszint egységnyit csökken.

$$S_y = \frac{V_w}{A \cdot \Delta} \quad (396)$$

ahol, A , a víztartó vizsgált alapterülete, a V_w , a kibocsátott vagy befogadott vízmennyiség, amely Δ vízszintváltozás (emelkedés vagy csökkenés) hatására jött létre.

Az S_y egy másik megközelítés szerint, így is kifejezhető:

$$S_y = \theta_S - \theta_R \quad (397)$$

ahol, θ_S a telített térfogatos víztartalom (dimenzió nélküli), θ_R , a (gravitációs) leürülés utáni maradék térfogatos víztartalom (dimenzió nélküli).

A 59. ábra a víztartalom változását mutatja egy két időpontban (t_1 és t_2) a mélység függvényében. Az ábrán sraffozással jelölt görbe alatti különbségek területe arányos a felszabaduló vízmennyiséggel. Amennyiben a nyomásszintváltozás éppen egységnyi, akkor a sraffozott terület éppen a fajlagos hozamnak megfelelő nagyságú.

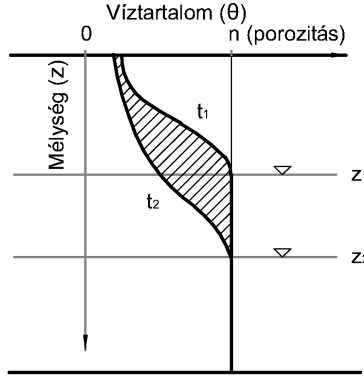
A fajlagos hozam nagysága (felszínközeli talajvízszintű területeken) a telített zóna felszínétől távolságának és a leürülés időbeli gyorsaságának függvényében igen jelentősen változhat.

Amennyiben a telítetlen zónában tárolt vízmennyiségeket elhanyagoljuk, akkor a fajlagos hozam értéke megegyezik a szabad hézagterfogató értékével.

A fajlagos hozam S_y értéke általában 0,01-0,3 közötti [Freeze and Cherry, 1979]. A nagyobb értékek azt jelzik, hogy a pórusok nagy része leürül a nyomásváltozások hatására vagyis a minimális vízkapacitás (másként szántóföldi vízkapacitás), azaz a vízmennyiség, amit a kőzet a gravitációs erő ellenében magában tartani képes, kicsi.

30.2.5. A szivárgás alapegysége telített közegben nem permanens esetben

A tömegmegmaradás törvénye szerint a kiválasztott térrészbe adott időegység alatt be- és kilépő hozamok előjeles összege az adott térrészben tárolt vízmennyiség tömegváltozásával kell azonosnak lennie. Ez matematikai formában felírva:



59. ábra. A fajlagos hozam értelmezése [Freeze and Cherry, 1979, nyomán]

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho \cdot n)}{\partial t} \quad (398)$$

ahol, n a hézagterfogat és t az eltelt idő.

Az egyenletet a lánc-szabály szerint átalakítva

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = n \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial n}{\partial t} \quad (399)$$

A előző egyenlet jobb oldalán szereplő két tagnak fizikai jelentése van:

- az első tag a víz rugalmas tágulása miatt keletkező vízmennyiséget jelenti, miközben ρ sűrűsége változik,
- a második tag pedig azt a vízmennyiséget jelenti, ami a közeg összenyomódása miatt keletkezik miközben az n hézagterfogat megváltozik.

Az első tag nagyságát a víz β , a másodikét a közeg α összenyomhatósága, kompresszibilitása határozza meg. Tekintettel arra, hogy mind a sűrűségbeli, mind a hézagterfogatbeli változásokat a h nyomásszintek változásai indukálják, és figyelembe véve, hogy a két vizsgált folyamat során egységnyi nyomásváltozás hatására képződő vízmennyiség nagyságát a fajlagos tárolási tényező S_S értéke határozza meg, az egyenlet egyszerűsíthető. A fajlagos tárolási tényező: $S_S = \rho \cdot g \cdot (\alpha + n\beta)$, ezért a kiválasztott térfogatban a ki és belépő hozamok összegének különbözősége miatt tárolt víztömeg változása $\rho \cdot S_S \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = \rho \cdot S_S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (400)$$

Figyelembe véve, hogy a $\rho \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t}$ kifejezés sokkal nagyobb, mint a $v_x \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$ kifejezés, ezért ρ az egyenlet mindkét oldaláról eliminálható, majd a Darcy-törvényt alkalmazva megkapjuk a nem-permanens szivárgás telített közegbeli alapegyenletét:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (401)$$

Amennyiben a közeg izotróp és homogén, akkor a matematikában diffúzió-egyenletként ismert formulát kapjuk, amit a korábbi fejezetekben már megismerhettünk a koncentrációra vonatkozóan.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S_S}{k} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho \cdot g \cdot (\alpha + n \cdot \beta)}{k} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (402)$$

Mint látható az áramlási térben a nyomásszintek változása a térben és az időben a k szivárgási tényező, α közeg összenyomhatóság és n hézagterefogattól, mint közegjellemzőtől, és a folyadék β összenyomhatóságától és ρ sűrűségétől függ.

Amennyiben egy m vastagságú horizontális vízadót tekintünk, akkor a tárolási tényező $S = m \cdot S_S$, illetve a transzmisszibilitás $T = k \cdot m$ és ekkor a vezérlő differenciálegyenletünk a következő lesz:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (403)$$

ami a Theis-Jacob-féle analitikus megoldás kiinduló összefüggése. Az előbbi egyenlettel számítható az x, y síkbeli koordináták függvényében a piezometrikus szint, ha a vízadó T transzmisszibilitása és S tárolási tényezője ismert [Kovács, 2004].

30.3. Nem permanens szivárgás telítetlen közegben

30.3.1. Közegjellemzők

A telítettséget definiáljuk a a következő alakban

$$S_a = \frac{V_w}{V_w + V_l} = \frac{\theta}{n} \quad (404)$$

ahol, θ , a térfogati víztartalom és n a hézagterefogat, valamint V_w a vízzel és V_l a levegővel telt pórusok térfogata.

Következésképpen a telítettség akkor 100%, amikor a térfogati víztartalom és a hézagterefogat értéke azonos. Tekintsünk egy függélyest a felszíntől a talajvízig. A felszínen és közelében telítetlen a közeg, a talajvízszint közelében telített. Bár egyszerűsítve a telített és telítetlen közeg határát a talajvízszint magasságában tételezhetnénk fel, ez nem igaz, mert a talajvíz felett a kapilláris zóna található.

A talajvízszint mélységében a pórufolyadék p nyomásszintje pontosan megegyezik a légköri nyomással ezért a ψ nyomómagasság zérus. A talajvízszint alatt az értelmezés szerint $\psi > 0$, ezért logikusan a talajvízszint felett $\psi < 0$, ha $h = z + \psi$ (60. ábra). Ez a tény arra utal egyben, hogy a telítetlen közegben a víz a talaj pórusaiban felületi feszültség miatt fellépő erők hatása alatt áll. Ezt az állapotot jól jellemzi, hogy a negatív nyomómagasságot szívómagasságnak vagy tenzióknak szokták nevezni. Míg a talajvízszint alatt a nyomásszintet piezométerekkel lehet mérni, addig a talajvízszint fölött ezen eszközök helyett tenziométereket kell használni.

A telítetlen zónában mind a θ térfogati víztartalom, mind a k szivárgási tényező a ψ nyomómagasság függvénye. Az irodalom analitikus összefüggésekkel próbálja közelíteni a kapcsolati görbéket. Ezek közül legismertebbek a Brooks-Corey, a Campbell és a Van Genuchten által kidolgozott összefüggések [Dingman, 2002]. Szolgáljon itt példaként a Campbell-féle megközelítés a talaj víztartó- és vízvezető-képességi görbéire:

víztartó-képességi görbe

$$\Psi(S_a) = \frac{|\Psi_a|}{S_a^b} \text{ vagy } |\Psi(\theta)| = |\Psi_a| \cdot \left(\frac{n}{\theta}\right)^b \quad (405)$$

vízvezető-képességi görbe

$$k(S_a) = k_0 \cdot S_a^c \text{ vagy } k(\theta) = k_0 \cdot \left(\frac{\theta}{n}\right)^c \quad (406)$$

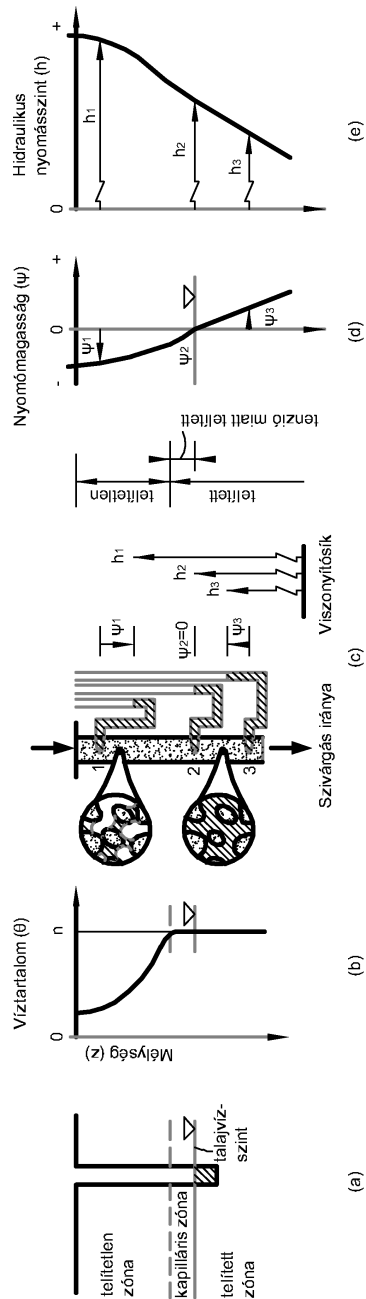
ahol, b , pórus méret megoszlására, míg a $c \sim 2b+3$, a pórusok kapcsoltására utal.

Mint ahogy az a 61.ábráról is látható a θ térfogati víztartalom nemcsak a telített közegben ($\psi \geq 0$), hanem a telített állapothoz közeli, kis negatív nyomómagasságok, tenziók tartományában is megegyezik a hézagtérfogattal. Ez a tartomány finom szemcsés képződményeknél nagyobb, durva szemcsés anyagoknál gyakorlatilag nem létezik. Azt a ψ_a tenzió értéket, ahol a térfogati víztartalom csökkenni kezd levegő-belépési nyomómagasságnak, a p_a nyomásszintet levegő-belépési vagy másképpen buborék nyomásnak nevezik.

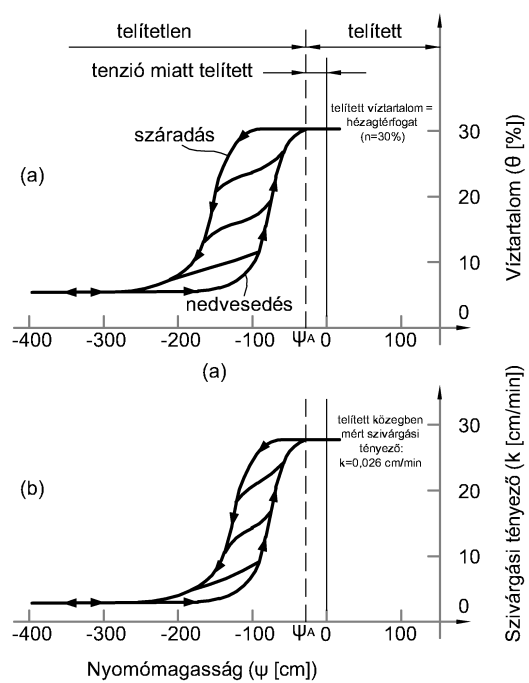
Sajnos a talajvíztartó képességi görbe megadása nem egyértelmű, mivel mint azt kísérletek bizonyították a térfogati víztartalom nyomómagasság összefüggésnek (az un. *talaj víztartó képességi görbének*) alakja eltérő nedvesedés és száradás folyamán, azaz a görbének hiszterézise van (61:a).

A térfogati víztartalomhoz hasonlóan a szivárgási tényezők nyomómagasság összefüggésnek (az un. *talaj vízvezető képességi görbének*) is hiszterézise van (61:b), de ennek a jelentősége nem akkora mértékű, mint a víztartó-képességi görbe esetében. A $\psi \geq \psi_a$ tartományban $k = k_0$, ahol k_0 a telített közeg szivárgási tényezője.

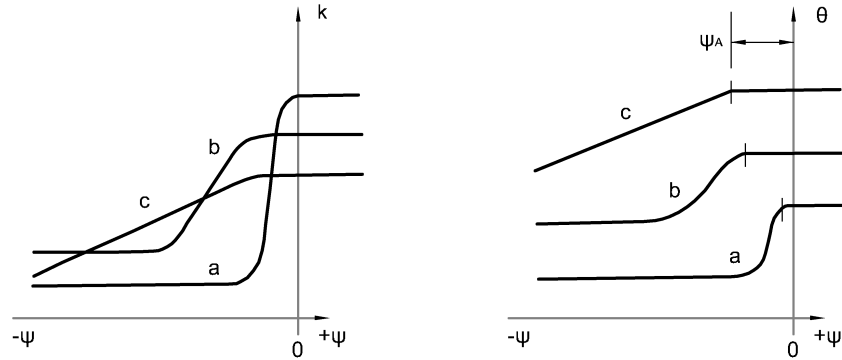
Amíg telített közegben a szivárgást meghatározó közegjellemzők a k_0 szivárgási tényező és az n hézagtérfogat, addig telítetlen közegben a víz mozgását a 61. ábrán látható karakterisztikus görbék azaz a $k = k(\psi)$ és a $\theta = \theta(\psi)$ görbék határozzák meg, ezért ezeket a telítetlen közegben végbemenő vízmozgás karakterisztikus görbéinek is szokták nevezni.



60. ábra. A talajban lévő víz állapota a felszín közelében [Freeze and Cherry, 1979]



61. ábra. A telítetlen közegbeli vízmozgás karakterisztikus görbéi (Liakopoulos 1965 in Freeze and Cherry 1979 nyomán)



62. ábra. Néhány képződmény összehasonlító karakterisztikus (vízvezetőképességi [bal], víztartóképességi [jobb]) görbéje [homok (a), iszapos homok (b) és iszapos agyag (c)] [Freeze and Cherry, 1979, nyomán]

Mivel a k szivárgási tényező a ψ nyomómagasság függvénye és ugyanakkor a θ térfogati víztartalom is függvénye a ψ nyomómagasságnak, ebből következik hogy a szivárgási tényező egyben a térfogati víztartalom, illetve a telítettségnek is a függvénye, azaz a szivárgási tényező növekszik a telítettséggel (61:b) A Darcy- törvényt ezért telítetlen közegre vonatkozóan az alábbi formában írhatjuk fel:

$$v = -k(\psi) \cdot \nabla h \quad (407)$$

A karakterisztikus görbék alakja a porózus közeg szemmagyságától jellegzetesen függ. A 62. ábra egy homok (a), egy iszapos homok (b) és egy iszapos agyag (c) összehasonlító karakterisztikus görbéit mutatja be a hiszterézist figyelmen kívül hagyva.

Telítetlen közegben a θ térfogati víztartalom változását a ψ nyomómagasságok változása kíséri. A két paraméter összefüggését, amint korábban bemutattuk a karakterisztikus görbék adják meg (61, 62.ábra). A karakterisztikus görbe meredeksége a telítetlen közeg tárolási jellemzője, amit c , *fajlagos talajnedvesség kapacitásnak* neveznek:

$$c = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (408)$$

Tekintettel arra, hogy a karakterisztikus görbe nem lineáris és hiszterézise is van, ugyanez mondható el a c fajlagos talajnedvesség-kapacitásról is. Amennyiben a nyomómagasság nagyobb, mint ψ_a , akkor $c \approx 0$, azaz további víz a pórusok telítése miatt nem tárolódik, mert a közeg telítetté vált.

Néhány esetben, talajnedvesség mozgásával kapcsolatos probléma megoldásánál sokkal egyszerűbben juthatunk a megoldáshoz ha definiáljuk a *hidraulikus*

diffuzivitás fogalmát ($D_h(\theta)$) a következőképpen:

$$D_h(\theta) = k(\Psi) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (409)$$

A hidraulikus diffuzivitás ($D_h(\theta)[L^2T^{-1}]$) dimenzió szerint teljesen analóg a korábbi fejezetekben definiált diffúziós tényezővel.

Az előző egyenletet felhasználva a Darcy-féle törvény (vertikális irányban) így írható fel:

$$q_z = -k(\Psi) - D_h(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (410)$$

amely szerint a korábban nyomásgradiens szerint meghatározott fluxus kifejezhető a hidraulikus diffuzivitás és a talajnedvesség gradiensének szorzataként.

A hidraulikus diffuzivitás meghatározható a definíciója szerint a víztartó és vízvezető-képességi görbék ismeretében a következőképpen:

$$D_h(\theta) = -b \cdot \Psi_a \cdot k_0 \cdot n^{-b-3} \cdot \theta^{b+2} \quad (411)$$

ahol $D_h(\theta) > 0$ (megjegyezve hogy $\Psi_a < 0$) és növekszik a víztartalom növekedésével [Dingman, 2002].

30.3.2. A szivárgás alapegyenlete telítetlen közegben

Telítetlen közegben az adott térrészben tárolandó anyagmennyiség változása nemcsak a sűrűség változása közben a víz rugalmas tágulása miatt keletkező vízmennyiséget és a kompaktió miatti a hézagterefogat-csökkenéssel felszabaduló vízmennyiséget érinti, hanem a víz tárolódása történhet a telítettség növekedésével is, azaz a korábbi egyenletekbe a $\rho \cdot n$ helyett $S_a \cdot \rho \cdot n$ írandó:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = n \cdot S_a \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot S_a \frac{\partial n}{\partial t} + n \cdot \rho \frac{\partial S_a}{\partial t} \quad (412)$$

Telítetlen közegbeli áramlásnál a jobboldali három tag közül az utolsó számottevően nagyobb, mint az első kettő, azaz a tárolt vízmennyiség változása uralkodóan a telítettségi fok változása útján történik. Elhanyagolva tehát az első két tagot, a sűrűséggel egyszerűsítve az egyenletet, a szivárgási sebességet behelyettesítve a telítetlen közegre felírt Darcy-törvényből származó kifejezéssel és felismerve, hogy $n \cdot dS_a = d\theta$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\Psi) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(\Psi) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\Psi) \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (413)$$

A előbbi egyenletet olyan formára is szokás hozni, hogy a független változó a θ térfogati víztartalom helyett a ψ nyomómagasság, ehhez vegyük figyelembe, hogy a térfogati víztartalom időbeli változása a nyomómagasság változáson keresztül megy végbe, azaz

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (414)$$

Ez követően használjuk fel a c fajlagos talajnedvesség-kapacitás definícióját valamint, hogy $h = z + \psi$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\Psi) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(\Psi) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\Psi) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = c(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (415)$$

Az előbbi egyenlet a talajfizikában igen gyakran használt Richards-egyenlet, amely meghatározza a ψ nyomómagasságokat a telítetlen áramlási tér bármely pontjában egy adott időpontban. Az egyenlet a $h = z + \psi$ ismeretében könnyen átváltható hidraulikus nyomásban kifejezett összefüggésre. A megoldás általában a $k=k(\psi)$ és a $C=C(\psi)$ vagy $\theta=\theta(\psi)$ karakterisztikus görbék ismeretét kívánja meg [Freeze and Cherry, 1979].

Ábrák jegyzéke

1.	Deformáció szilárd test és folyadékra teg esetében [Lajos, 2008, nyomán]	9
2.	A folyadékreszek sebességmegoszlása a nyírófeszültség jelenlétében.	10
3.	A vízmolekulákra ható molekuláris erők. [Kucsara et al., 2014]	13
4.	Nedvesítő és nem nedvesítő folyadék szélének erőegyensúlya. [Kucsara et al., 2014]	13
5.	Gázok, gőzök, cseppfolyós közegek [Lajos, 2008, nyomán]	14
6.	A Lagrange-féle szubsztanciális módszer szemléltetése [Haszpra, 1989, nyomán]	18
7.	Az áramlás jellemző vonalai [Haszpra, 1989, nyomán]	22
8.	Az anyagmegmaradás szempontjából vizsgált zárt felület [Haszpra, 1989, nyomán]	23
9.	A folytonosság feltétele egy áramcsőszakaszban [Haszpra, 1989, nyomán]	24
10.	A folytonosság szemléltetése merev falú áramcsőben [Haszpra, 2002, nyomán]	26
11.	Elemi folyadék rész ábrázolása a súrlódásmentes közegben rá ható feszültségekkel. [Lajos, 2008, nyomán]	29
12.	A statikus, a dinamikus és az össznyomás értelmezése [Lajos, 2008, nyomán]	33
13.	A Bernoulli-egyenlet értelmezése hossz-dimenzióban [Öllös, 1965, Kucsara et al., 2014, nyomán]	34
14.	A veszteséges Bernoulli-egyenlet értelmezése [Öllös, 1965, Kucsara et al., 2014, nyomán]	35
15.	Folyékony, önmagába záródó, vonal elúszása [Lajos, 2008, nyomán]	38
16.	Örvénycső és örvényvonal értelmezése egy csőbeni és egy nyílt felszínű (pl. vízfolyás mederben kialakuló) áramlásnál [Haszpra, 1989, nyomán]	40
17.	Folyékony örvényfelületen felvett zárt folyékony vonal [Lajos, 2008, nyomán]	41
18.	Örvénycső felületén felvett zárt örvényvonal [Lajos, 2008, nyomán]	42
19.	Örvénycső zárt örvénygyűrűt alkot vagy a folyadéktér határáig ér	44
20.	Az elúszó folyadéktérfogat szemléltetése az impulzustételhez [Lajos, 2008, nyomán]	46
21.	Szilárd test az ellenőrző felületen belül [Lajos, 2008, nyomán]	49
22.	Impulzustétel áramcső szakaszra [Haszpra, 2002, nyomán]	52
23.	Az impulzustétel értelmezése az áramcsövek összességére [Haszpra, 2002, nyomán]	53
24.	Áramcsőben lévő víztestre ható erők ábrázolása [Haszpra, 2002, nyomán]	54

25.	Az elemi folyadékra x - irányban ható feszültségek (a csúsztatófeszültségek (τ) indexei közül az első annak a síknak a normálisát hivatott kifejezni, amelyikben az adott feszültség ébred, a második index pedig a feszültség irányát jelzi, mivel a húzófeszültségeknél (σ) a kettő egybeesik ott csak egy indexet használunk.) [Lajos, 2008, nyomán]	56
26.	Egy elemi folyadékhasáb deformációja [Lajos, 2008, nyomán]	58
27.	Csúsztatófeszültségek okozta húzófeszültségek számítása (bal ábra: a csúsztatófeszültség húzófeszültséget okoz, jobb ábra: folyadék-rész deformációja a v_x sebességkomponens x irányú megváltozása következtében [Lajos, 2008, nyomán]	60
28.	A Reynolds-féle kísérlet szemléltetése (felső ábra kísérleti elrendezés, felső cső lamináris áramlás, majd lefelé haladva a turbulencia hatása egyre erősödik) [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán].	66
29.	A sebességingadozás-vektor értelmezése egy elemi felületelemen [Lajos, 2008, nyomán]	70
30.	A Fick-féle diffúziós modell illusztrálása a részecskék egy csoportjának egy dimenziós, ún. Brown-féle molekuláris mozgásának sematikus ábrázolásával. Az ábra felső része magukat a részecskéket mutatja, az alsó rész pedig a részecskék elhelyezkedésének megfelelő hisztogram, amely analóg a koncentrációval.	76
31.	A diffúziós egyenlet levezetésénél használt differenciális kontroll térfogat [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	81
32.	Az egy dimenziós tiszta diffúzió esetének ábrázolása egy végtelen csőben [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	83
33.	A Gauss-féle normális eloszlás redukálódása a kezdetben egy pontban tömörülő jelzőanyag tömeg „spike” irányába ($M=1$ és $D=1/4$ értékek mellett) [Fischer et al., 1979, nyomán]	89
34.	A pillanatszerű, pontszerű forrás egy dimenziós diffúziójának önazonos megoldása végtelen domainban dimenziómentes formában ábrázolva [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	90
35.	Átfolyással rendelkező kontroll térfogat sematikus ábrája [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	93
36.	Az AD egyenlet egy dimenziós megoldásának sematizált megoldása három időpontra. A pontozott vonal a maximum koncentrációk értékeit mutatja a szennyezőanyag, fő áramlás szerinti mozgásának irányában [Socolofsky and Jirka, 2005]	96
37.	A kezdeti egyenletes pillanatszerű koncentráció-megoszlás sematikus reprezentációja, a $-\xi$ -ban fekvő dM differenciális elemet ábrázolva [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán].	99
38.	A feltérben egyenletes ($x < 0$) kezdeti koncentráció-megoszlás (lépcsőfüggvény) pillanatszerű problémájának megoldása $C_0 = 1$ kiindulási koncentráció esetében [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	101
39.	Az intravénás injekció befecskendezési utáni időpillanat leegyszerűsített, sematikus ábrázolása [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán].	101

40.	A $C(x, t) = C_0 \cdot \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right]$ egyenlet $x = 0$ pontban $C_0 = 1$ fix koncentrációjú peremmel megadott megoldása [Socolofsky and Jirka, 2005].	103
41.	A no-flux perem hatásának ábrázolása egy pillanatszerű pontszerű szennyezőforrás esetében, ahol a bal oldalon az eredeti határ nélküli megoldás látható, míg jobbra a határ reprezentálására egy „image” forrás van elhelyezve. A szaggatott vonal jelöli az egyes forrásokból érkező koncentrációmegoszlást, míg a folytonos vonal a szuperpozíciós megoldást [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	105
42.	A két oldalon elhelyezett no flux határ esete, amikor a szuperpozíciós megoldás elvileg végtelen számú „image” forrást igényel. A szaggatott vonal jelöli az egyes „image” forrásokból érkező koncentrációmegoszlást, a vékony folytonos vonal a valódi forrásból származó koncentráció-megoszlást határolás nélkül, míg a folytonos vonal a szuperpozíciós megoldást [Fischer et al., 1979].	106
43.	Az óceánban jellemző örvények energiaspektuma, ahol K , a hullámszám, S pedig a hullámszám spektruma [Kundu and Cohen, 2002, nyomán]	110
44.	A turbulensen fluktuáló sebesség egy ponton történő mérése, ahol az \bar{v} , az átlagsebesség és az $v'(t)$ a fluktuáló komponens [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	112
45.	Vertikális elkeveredés szemléltetése egy vízfolyás mederfenekén bejuttatott szennyvíz példáján [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	117
46.	A hosszirányú diszperzió folyamatának sematikus ábrája. Egy nyomjelzőt injektálunk a keresztiszelvényben egyenletesen elosztva az áramlási tér (a.) pontjában, amely a nyíróáramlás sebességprofilja következtében széthúzódik a (b.) helyen. A (c.) szelvényben a vertikális diffúzió már homogenizálta a koncentráció gradiensét és egy mélység átlagolt Gauss-féle normális eloszlás formájában várható a hosszirányban vett koncentráció profil megjelenése [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	120
47.	A Reynolds féle dekompozíció összehasonlítása egy (adott ponton mért) turbulens áramlás (bal oldal) és egy (térben változó) nyíróáramlás (jobb oldal) sebességértékeinek esetére [Socolofsky and Jirka, 2005, nyomán]	123
48.	Szennyezőanyagok permanens elkeveredésének szemléltetése keresztirányban (középvonalban történő bevezetés esete [Somlyódi, 1985, nyomán]	133
49.	Az eredeti Darcy-féle kísérleti elrendezés [Darcy, 1856]	135
50.	Egy felszín alatti szabad felszíni áramlási rendszer komplex mintázata (forrás D’Andrimont 1906 in Tóth 2006)	136

51.	Felszín alatti vizek áramlási rendszereinek közelítő ábrázolása egy idealizált metszetben, homogén és izotróp felszín alatti közegben egy horizontális vízzáró réteg fölött. Az áramvonalak végükön az áramlás irányát megadó nyíllal, folytonos vonallal jelöltek az un. ekvipotenciális vonalak pedig szaggatott vonallal (forrás Hubbert 1940 in Tóth 2006).	137
52.	Elméleti potenciálmegoszlás és áramlási mintázat különböző mélységű vízzárórétegek esetében sík lejtőjű vízgyűjtő esetében [Tóth, 1962].	138
53.	A különböző szintű felszín alatti víz áramlási rendszerek elvi vázlatlata [Tóth, 1963, nyomán]	138
54.	A porózus közegben lezajló áramlás sémája, a folyadék mindig az alacsonyabb energiaszintű hely felé törekszik [Haszpra, 2002, nyomán].	140
55.	A ψ nyomómagasság, a z magasság és a h hidraulikus nyomás értelmezése [Freeze and Cherry, 1979, nyomán]	141
56.	A Darcy-törvény értelmezése [Öllös, 1966, nyomán]	143
57.	A felszín alatti közegben történő áramlásra vonatkozó kontinuitási egyenlet értelmezése [Dingman, 2002, nyomán]	144
58.	A víztároló képesség értelmezése nyomás alatti (fajlagos tárolási tényező) ill. nyílt tükrű (fajlagos hozam) rendszerben [Dingman, 2002, nyomán]	147
59.	A fajlagos hozam értelmezése [Freeze and Cherry, 1979, nyomán]	151
60.	A talajban lévő víz állapota a felszín közelében [Freeze and Cherry, 1979]	154
61.	A telítetlen közegbeli vízmozgás karakterisztikus görbéi (Liakopoulos 1965 in Freeze and Cherry 1979 nyomán)	155
62.	Néhány képződmény összehasonlító karakterisztikus (vízvezetőképességi [bal], víztartóképeségi [jobb]) görbéje [homok (a), iszapos homok (b) és iszapos agyag (c)] [Freeze and Cherry, 1979, nyomán]	156

Táblázatok jegyzéke

1.	A szilárd test és folyadék deformációjának függése a csúsztatófé- szültségtől	9
3.	Légnemű és cseppfolyós halmazállapot összevetése	17
5.	Valóságos és ideális folyadék összevetése	17
6.	Néhány jellemző vízben oldott anyag molekuláris diffúziós ténye- zői standard nyomáson, két hőmérsékleti érték mellett (b, 20 °C- on; c, 10 °C-on) forrás: http://www.talknet.de/difcoef.html	79
7.	Az egy dimenziós csőben lejátszódó diffúziót befolyásoló változók és azok dimenziói	84

Hivatkozások

- Henry Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon. English: Determination of the laws of water flow through sand. From: The Public Fountains of the City of Dijon, Appendix D – Filtration. Translated from the French by Patricia Bobeck.* Kendall/Hunt Publishing Company, Iowa, USA., 1856.
- Z. Q. Deng, V. P. Singh, and L. Bengtsson. Longitudinal dispersion coefficient in straight rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 127:919–927, 2001.
- S. Lawrence Dingman. *Physical Hydrology.* Prentice Hall, Upper Sadle River, New Jersey, 2002.
- Hugo. B. Fischer, E. John. List, Robert. C. Y. Koh, Jörg. Imberger, and Norman. H. Brooks. *Mixing in Inland and Coastal Waters.* Academic Press, New York, NY., ISBN 0-12-258150-4., 1979.
- R. A. Freeze and J. A. Cherry. *Groundwater.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1979.
- Zoltán Gribovszki. *Környezeti transzportfolyamatok.* Tankönyvtár, 2011. URL <http://www.tankonyvtar.hu>.
- József Gruber and Miklós Blahó. *Folyadékok mechanikája.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- Ottó Haszpra. *Hidraulika II/1.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- Ottó Haszpra. *Hidraulika I.* Muegyetemi kiadó, Budapest, 2002.
- M. K. Hubbert. The theory of ground-water motion. *Journal of Geology*, 48: 785–944, 1940.
- Balázs Kovács. *Hidrodinamika és transzportmodellezés I.* Miskolci Egyetem, Muszaki Földtudományi Kar, Szegedi Tudományegyetem, Ásványtani, Geokémiai és Kozettani Tanszék, Gáma-Geo Kft., 2004.
- Mihály Kucsara, Zoltán Gribovszki, and Péter Kalicz. *Víztan.* Elektronikus tananyag, NYME, 2014.
- Pijush R. Kundu and Ira M. Cohen. *Fluid mechanics.* Academic press, 2002.
- Tamás Lajos. *Az áramlástan alapjai.* Lajos Tamás, Budapest, 2008.
- Géza Öllös. *Hidrológia és hidraulika II. rész Hidraulika.* Tankönyvkiadó, 1965.
- Géza Öllös. *Talajvizek hidromechanikája.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- Gábor Pankotai and József Rác. *Erdészeti Vízgazdálkodás.* Egyetemi Kiadó, Sopron, 1975.

- Merle C. Potter, David C. Wiggert, Bassem Ramadan, and Tom I-P. Shih. *Mechanics of Fluids*. Cengage Learning, 2012.
- Scott A. Socolofsky and Gerhard H. Jirka. *Special Topics in Mixing and Transport Processes in the Environment*. Texas A&M University, 2005.
- László Somlyódi. Szennyezőanyagok terjedésének meghatározása vízfolyásokban. *Vízügyi Közlemények*, LXVII:185–202, 1985.
- Károly Stelczer. *A vízkészletgazdálkodás hidrológia alapjai*. ELTE Eötvös kiadó, 2000.
- Béla Szalay. *Fizika*. Muszaki könyvkiadó, Budapest, 1963.
- József Tóth. A theory of groundwater motion in small drainage basins in central alberta, canada. *Journal of Geophysical Research*, 67(11):4375–4387, 1962.
- József Tóth. A theoretical analysis of groundwater flow in small drainage basins. *Journal of Geophysical Research*, 68(10):4795–4812, 1963.
- József Tóth. *Felszín alatti vizek gravitációs áramlásrendszerei, alapfogalmak, vizsgálat és felhasználás*. Doktori Kurzus, Vízföldtan, ELTE, 2006.