MÉRTAN

A KÖZÉPISKOLÁK FELSŐBB OSZTÁLYAI SZÁMÁRA.

IRTA

ÁBEL KÁROLY.

AZ 1899-IKI TANTERVNEK MEGFELELŐEN ÁTDOLGOZTÁK

D[R] LÉVAY EDE ÉS POLIKEIT KÁROLY

ÁLL. FŐGIMN. TANÁR. KIR. FŐGIMN. IGAZGATÓ

MÁSODIK RÉSZ.

TÉRMÉRTAN ÉS ANALITIKAI SÍKMÉRTAN.

A VII. ÉS VIII. OSZTÁLY TANANYAGA.

ÖTÖDIK KIADÁS.

BUDAPEST, 1904.

LAMPEL RÓBERT (WODIANER F. és FIAI)

cs. és kir. udvari könyvkereskedés kiadása

PALLAS RÉSZVÉNYTÁRSASÁG NYOMDÁJA BUDAPESTEN.

TARTALOM.

MÁSODIK RÉSZ.

TÉRMÉRTAN. (Sztereometria).

Első fejezet.

A téridomokról általában.

Második fejezet.

A testszögek.

Harmadik fejezet.

A szögletes testek tulajdonságai.

Negyedik fejezet.

A gömbölyű testek tulajdonságai.

Ötödik fejezet.

A testek hasonlóságáról.

Hatodik fejezet.

A testek felszine és köbtartalma.

Hetedik fejezet.

Gömbháromszög-mértan.

Nyolcadik fejezet.

A gömbháromszögmértan néhány alkalmazása.

ANALITIKAI SÍKMÉRTAN.

Kilencedik fejezet.

Az algebra alkalmazása a mértanra.

Tizedik fejezet.

A pontról.

Tizenegyedik fejezet.

Az elsőrendű vonalak.

Tizenkettedik fejezet.

A másodrendű vonalak.

A) A kör.

B) Az ellipszis (kerülék).

C) A hiperbola (mentelék).

D) A parabola (hajtalék).

E) A másodrendű vonalakról általában.

TÉRMÉRTAN.

(SZTEREOMETRIA.)

Első fejezet.

A téridomokról általában.

1. §. Az egyenes vonalak kölcsönös helyzete a térben.

A végtelen tér bármely pontján keresztül számtalan egyenes vonalat húzhatunk; *két* meghatározott ponton keresztül azonban csak *egyet*. Más szóval: az *egyenes vonal helyzetét két pont határozza meg*. (Sarktétel.)

Két egyenes vonalnak háromféle kölcsönös helyzete lehet a térben. T. i.:

1. a két egyenes vonal *párhuzamos*, ha mind a kettő ugyanazon síkban van, azonban egymással bármeddig meghosszabbítva sem találkozik;

2. a két egyenes *metszi* egymást, ha elegendőképen megnyújtva egy közös pontban találkozik;

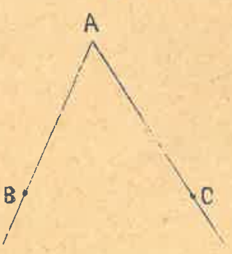
3. a két egyenes vonal *keresztező*, vagy *kitérő*, azaz egymás mellett halad el, *ha sem nem párhuzamos, sem nem metszi egymást*: ez esetben az egyenesek különböző síkokban vannak.

2. §. A sík helyzetének meghatározásáról.

A síklap jellemző tulajdonsága az, hogy rajta bármely irányban egyenes vonal húzható; azaz, ha a síklap bármely két pontját egyenes vonallal összekapcsoljuk, ennek összes pontjai a síkba esnek. Könnyü átlátni, hogy a síklap helyzetének meghatározására két pont nem elegendő; mert, ha e két pontot egyenes vonallal összekapcsoljuk, ez utóbbi körül a síklapot még körül lehet forgatni és így nem egy, hanem számtalan síklap gondolható, amely az említett két pontot magában foglalja. Ámde, ha a síklap e két pontján kívül még egy *harmadik* is adva van, akkor a síklap helyzete tökéletesen meghatározott. A *sík helyzetét* tehát *három pont határozza meg*, azonban csak akkor, ha ezek nem esnek ugyanazon egyenes vonalba.

Két egymást metsző egyenes vonal mindig ugyanazon síkban fekszik és tökéletesen meghatározza a sík helyzetét.

1. ábra.



Legyen A pont AB és AC két egyenes metsző pontja (1. ábra). Minthogy e vonalakat A, B és C pontok teljesen meghatározzák és három ponton keresztül csak *egy* síklap fektethető, azért a föntebbi tétel igaz.

Ebből kitünik: 1. hogy az egyenes vonalú háromszögnek mind a három oldala ugyanazon síkba esik; 2. két párhuzamos egyenes mindig ugyanazon síklapon fekszik.

E tételnek megfelelőleg a síklap megjelölésére három betüt használunk. Ott azonban, hol kétség nem támadhat, kevesebbel is beérhetjük.

3. §. Az egyenes és a sík kölcsönös helyzete.

Ha az egyenes vonalnak két pontja valamely síkban van, az egyenes egész hosszában ezen síkban fekszik. (Sarkigazság.)

A síkon kívül fekvő egyenes vonalnak a síkhoz képest kétféle helyzete lehet:

1. Minden olyan egyenest, amely kellően meghosszabbítva a síkkal találkozik, ehhez képest *hajlottnak* mondunk; a találkozás pontját az egyenes vonal *talppont*jának, vagy *átdöfési pont*jának nevezzük.

2. Ellenben, ha az egyenes vonal — bármennyire meghosszabbítva — sem találkozik a végtelen síkkal, akkor azt mondjuk, hogy az egyenes a síkkal és viszont, a síklap az egyenessel *párhuzamos*.

4. §. Két sík kölcsönös helyzete.

Két sík kölcsönös helyzete kétféle lehet. T. i. a síkok vagy találkoznak, vagy nem találkoznak egymással. Az első esetben a síkokat *összehajlók*nak, az utóbbiban *párhuzamosak*nak mondjuk. Két párhuzamos sík a végtelen tért három részre, két összehajló sík ellenben négy részre osztja. Az összehajló síkok metsző vonalát *él*nek nevezzük.

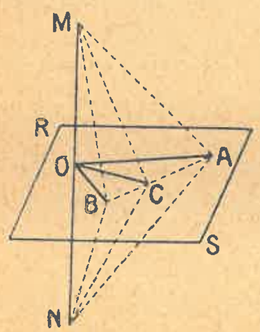
Két összehajló sík közös éle csak egyenes vonal lehet.

Mert, ha *görbe* vonal is lehetne, ezen kijelölhetnénk három olyan pontot, amelyek nem esnek ugyanazon egyenes vonalba; azonban ekkor a két síklapnak három közös pontja lenne, tehát azok a 2. §-nál fogva tökéletesen egybeesnének; ez azonban a föltétellel ellenkezik, mert eredetileg két *különböző* síkról volt szó.

5. §. A síklapra merőlegesen álló egyenes vonalakról.

1. *Ha valamely egyenes vonal a talppontján átmenő és a síkban fekvő két egyenesre merőleges, akkor a talppontján áthaladó valamennyi egyenesre és magára a síkra is merőleges.*

2. ábra.

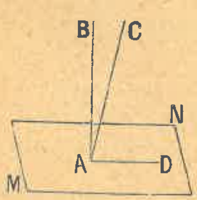


Legyen MO (2. ábra) az RS síkban húzott AO és BO egyenesekre merőleges, akkor $MO \perp OC$-re is. Mert, ha MO meghosszabbítása után $MO = NO$, akkor AB, MA, MB, NA és NB egyeneseket húzván: $AOM \triangle \cong AON \triangle$ és $BOM \triangle \cong BON \triangle$, miből: $MA = NA$, $MB = NB$; akkor $MAB \triangle \cong NAB \triangle$, tehát $MAB \sphericalangle = NAB \sphericalangle$. Ha még az MC és NC egyeneseket is meghúzzuk, akkor: $MAC \triangle \cong NAC \triangle$ és $MC = NC$, azaz $MNC \triangle$ egyenlőszárú s így: $MO \perp OC$. Azonban hasonló eljárás útján beigazolható az is, hogy MO a talppontján átvonuló valamennyi egyenesre, így tehát magára a síkra is merőleges. (*Cauchy* bizonyítása.)

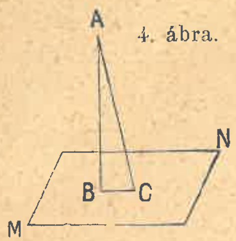
2. *Egy adott pontból valamely síkra csak egy merőlegest húzhatunk.* E tétel bebizonyításánál figyelembe kell vennünk, hogy az adott A pont vagy magában a síkban, vagy ezen kivül lehet.

a) *A pont a síkban van.* Tegyük fel, hogy $\overline{AB} \perp MN$ síkra (3. ábra) és ezenkivül AC is merőlegesen áll ugyanarra a síkra. E két egyenes vonalon keresztül vezessük BAC síkot; ez az adott MN síkot

3. ábra.



AD egyenesben metszi. A föltétel következtében úgy AB-nek, mint AC-nek merőlegesen kell állania AD-re; ez azonban lehetetlen, mert ugyanazon síklapban, ennek egyik pontján keresztül csak *egy* merőlegest húzhatunk valamely adott egyenesre. Ha tehát $\overline{AB} \perp MAN$ síkra, akkor $\overline{AC}$ nem lehet az.

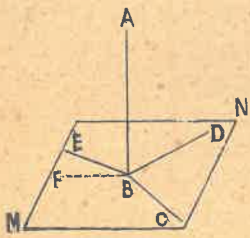


4. ábra.

b) A pont a síkon kivül van. A második esetetet illetőleg tegyük föl, hogy AB-n kivül még AC is merőleges MN síkra (4. ábra.); ekkor ABC háromszög a föltétel szerint két derékszöget foglalna magában, ámde ez lehetetlenség. Ennélfogva A pontból MN síkra AB az egyedüli merőleges egyenes.

3. *Ha valamely egyenes vonalra egyik pontján át három, vagy több merőlegest húzunk, ezek mind ugyanazon síkban vannak.*

5. ábra.



Legyen AB az adott egyenes vonal (5. ábra), melyre $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ stb. egyenesek merőlegesen állanak. Ha BC és BD egyeneseken keresztül MN síkot vezetjük, akkor AB egyenes az 1. p.-nál fogva $\perp$ ezen síkra. Azonban ugyanezen sík BE stb. egyenest is magában foglalja, mert, ha BE egyenes a síkon kivül lenne, akkor AB- és BE-n keresztül oly síkot vezethetnének, amely MN síkot BF egyenesben metszené. Minthogy $\overline{AB} \perp MN$ síkra, tehát ABF szögnek 90^0-nak kell lennie; következőleg:

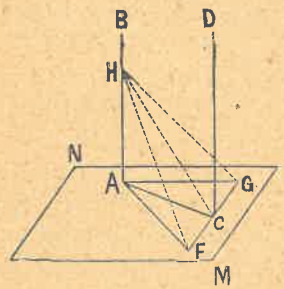
$$ABF\sphericalangle = ABE\sphericalangle = 90^0,$$

ámde ez képtelenség. Tehát BE egyenes nem fekhetik a síkon kivül. Ugyanez áll a többi merőlegesről is.

Ebből önként folyik, hogy: *ha valamely derékszöget egyik szára körül forgatunk, a másik szára síklapot ír le;* ez utóbbi tehát mindazon egyenes vonalaknak a mértani helye, amelyek valamely adott egyenesre egyazon pontban merőlegesen állanak.

4. *Az ugyanazon síklapra merőlegesen álló egyenes vonalak párhuzamosak egymással.*

6. ábra.



Legyen AB *egyenes* $\perp$ MAN síkra (6. ábra) és $\overline{CD} \perp MAN$-re; akkor $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$-vel.

Ugyanis, ha a két merőleges talppontját MN síkon AC egyenes vonallal összekapcsoljuk, $BAC\sphericalangle + DCA\sphericalangle = 180^0$. Most azonban még be kell bizonyítanunk, hogy a nevezett egyenesek ugyanazon síkban vannak. E célból CD talppontján keresztül MAN síklapon AC-re FCG merőlegest vonjuk; továbbá CF részt egyenlőnek vesszük CG-vel, és C, F, G pontokat AB-nek valamelyik pontjával (pl. H-val) összekapcsoljuk; végül még az AF és AG egyeneseket húzzuk. Az ekkép származott idomban:

a) $ACF\triangle \cong ACG\triangle$, tehát $AF = AG$;
b) $FAH\triangle \cong GAH\triangle$, $FH = GH$;
c) $FCH\triangle \cong GCH\triangle$, $HCF\sphericalangle = HCG\sphericalangle = 90^0$.

Minthogy ezenkivül a föltételnél fogva $DCF\sphericalangle = 90^0$ és a szerkesztés következtében $ACF\sphericalangle = 90^0$, tehát a 3. pont értelmében CA, CD és CH egyenesek ugyanazon síkban vannak, következöleg $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ egyenesek is ugyanazon síkban vannak és így a föntebbieknél fogva $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

5. *Viszont, ha két párhuzamos közül az egyik merőlegesen áll valamely síkra, a másik is merőlegesen áll ugyanazon síkra.*

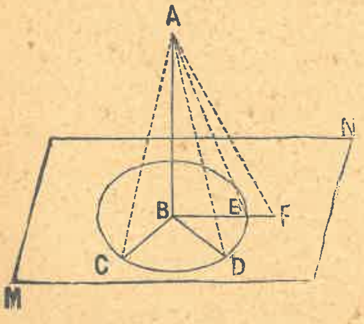
6. *Ha két egyenes vonal (AB és CD) valamely harmadikkal (EF-fel) párhuzamos, egymás közt is párhuzamos.*

Mert, ha EF harmadik egyenes vonalra merőleges síkot állítunk, ez a megelözö tantételnél fogva AB és CD egyenes vonalakkal is derékszöget alkot, következöleg a 4. pontnál fogva $AB \parallel CD$-vel.

7. *Ha A pontból* (7. ábra) *MN síkra egy merőleges és több ferde egyenest húzunk*, ezek közül:

a) *A merőleges a legrövidebb.*

7. ábra.



b) *Ama ferde egyenesek, melyeknek átdöfési pontjaik a merőleges talppontjától egyenlő távol vannak: egyenlők.* Így pl.: ha: $CB = DB = EB$, *akkor:* $AC = AD = AE$ (miért?).

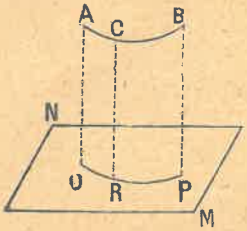
c) *Ellenben, amely ferde egyenes vonalnak az átfödési pontja a merőlegeshez közelebb van, az rövidebb.*

Igy, ha: $\overline{BD} < \overline{BF}$-nél $\overline{AD}$ is $< \overline{AF}$-nél. Ép úgy viszont. (Miért?)

6. §. Az egyenes vetülete a síkon. Az egyenes hajlásszöge.

Az A pontból (8. ábra) MN síkra bocsátott merőleges egyenes O talppontját A pont MN síkon való *vetületének* (projekcio) nevezzük. Eszerint AB vonal MN síkon való vetületén azon OP egyenest értjük, amely az adott vonal összes pontjainak vetületeit magában foglalja. Az adott síkot, amelyre valamely pontot, vagy vonalat

8. ábra.

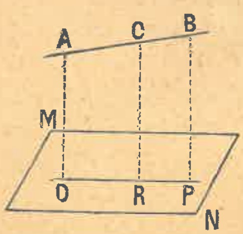


vetítünk, *vetületi síknak*, vagy *alap*-síknak, a merőlegeseket pedig *vetítő sugaraknak* nevezzük.

A föntebbi értelmezés szerint: a) a vetületi síkban fekvő pont saját magának vetülete; b) az alapsíkra merőlegesen álló egyenesnek pont a vetülete; mégpedig a merőleges egyenes vonal talppontja.

Az egyenes vonal vetülete bármely síkon egyenes vonal.

9. ábra.



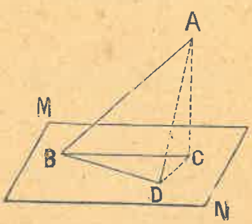
Legyen AB az adott egyenes (9 ábra), MON a vetületi sík. Ha AB egyik pl. A pontjából MN síkra AO vetítő sugarat húzzuk és e merőleges egyenesen és AB-n keresztül BAO síkot vezetjük, ez a vetületi síkot OP egyenesben metszi, és OP egyszersmind a keresett vetület. Mert, ha AB egyenes többi pontjaiból pl. B és C pontokból MN síkra a merőleges vetítő sugarakat meghúzzuk, ezek mind párhuzamosak AO-val, következőleg BAO síkban vannak: tehát a vetületi síkot csak az OP egyenesben metszhetik.

Ezért valamely egyenes vonal vetületét úgy határozzuk meg, hogy *két* pontjának a síkon való vetületét egyenes vonallal összekötjük; az összekötő egyenes lesz az adott egyenes vonal vetülete.

2. *Valamely egyenes vonal a vetületével kisebb szöget fog be, mint a vetületi sík bármely más egyenes vonalával.*

Jelöljük az MN síkhoz ferde irányú AB egyenes talppontját B-vel (10. ábra) és vonjuk A pontból AC-t a síkra merőlegesen, azaz: $\overline{AC} \perp MN$. A föntebbiek szerint BC egyenes AB-nek vetülete MN síkon. Ha ez utóbbi síkban B ponton keresztül egy másik, pl. BD egyenest húzunk, úgy ABC szög kisebb ABD-nél. Mert legyen BD egyenlő BC-vel, és kapcsoljuk össze D pontot A-val, akkor ABC és ABD háromszögekben AB oldal közös és $BC = BD$, ámde $AC < AD$; (lásd 5. §. 7. p.) tehát $ABC\sphericalangle < ABD\sphericalangle$-nél.

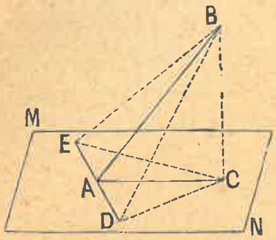
10. ábra.



ABC szöget AB egyenes vonal és MAN sík *hajlás*-szögének nevezzük.

3. *A vetületi síkban azon egyenes, amely adott ferde egyenes vetületével derékszöget alkot, magával a ferde egyenessel is derékszöget alkot.*

11. ábra.



Legyen AB (11. ábra) ferde egyenes vetülete MAN síkon AC. Legyen továbbá $AD \perp AC$-re; akkor $BAD \sphericalangle = R$.

Mert, hosszabbítsuk meg AD egyenest DA irányban és legyen $AE = AD$-vel, végül kapcsoljuk össze D és E pontot B és C-vel, akkor:

(1) $CAD \triangle \cong CAE \triangle$, következőleg $CD = CE$,

(2) $BCD \triangle \cong BCE \triangle$, « $BD = BE$,

(3) $BAD \triangle \cong BAE \triangle$, tehát: $BAD \sphericalangle = BAE \sphericalangle = 90°$.

4. Viszont, a síkban fekvő *azon egyenes* vonal, *amely a ferde egyenessel ennek talppontján derékszöget alkot, a ferde egyenes vetületével is derékszöget alkot.* (L. a 11. ábrát.)

Itt is a fentebbi 3 egyenlet érvényes, azonban megfordított rendben.

5. Minthogy a 11. ábrában: $AC = AB. \cos BAC \sphericalangle$, azért kimondhatjuk, hogy: *az egyenes vetülete annyi, mint az adott egyenesnek a hajlásszög cosinusával való szorzata.*

6. Ugyancsak a 11. ábrában $DEC \triangle$ nem egyéb, mint $BDE \triangle$ vetülete; és mert $DEC = \frac{DE.AC}{2}$ és $AC = AB. \cos BAC \sphericalangle$, azért:

$DEC = \frac{DE.AB}{2}. \cos BAC$; azonban $\frac{DE.AB}{2} = BDE \triangle$, tehát:

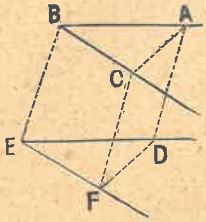
valamely háromszög vetületének területe annyi, mint az eredeti háromszög területszámának a hajlásszög cosinusával való szorzata.

7. Figyelembe véve végül, hogy a sokszög átlókkal háromszögekre bontható és hogy a kört végtelen sok oldalú sokszögnek tekinthetjük, kimondhatjuk, hogy: *bármely sokszög, vagy kör vetületének területe annyi, mint az eredeti idom területszámának a hajlásszög cosinusával való szorzata.*

7. §. Párhuzamos egyenes vonalak és síklapok.

1. *Oly szögek, amelyeknek száraik párhuzamosak és egy felé irányulnak, egyenlők.*

12. ábra.



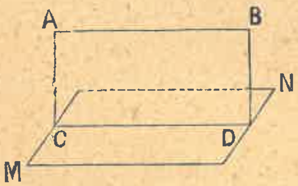
Legyen $\overline{BA} \parallel \overline{ED}$ és $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ (12. ábra); ezenkívül feltesszük, hogy a párhuzamos szárak egy felé irányulnak, más szóval, vagy mind a két szög hegyes, vagy mind a kettő tompa.

Legyen $BA = ED$, és $BC = EF$; továbbá húzzuk meg BE, CF, AD, AC és DF egyeneseket. Az ekkép alakított $ABED$ és $CBEF$ idomok parallelogrammák, mert mindegyikben két átellenes oldal párhuzamos és egyenlő. Ennek folytán $ADFC$ is parallelogramma (miért?); tehát $AC = DF$; és:

$ABC \triangle \cong DEF \triangle$, tehát $ABC \sphericalangle = DEF \sphericalangle$.

2. *Ha valamely AB egyenes vonal az MN síklapon fekvő bármely, pl. CD egyenessel párhuzamos, akkor magával a síkkal is párhuzamos* (13. ábra).

13. ábra.



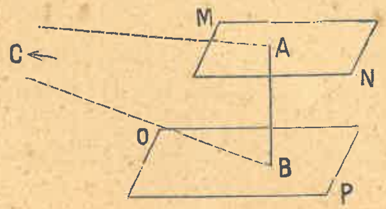
Minthogy $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$-vel, mind a kettő a közös $ABCD$ síkban van. Ha $\overline{AB}$ egyenes MN síkkal találkoznék, találkozásuk pontja a két sík közös átmetsző egyenesébe, azaz CD-be esnék; ámde ez a föltétellel ellenkezik, mert $AB \parallel CD$-vel. Az ellenmondás csak úgy szünik meg, ha AB egyenes MN síkkal párhuzamos.

3. *Viszont, ha AB egyenes MN síkkal párhuzamos és AB-n keresztül oly síkot vezetünk, amely az adott síkot metszi, a CD metsző vonal AB egyenessel párhuzamos.*

(L. a 13. ábrát.) Ezt indirekt módon kell bebizonyítani.

4. *Ha valamely AB egyenes vonal MN és OP két síklapra merőlegesen áll, e két sík párhuzamos.* (14. ábra.)

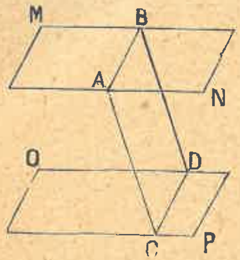
14. ábra.



Mert, ha MN sík nem lenne $\parallel OP$-vel, a közös él egyik pontjából, pl. C-ből AB merőleges vonal talppontjához két egyenes vonalat (AC-t és BC-t) húzhatnánk és ennek folytán oly háromszög támadna, amely két derékszöget foglalna magában; ily háromszög azonban nem alakítható; tehát MN sík $\parallel$ OP-vel.

5. *Ha két párhuzamos síkot egy harmadikkal átmetszünk, a metszés egyenesei párhuzamosak.* Így, ha MN-et és OP-t (15. ábra) ABC metszi, úgy $AB \parallel CD$.

15. ábra.

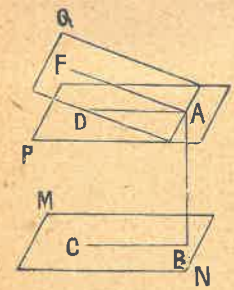


Mert, ha a metsző síkban fekvő AB és CD egyenesek nem lennének párhuzamosak, okvetetlenül találkoznának egymással; ámde ez esetben az adott MN és OP síkok is összeérnének, ez azonban a föltételnél fogva lehetetlen, tehát AB és CD egyenesek szükségkép párhuzamosak.

6. *Ha valamely egyenes vonal két párhuzamos sík közül az egyikkel párhuzamos, a másikkal is párhuzamos.*

7. *Adott síkhoz valamely kívüle fekvő ponton keresztül csak egy párhuzamos síkot fektethetünk.*

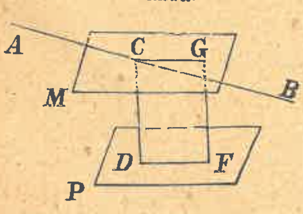
16. ábra.



Legyen MN az adott sík (16. ábra), A a külső pont és AP sík $\parallel$ MN-nel. A-ból az adott síkra AB merőlegest húzzuk. Most, ha AP síkon kívül *még egy párhuzamos* sík, pl. AQ léteznék, AB egyenesen keresztül oly síkot fektethetnénk, amely MN, AP és AQ síkokat BC, AD és AF egyenes vonalakban metszené. Ekkor azonban AD párhuzamos lenne BC-vel és AF is $\parallel$ lenne BC-vel, ami képtelenség. Eszerint AQ sík nem lehet $\parallel$ MN síkkal, tehát a bebizonyítandó tétel igaz.

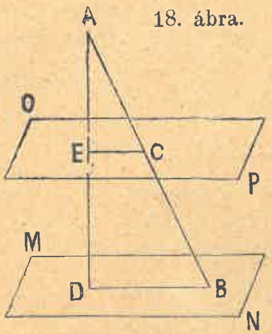
8. *Ha valamely egyenes vonal két párhuzamos sík közül az egyiket átdöfi, akkor kellően meghosszabbítva a másikat is át fogja döfni.*

17. ábra.



Legyen M sík $\parallel$ P síkkal (17. ábra). Ha $\overline{AB}$ az előbbit C pontban átdöfi, akkor kellően meghosszabbítva az utóbbit is átdöfi; mert, ha ez nem következnék be, $\overline{AB}$ párhuzamos lenne P síkkal. Ámde, ha most $\overline{AB}$ vonalon és P sík valamelyik pontján, pl. D-n keresztül $FDCG$ síkot vezetnök, DF-nek a 3. pontnál fogva párhuzamosnak kellene lennie AB-vel; másrészt pedig ugyanaz a DF az 5. pontnál fogva egyszersmind $\parallel$ lenne $\overline{CG}$-vel. Eszerint $CDFG$ síklap C pontján keresztül FD-hez két párhuzamost lehetne húzni, ez pedig lehetetlen. Tehát AB nem lehet $\parallel$ P síkkal és így kellően meghosszabbítva átdöfi azt.

9. *Amely egyenes két párhuzamos sík közül az egyikre merőleges, a másikra is merőleges.* (Miért?)



18. ábra.

10. *Ha két párhuzamos síkot ugyanazon ferde vonallal átmetszünk, ez mind a két síkkal egyenlő hajlás-szöget alkot.*

Legyen MN sík $\parallel$ OP-vel (18. ábra). AB ferde egyenes valamelyik pontjából, pl. A-ból MN síkra AD merőlegest bocsátva, ez az előbbi tantételnél fogva OP síkra is merőleges. Kössük össze B pontot D-vel és C-t E-vel. Minthogy $BD \parallel CE$-vel, $ABD \sphericalangle = ACE \sphericalangle$.

11. *Ha két sík egy harmadikkal párhuzamos, egymással is párhuzamos.*

Ezt a harmadik síkra merőlegesen állított egyenes segítségével bizonyítjuk be.

8. §. A lapszögekről. Két sík hajlási szöge.

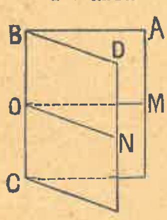
Két egymást metsző sík *lapszöget* alkot. Ezt is forgásból származottnak tekinthetjük, és így kimondhatjuk, hogy *a lapszög a síklapnak egy egyenes körül való forgásából ered.* Ha t. i. a síkot a benne fekvő egyenes vonalak valamelyike körül körülforgatjuk, a forduló síklap mindegyik helyzete az eredeti helyzettel egy-egy *lapszöget* zár be. A lapszög tehát a *sík* fordulásának nagyságát méri. A lapszöget alkotó síkokat *szárlapok*nak hívjuk.

A lapszöget négy betűvel szokás jelölni, ekkép: A(BC)D (19-ik ábra). A két középső betű a síkok BC metsző egyenesét, azaz a lapszög élét, a két szélső betű a két síklapot jelöli.

Amely lapszögek síkjai egymásba illeszthetők, azok *egyenlők*.

A lapszöget azon egyenes vonalú szöggel mérjük, amelyet a közös élre valamely pontjában a két síkban meghúzott merőlegesek befognak; ezt a szöget a két sík *hajlás*-szögének nevezzük.

19. ábra.



Így, ha ABC síkban (19. ábra) OM egyenes vonal $\perp$ BC-re és DBC síkban $ON \perp BC$-re; akkor MON szög a nevezett síkok hajlási szöge és egyszersmind $A(BC)E$ lapszög mértéke.

Ha valamely lapszög egyik síkját a közös élen túl megnyújtjuk, *mellék*lapszög keletkezik. Ha a lapszög a mellékIapszögével egyenlő, azt *derék*lapszögnek nevezzük. A deréklapszöget alkotó síkok *merőlegesen állanak* egymásra. A fogalmak és elnevezések hasonlóságából magyarázat nélkül is megérthető, mi a *hegyes*, mi a *tompa* lapszög, mik a *csúcslapszögek*? Továbbá könnyü kimutatni: hogy a *deréklapszögek mind egyenlők*, szintúgy *a megfelelő csúcslapszögek is egyenlők*; továbbá, hogy *két melléklapszög együttesen két deréklapszöggel, az ugyanazon él körül fekvő lapszögek összege pedig négy deréklapszöggel egyenlő.* E tételek bebizonyításai az egyenes vonalú szögekre vonatkozó bizonyításokkal tökéletesen megegyezők.

A hajlási szög tulajdonságai a következők:

1. *A hajlási szög az él bármely pontján egyenlő.*

2. *Az él a hajlási szög síkjára merőlegesen áll.*

3. *Egyenlő lapszögeknek egyenlő hajlásszögek felelnek meg,* mert két egyenlő lapszöget okvetetlenül egymásba illeszthetünk akkép, hogy nemcsak síkjaik és élük, hanem a megfelelő hajlási szögek szögpontjai is egybeesnek: ekkor azonban az utóbbiak *szárai* is összeesnek, mert ugyanazon síkon az egyenes vonalra bizonyos pontjában csak egy merőleges vonalat lehet húzni.

4. Ebből önként folyik, hogy *a deréklapszögeknek megfelelő hajlási szögek derékszögek.*

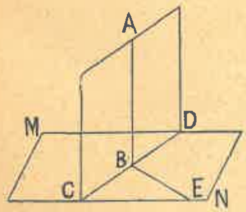
5. *Két lapszög aránya mindig egyenlő a megfelelő hajlási szögek arányával.* Ugyanis, a két lapszög vagy összemérhető, vagy nem. Első esetben tételünk a 3. pontnak egyszerű folyománya. Második esetben e tétel helyességét közvetve, az első eset alapján bizonyítjuk be.

A hajlási szögek eme tulajdonságaiból nyilvánvaló, hogy: ha valamely lapszöget a deréklapszög 90-ik részével, vagyis a lapszög*fokkal* megmérünk, ez utóbbi egység annyiszor van meg az adott lapszögben, ahányszor a közönséges szögfok a megfelelő hajlási szögben. *Ezért a hajlási szög méltán szolgál a lapszög mértékeül.*

9. §. A merőleges síkokról.

1. *A síkra merőlegesen álló egyenes vonalon áthaladó második sík az előbbi síkra merőleges.*

20. ábra.

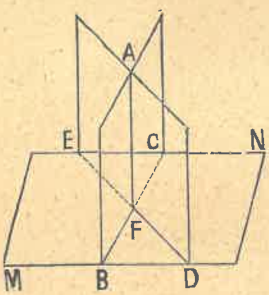


Legyen AB egyenes $\perp$ *MBN síkra* (20. ábra). Tegyük fel, hogy az AB-n átmenő sík az adott MN síkot CD egyenesben metszi. Húzzuk meg B talpponton keresztül MN síkban a BD-re merőleges BE egyenest. Az ekkép származó ABE szög a két sík hajlási szögét ábrázolja; minthogy pedig $ABE\sphericalangle = 90^{\circ}$, tehát ABC sík $\perp$ MN síkra.

2. *Viszont, ha két merőleges sík egyikében a közös élre merőleges egyenest húzunk, ez a másik síkra is merőleges.* Legyen ACD sík $\perp$ MN síkra és $\overline{AB}$ egyenes $\perp$ $\overline{CD}$-re (20. ábra.) Vonjuk BE-t MN síkban merőlegesen CD vonalra. Az ekkép származó $ABE\sphericalangle = 90^{\circ}$, mert a két sík hajlási szöge a föltételnél fogva derékszög. Eszerint $\overline{AB} \perp \overline{BE}$; ámde azonkívül $\overline{AB} \perp \overline{CD}$; tehát $AB \perp MN$ síkra.

3. E tételből önként következik, hogy: *ha két merőleges sík közös élének egyik pontjában az egyik síkra merőlegest állítunk, ez a merőleges teljesen a másik síkban fekszik.*

21. ábra.



4. *Ha két sík merőlegesen áll ugyanazon harmadikra, az előbbi kettőnek éle is merőlegesen áll a harmadik síkra.*

Ugyanis tegyük föl, hogy ABC és ADE sík $\perp$ MN síkra (21. ábra.) Most, ha az előbbi két sík AF metszővonalának F talppontján MN síkra merőlegest húzunk, ennek a 3. p.-nál fogva úgy ABC, mind ADE síkba kell esnie; e merőleges tehát nem lehet más, mint az utóbbi síkok közös éle: AF.

10. §. A legegyszerübb térmértani szerkesztések.

A térmértani szerkesztések annyiban lényegesen különböznek a síkmértaniaktól, amennyiben azok végrehajtására semmiféle eszközünk sem lévén, csak gondolatban fejthetők meg; ellenben a síkmértani szerkesztések vonalzó és körző segítségével valósággal végrehajthatók. Amazoknak csupán elméleti becsük van, ezek ellenben gyakorlatilag is alkalmaztatnak.

A térbeli szerkesztések a következő három egyszerü alapföladatra vezethetők vissza:

a) *Három ponton keresztülhaladó sík szerkesztése.*

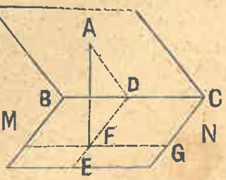
b) *Valamely síklap és egyenes vonal átdöfési pontjának fölkeresése.*

c) *Két sík metszőegyenesének meghatározása.*

Ezen követelményeken kívül a síkmértani szerkesztések ismerete is elengedhetetlenül szükséges.

1. *Adott A pontból adott MN síkra szerkesszünk merőlegest.*

22. ábra.

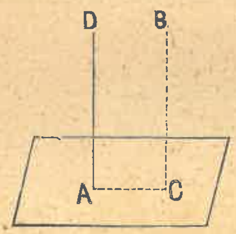


Húzzuk meg az adott síkban a tetszés szerinti BC egyenest (22. ábra) és ez utóbbin meg A ponton keresztül fektessük ABC síkot; most ebben A pontból BC-re AD merőlegest húzván, emeljük az MN sík D pontjában $DE \perp BC$ egyenest, végre ADE szög síkjában $AF \perp DE$-t; akkor AF egyenes $\perp MN$ síkra.

Ennek bebizonyitása céljából húzzuk meg F pontból MN síkban FG-t $\| BC$-vel. Minthogy BC úgy AD, mint ED-vel derékszöget alkot, azért $BC \perp ADF$ szög síkjára is; következőleg a BC-vel párhuzamos FG szintén $\perp ADF$ síkra, tehát $FG \perp AF$-re is. Eszerint $AF \perp FG$-re és ezenkivül $AF \perp FD$-re, tehát: $AF \perp MN$ síkra.

2. *A sík valamely adott A pontjában szerkesszünk a síkra merőleges egyenest.*

23. ábra.



Húzzuk meg a síkon kivül fekvő, egyébként tetszés szerinti B pontból (23. ábra) BC merőlegest; továbbá kössük össze A-t C-vel és vezessük BCA szög szárain keresztül BCA síkot, melyben AD legyen párhuzamos BC-vel. Ezen $AD \perp$ az adott síkra.

3. *Szerkesszünk a síkon kivül adott A ponton keresztül az adott síkhoz párhuzamos egyenest.* (13. ábra.)

Vezessünk a kijelölt A ponton keresztül oly síkot, mely az adott MN síkot átmetszi és húzzuk meg A pontból az új síkban a metsző egyenes vonalnak megfelelő párhuzamost; ez az adott síkkal is párhuzamos.

Minthogy az új síkot *tetszés szerint* vezettük A ponton keresztül, azért *számtalan* párhuzamos vonható; azaz, a föladat határozatlan.

4. *Valamely adott pontból két adott síkhoz párhuzamos egyenes szerkesztendő.*

Ha a két sík egymást metszi, akkor az átmetszési egyeneshez vont párhuzamos mind a két síkkal párhuzamos. Ellenben, ha a két adott sík párhuzamos, akkor a föladat az előbbivel azonos.

5. *Adott A ponton keresztül valamely adott MN síkhoz párhuzamos sík szerkesztendő.* (E szerkesztést azon az alapon végezhetjük, hogy a párhuzamos szárú szögek párhuzamos síkokban fekszenek.)

6. *Szerkesszünk valamely egyenes vonal meghatározott A pontján keresztül ugyane vonalra merőleges síkot.*

Vezessünk az adott egyenes vonalon keresztül két síkot; húzzuk meg mindegyikben az adott A ponton keresztül a mondott egyenesre az illető merőleges egyeneseket; az utóbbiak által meghatározott síklap az adott egyenes vonalra merőlegesen áll. (Lásd 5. §. 1. p.)

7. *Szerkesszünk valamely meghatározott A pontból adott BC egyenesre merőleges síkot.* (22. ábra.)

Az adott A ponton és BC egyenesen keresztül síkot vezetve, húzzuk ebben AD-t merőlegesen BC-re, ezután fektessünk BC-n keresztül még egy másik síkot és húzzuk ebben ismét DE-t merőlegesen BC-re; az ADE-n átmenő sík $\perp$ BC-re.

8. *Valamely adott AB egyenes vonalon keresztül vezessünk oly síkot, mely egy másik MN síkra merőleges.*

Ha az adott AB egyenes valamely pontjából MN síkra merőlegest húzunk és ezen meg AB-n keresztül síkot vezetünk, az utóbbi merőlegesen áll MN síkra.

9. *Bizonyos ponton keresztül vezessünk oly síkot, amely adott egyenessel párhuzamos és adott síkra merőleges.*

Előbb a kijelölt ponton keresztül meghúzzuk a párhuzamost az adott egyeneshez, azután a merőlegest az adott síkra: az eme két egyenes meghatározta sík a feladat mindkét kivánalmának megfelel.

10. *Határozzuk meg két, különböző síkban fekvő egyenes távolságát.*

11. *Határozzuk meg azon sík fekvését, amely négy nem ugyanazon síkban lévő adott A, B, C és D ponttól egyenlő távol van.*

12. *Valamely A ponton keresztül fektessünk oly síkot, mely két nem ugyanazonsíkba tartozó BC és DE adott egyenes vonalhoz párhuzamos.*

13. *Keressük valamely adott fekvésü sík azon pontját, mely a síkon kivül fekvő három kijelölt ponttól egyenlő távolságra esik.*

Második fejezet.

A testszögekről.

11. §. A testszög fogalma. Csúcs- és sarktestszögek.

Ha egymást páronként metsző három, vagy több sík élei ugyanazon pontban összetalálkoznak, úgy e síkok a térnek egy oldalon nyitott részét fogják körül, amelyet *testszög*nek nevezünk. A szoba padozata és két fala ott, ahol összeérnek, testszöget alkotnak. Minden testszögnek megvan a párja, melyet az előbbihez képest *külső* testszögnek nevezünk. Ez épen így van az egyenes vonalú szögeknél is, melyek szintén csak párosan gondolhatók. Három *végtelen kiterjedésű*, nem párhuzamos sík, ha egy közös pontban összeér, a végtelen tért *nyolc* testszögre osztja.

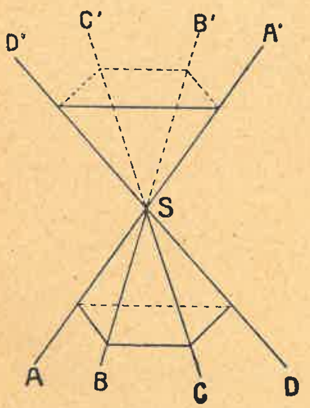
A közös pontot a testszög *csúcs*ának, a találkozó síkokat *oldallapok*nak, metsző vonalaikat a testszög *éle*inek és a két-két szomszédos él bezárta szögeket *élszögek*nek nevezzük.

Minden testszögben az élek, élszögek és lapszögek száma az oldallapok számával egyenlő. (Miért?)

A testszöget úgy szoktuk megjelölni, hogy a csúcspont melletti betűt első helyre tesszük, az éleket jelző betűket pedig zárjelbe foglalva a csúcspont betűje után írjuk, ilymódon: *S(ABCD)*. (24. ábra.)

Ha valamely *S(ABCD)* testszög éleit a csúcson túl megnyújtjuk, *S(A'B'C'D')*, új testszög keletkezik, melyet az előbbihez képest *csúcstest*szögnek nevezünk. Világos, hogy ez utóbbinak él- és lapszögei kölcsönösen egyenlők az eredeti testszög hasonnevű részeivel, mindamellett a két testszög még sem egybevágó, azaz egymásba helyeztetvén, nem födi egymást, mert az él-és lapszögek mindegyik testszögben más-más rendben sorakoznak. Ugyanis képzeljük *S(A'B'C'D')* testszögnek *SA'D'* oldalát (mely a papir síkjába esik) az eredeti testszög megfelelő *SAD* oldallapjára illesztve akkép, hogy mind a két testszög élei a közös síktól egyfelől essenek; már most, ha *SD* éltől kiindulva a két testszöget körüljárjuk, az él- és lapszögek ellenkező sorrendben tűnnek szemünkbe. Az ilyen testszögeket *szimmetrikus*oknak mondjuk. Szimmetrikus testszögek tehát azok, amelyeknek megfelelő él- és lapszögeik egyenlők ugyan, azonban megfordított rendben sorakoznak.

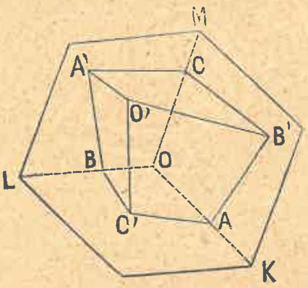
24. ábra.



Az alábbiakban csak oly testszögekről szólunk, amelyeknek lapszögei behajlók, azaz 180°-nál kisebbek.

Minden testszögnek megfelel egy más u. n. sarktestszög, amely utóbbinak $\frac{\textit{élszögei}}{\textit{lapszögei}}$ *az előbbinek* $\frac{\textit{lapszögeit}}{\textit{élszögeit}}$ *két derékszögge egészítik ki.*

25. ábra.



Ennek bebizonyítása végett $O(KLM)$ testszög belsejében (25. ábra) tetszés szerint felveszünk egy O' pontot; ebből a nevezett testszög három oldalsíkjára $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ merőlegeseket vonjuk és két-két merőlegesen keresztül síkot fektetünk; e három sík az eredeti testszög éleit A, B és C pontokban metszi. Lássuk már most az új $O'(A'B'C')$ és az eredeti testszög között milyen vonatkozás van.

Először is nyilvánvaló, hogy az új testszög oldallapjai, u. m. $AB'O'C'$, $BC'O'A'$ és $CA'O'B'$ síkok az eredeti testszög OA, OB, OC éleire merőlegesen állanak; következőleg $B'AC'$, $C'BA'$ és $A'CB'$ szögek az eredeti síkok hajlási szögei, vagyis az $O(ABC)$ testszög lapszögei. Ámde: $B'O'C' \sphericalangle + B'AC' \sphericalangle = 2R$, $C'O'A' \sphericalangle + C'BA' \sphericalangle = 2R$

és $A'O'B' \sphericalangle + A'CB' \sphericalangle = 2R$;

tehát az új testszög élszögei az eredetinek lapszögeit két derékszöggé egészítik ki.

Továbbá, az $A'B$ és $A'C$ egyenesek $A'O'C'$ és $A'O'B'$ síkokban az $A'O'$ egyenesre merőlegesen állanak, tehát $BA'C$ szög a nevezett síkok hajlási szöge, amely egyszersmind az új testszög $O'A'$ élén fekvő lapszöget ábrázol. Hasonlólag $CB'A$ és $AC'B$ szögek az új testszög másik két lapszögét képviselik. Azonban: $BA'C \sphericalangle + BOC \sphericalangle = 2R$, $CB'A \sphericalangle + COA \sphericalangle = 2R$, $AC'B \sphericalangle + AOB \sphericalangle = 2R$, tehát az új testszög lapszögei az eredeti testszög élszögeit két derékszöggé egészítik ki.

12. §. A testszögek általános tulajdonságai.

1. *Minden háromélű testszögben két élszög összege nagyobb a harmadik élszögnél.*

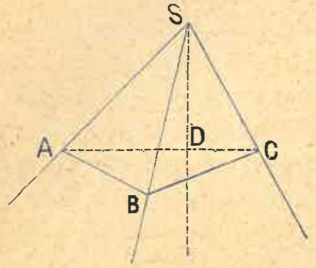
E tantételt csak arra az esetre szükséges bebizonyitani, ha a harmadik élszög (t. i. az, amelyet a másik kettővel összehasonlítunk) a legnagyobb, máskülönben a tantétel már magában világos.

Tegyük föl tehát, hogy $S(ABC)$ testszögben (26. ábra) ASC élszög a legnagyobb. Akkor:

$$ASB \sphericalangle + BSC \sphericalangle > ASC \sphericalangle\text{-nél.}$$

Ennek bebizonyítása végett ASC síkban ASD szöget egyenlőnek rajzoljuk ASB szöggel, továbbá SD-t $= SB$-vel, D ponton keresztül

26. ábra.



tetszés szerinti ADC egyenest vonunk és ennek végpontjait összekapcsoljuk B ponttal.

Minthogy $ASD \triangle \cong ASB \triangle$, tehát $AD = AB$.

Azonban: $AC < AB + BC$; kivonva az egyik oldalon AD-t és a másikon a vele egyenlő AB-t, marad: $DC < BC$-nél.

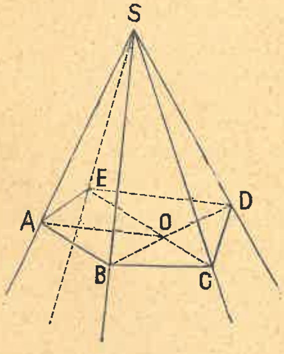
Minthogy CSD és CSB háromszögekben $CS = CS$, $SD = SB$, azonban $DC < BC$-nél, tehát $CSD \sphericalangle < CSB \sphericalangle$-nél.

Adjuk ehhez: $ASD \sphericalangle = ASB \sphericalangle$-et, lesz: $ASD \sphericalangle + CSD \sphericalangle < ASB \sphericalangle + CSB \sphericalangle$, vagyis: $ASC \sphericalangle < ASB \sphericalangle + BSC \sphericalangle$.

2. *Bármely testszög élszögeinek összege kisebb négy derékszögnél.* Vezessünk az adott n élü S testszögen (27. ábra) át valamely síklapot akkép, hogy ez annak minden élét messe; a metszö pontok legyenek A, B, C, D stb.; ezután húzzunk a metsző sík egyik pl. O pontjából az élek metszéspontjaihoz egyenes vonalakat. Ez úton úgy S, mint O pont körül n háromszög alakult. Mindegyik csoportban a szögek összege $2nR$ és így a szögek összege a két idomcsoportban *egyenlő.*

Azonban A pontban az EAO és OAB szögek együttvéve az EAB szöget alkotják és ez utóbbi az 1. p. szerint kisebb BAS és SAE szögek összegénél; hasonlólag B pontban $ABC\sphericalangle < ABS\sphericalangle + SBC\sphericalangle$-nél; ugyanez áll $ABCDE$ ábra többi szögeiről is. Ebből azt következtetjük, hogy az *O pont körül lévő háromszögekben az AB, BC, CD, stb. egyenes vonalakon fekvő szögek összege kisebb mint az S csúcs körül alkotott háromszögekben;* ebből ismét szükségkép következik, hogy az O csúcs körül lévő szögek összege nagyobb, mint az S pont körül levőké, mert különben a szögek összege a két háromszögcsoportban nem lehetne egyenlő. Ámde az O pont körül található szögek összege $4R$, tehát világos, hogy az S szöget alkotó n élszög összege kisebb $4R$-nél.

27. ábra.



3. *Bármely n élű testszögben, melynek lapszögei egyenként kisebbek 180⁰-nál, a lapszögek összege kisebb 2n derékszögnél, azonban nagyobb 2n—4 derékszögnél.*

Mert, a testszögnek egy-egy lapszöge a sarktestszög megfelelő élszögével együtt $2R$. Ámde a sarktestszögben az élszögek összege nagyobb 0^0-nál és kisebb $4R$-nél (l. a 2. pontot) tehát az adott testszögben a lapszögek összege kisebb $2nR$-nél, azonban nagyobb $2nR—4R$-nél.

Ennek következtében: *minden háromélű testszögben a lapszögek összege nagyobb két és kisebb hat derékszögnél.*

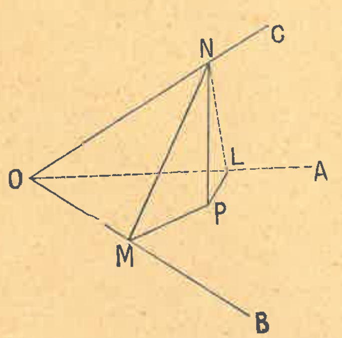
13. §. A háromélü testszögek meghatározása.

Amily fontos a háromszög a síkmértanban, oly nagy jelentőségü a háromélü testszög a térmértanban. Felvetjük most a kérdést, hogy: *hány alkotórész szükséges és elégséges a háromélü testszög meghatározására?*

Hosszas fejtegetés nélkül is átlátjuk, hogy e célra egy, vagy két alkotórész nem elég, hanem legalább is *három adott alkotórész ismerete szükséges.* Mielőtt azonban a különböző eseteket tüzetesen tárgyalnók, ismétlések elkerülése végett előre bocsátjuk azon térbeli idom leírását, mely későbbi vizsgálataink alapjául szolgál.

Legyen $O(ABC)$ valamely háromélü testszög (28. ábra), melyben rövidség kedvéért az élszögeket a, b, c-vel, a lapszögeket α, β, γ-val jelöljük; azaz $BOC = a$, $COA = b$, $AOB = c$, az a-val szemközt fekvő $B\ (OA)\ C$ lapszög $= \alpha$, stb.

28. ábra.



Az OC él valamelyik N pontjából az átellenes AOB síkra NP merőlegest vonjuk, továbbá az utóbbinak P talppontjából az AO élre PL merőlegest és végül LN egyenest húzzuk. A 6. §. 3. pontjánál fogva $AO \perp NL$ egyenes vonalra, következőleg NLP szög nem más, mint AOB és AOC síkok hajlási szöge, vagyis $NLP\sphericalangle = \alpha$. Hasonlólag, ha P pontból BO élre PM merőlegest vonjuk és M pontot összekapcsoljuk N-nel, BO él nemcsak PM, hanem MN-nel is derékszöget alkot; következőleg $NMP\sphericalangle = \beta$.

I. *A háromélü testszög meghatározása három élszög alapján.* (28. ábra.) A három élszög ismeretes lévén, ON hosszát tetszés szerint felvesszük és valamely síklapon ONL és ONM derékszögü háromszögeket külön-külön megalakítjuk. Ezen alakítás csak egy-egy háromszöget eredményezhet, mert az átfogó és egy hegyes szög a derékszögü háromszöget tökéletesen meghatározzák. Ennek folytán OL és OM egyenesek szintén ismeretesek és így azokat AOB szög száraira ráméhetjük. Ez után AOB síkban L és M pontokon keresztül OA-ra és OB-re LP és MP merőlegeseket szerkesztjük, minek következtében LP és MP egyenesek hossza is meg van határozva. Végül NP egyenes vonal $\perp$ AOB síkra; tehát NPL háromszögből LN, LP oldalokat és LPM szöget ($=90^0$) ismerjük, következőleg NPL $\triangle$-et is megalakíthatjuk és ez úton $PLN=\alpha$ szög is meg van határozva. Hasónlólag MPN háromszög is megrajzolható, mert ebből MN és MP oldalak és MPN derékszög ismeretesek, következőleg NPM szög, azaz β is meg van határozva.

Ugyanilyen módon bármely lapszög-pár meghatározható. Ennélfogva állíthatjuk, hogy: *a sor szerint adott három élszög teljesen meghatározza a háromélü testszöget.*

Innen egyenesen következik, hogy: *az oly háromélü testszögek, amelyeknek élszögeik rendre egyenlők, vagy egybevágók, vagy szimmetrikusok,* aszerint, amint élszögeik ugyanazon, vagy megfordított rendben sorakoznak. Továbbá:

1. *Amely háromélü testszögnek két élszöge egyenlő, annak átellenes lapszögei is egyenlők.* (Lásd a 28. ábrát.) Mert, ha $b=a$, akkor $OLN\triangle \cong OMN\triangle$, tehát $NL=NM$, következésképp $NPL \triangle \cong NPM\triangle$ és így: $\alpha=\beta$.

Ha valamely háromélü testszögnek mind a három élszöge egyenlö, lapszögei is mind egyenlők. Ha mind a három élszög derékszög, a három lapszög is déréklapszög. (Miért?)

2. *A háromélü testszögben a nagyobb élszöggel szemközt levő lapszög nagyobb, mint a kisebbikkel szemközt eső.* (28. ábra.)

II. *A háromélü testszög meghatározása három lapszög alapján.*

Ezen eset a sarktestszög segítségével az I-re vezethető vissza. Mert, ha valamely háromélü testszögből a lapszögek α, β, γ ismeretesek, egyuttal a megfelelő sarktestszög élszögei a_1, b_1, c_1 is meg vannak határozva; ugyanis $a_1=2R-\alpha$, $b_1=2R-\beta$, $c_1=2R-\gamma$. Azonban eme sarktestszög α_1, β_1, γ_1 lapszögeit az I. pont alapján meghatározhatjuk; miből azután az eredeti háromoldalú testszög élszögeit is megtudjuk, minthogy $a=2R-\alpha_1$, $b=2R-\beta_1$ és $c=2R-\gamma_1$.

Tehát: *a sor szerint adott három lapszög teljesen meghatározza a háromélű testszöget.*

Továbbá: *amely háromélű testszögekben a megfelelő lapszögek egyenlők, azok vagy egybevágók, vagy szimmetrikusak* aszerint, amint a lapszögek egyenlő, vagy fordított rendben sorakoznak.

Ha valamely háromélű testszögnek két lapszöge egyenlő, az átellenes két élszög is egyenlő.

Ellenben: *ha a lapszögek különbözők, a nagyobbik lapszöggel nagyobb élszög van szemben, mint a kisebbikkel.*

III. *A háromélű testszög meghatározása két élszög és a közben fekvő lapszög alapján.*

Legyenek adva b, c élszögek és aköztük fekvő α lapszög (28. ábra). — ON hosszúságot ismét tetszés szerint felvéve, AOC, vagyis b szög síkjában NL merőlegest vonjuk, miáltal L pontot és NL-et megtaláljuk. Már most, NLP háromszögből $NPL\sphericalangle = R$ továbbá $NLP\sphericalangle$, vagyis α és NL átfogó ismeretes, következőleg a nevezett háromszög is megalakítható, ami LP és NP egyenesek ismeretére vezet. Ezekután L ponton keresztül AOB síkon AO-ra LP merőlegest húzzuk és erre az imént talált LP hosszúságot átvisszük, P pontból pedig OB-re PM merőlegest vonjuk, miáltal PM és OM egyenesek is meg vannak határozva. Ezek folytán OMN háromszögből $OMN\sphericalangle = R$, OM befogó és ON átfogó ismeretesek lévén, MON, vagyis $BOC\sphericalangle$ (azaz a harmadik élszög) is megtudható. A három élszögből azután az I. pont alapján β és γ lapszögek is meghatározhatók. Tehát:

Bármely háromélű testszög a sor szerint adott két élszög és a közbefogott lapszög által tökéletesen meg van határozva.

Következőleg:

Ha két háromélű testszögben két megfelelő élszög és a közben fekvő lapszög egyenlők, azok vagy egybevágók, vagy szimmetrikusak aszerint, amint az említett alkotórészek egyenlő, vagy fordított rendben sorakoznak.

IV. *A háromélű testszög meghatározása két lapszög és a közbenfekvő élszög alapján.*

Az előbbi pontból a sarktestszög segítségével következik, hogy:

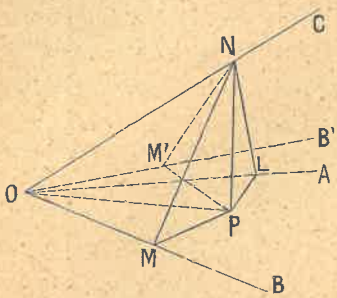
A háromélű testszöget a sor szerint adott két lapszög és a közbenfekvő élszög teljesen meghatározzák. Továbbá, hogy:

Amely háromélű testszögekben két megfelelő lapszög és a közbefoglalt élszög egyenlők, azok vagy egybevágók, vagy szimmetri-

kusak, amint t. i. a mondott részek ugyanazon, vagy megfordított sorban következnek.

V. Tegyük fel most, hogy két élszög a és b és a velük átellenes lapszögek egyike α ismeretes. (29. ábra).

29. ábra.



ON hosszát ismét tetszés szerint felvéve, először az ONL és ONM háromszögeket szerkesztjük meg és ezek útján L és M pontokat, továbbá OL, NL és OM egyeneseket meghatározzuk. Ezek folytán az LPN háromszögben a derékszögön kivül NL átfogó és NLP szög, vagyis α ismeretesek, következőleg a háromszög többi részét, tehát LP befogót is ismertnek tekinthetjük. Ezen LP az előbb talált OL egyenessel OPL derékszögü háromszöget is meghatározza. Végül az utóbbinak OP átfogója, továbbá OM egyenes és $OMP \sphericalangle = 90^0$ segítségével OPM háromszöget is megalakíthatjuk. Itt azonban kétség forog fenn, amennyiben nem tudhatni, vajjon $OPM \triangle$ $\overline{OP}$ egyenes innenső, vagy tulsó oldalára szerkesztendő-e? Az eddigiek ugyanis erre nézve semmi fölvilágosítást nem adnak, söt ellenkezőleg, a mondottakon semmi csorba sem esik, ha OB'-et akként húzzuk, hogy $POB' \sphericalangle = POB \sphericalangle$; tehát $OM' = OM$ és $PM = PM'$. Ennélfogva két élszög és az egyikkel átellenes lapszög a háromélü testszöget *kétesen* határozzák meg, azaz a mondott részekből *két különböző testszög alakítható.* Ebből ismét azt következtetjük, hogy : *oly háromélü testszögek, amelyeknek két-két megfelelő élszöge és az utóbbiak egyikének átellenes lapszöge egyenlők, nem szükségkép egybevágók, vagy szimmetrikusak.*

VI. A föntebbiek alapján a sarktestszög segítségével könnyen meggyőződhetünk a következő tételek helyességéről: *Két lapszög és az egyikkel átellenes élszög még nem határozzák meg biztosan a háromélü testszöget, mert a mondott részekből általában két különböző testszög alakítható.* Ennek megfelelőleg :

Az olyan háromélü testszögek, melyeknek két megfelelő lapszögük és az egyikkel átellenes élszögük egyenlők, nem szükségkép egybevágók, vagy szimmetrikusak.

Harmadik fejezet.

A szögletes testek tulajdonságai.

14. §. A gúla és a hasáb.

A térnek minden oldalról határolt részét *mértani test*nek nevezzük. Az olyan testet, melyet csupán síkok határolnak, *szögletes test*nek (polyeder), az olyat pedig, melyet görbelapok, vagy síkok és görbelapok határolnak, *gömbölyü test*nek mondjuk.

A szögletes testnél a határoló síkokat *oldallap*oknak, a szomszédos oldallapok metszeteit *él*eknek, az élek találkozási pontjait *csúcsok*nak nevezzük. Azt az oldallapot, amelyre a testet állítjuk *alap*nak, az ezzel párhuzamos síkot *fedőlap*nak, az alap határoló egyeneseit *alapél*eknek, a többit *oldalél*eknek nevezzük. A gömbölyü testeknél, ha egy síklap is van a határlapok közt, azt választjuk alapul. A görbelap a gömbölyü test *palást*ja.

Minden egyenes vonalnak, mely a test két nem szomszédos csúcsát összekapcsolja *átló* (diagonalis) a neve.

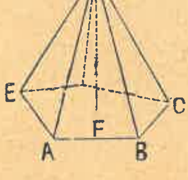
Az alap- és oldallapok összeségét a test *fölsziné*nek hivjuk. Az a szám, amely megmutatja, hogy a testmérték egysége hányszor foglaltatik a testben, az illető test *térfogatá*nak v. *köbtartalmá*nak *a mértékszáma.*

Ha a test határidomait összefüggően papirlapra rajzoljuk, annak *hálózatát* nyerjük.

Három síkkal a térnek semmiféle részét sem lehet teljesen elzárni, ehhez legalább négy sík szükséges, ezért a legegyszerübb szögletes testnek *négy* határlapja van. A kivágott és kellően összehajtogatott hálózatot a test *mintá*jának hivjuk. Az olyan testet, melynek külön neve nincs, határlapjainak száma szerint nevezzük meg. Igy azt, amelynek négy oldallapja van, *négylapú*nak hívjuk, stb.

A szögletes testek nevezetesebbjei: a gúla, a hasáb és a szabályos testek.

30. ábra.



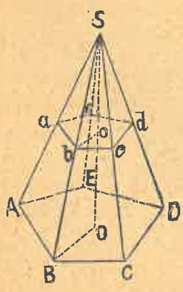
I. A gúla. Ha valamely három vagy több oldalú testszög éleit síklappal szeljük át, a testszög oldallapjai és a metsző sík által befoglalt tért *gúlá*nak (piramis) nevezzük. (30. ábra.) Az átmetszett testszög oldallapjainak száma szerint a gúlát három-, négy-n-oldalúnak mondjuk. A metsző sík alkotta határlapot *(ABCDE)* a gúla *alapjá*nak, az átmetszett testszög lapjait a gúla *oldallap*jainak, a testszög csúcsát *(S)* a gúla *csúcsá*nak, a csúcsból az alapra vont merőleges egyenest (*SF*) a gúla *magasságá*nak hivjuk. Ezenkivül az alapidom oldalait *alapéleknek*, az oldallapokéit *oldalélek*nek szokás mondani. — Azt a gúlát, melynek oldalélei egyenlők, *egyenes*nek, azon egyenes gúlát pedig, melynek alapja szabályos idom, *szabályos egyenlő oldalú*nak nevezzük.

Ezek szerint az n-oldalú gúlának $(n+1)$ határlapja (t. i. n háromszög és egy n-oldalú sokszög) $2n$ éle és $(n+1)$ csúcsa van. A mondottakból könnyü arra következtetni, hogy hány alkotórész szükséges és elégséges a gúla teljes meghatározásához. Ugyanis, ha a gúla csúcsán levő testszöget adottnak feltételezzük, akkor még az alapsík fekvését kell meghatároznunk, ehhez pedig három oldalél hossza, azaz három pont helyzetének ismerete szükséges. Azonban lehet megfordítva az alapot ismertnek feltételezni és a csúcs viszonylagos fekvését megállapitani, például akkép, hogy a gúla csúcsát valamely háromszög szögpontjáúl tekintjük, amelynek alapvonala a gúla egyik alapéle, síkja pedig az alaphoz meghatározott szög alatt hajlik stb.

Ez észrevételek egyszersmind útmutatásul szolgálnak arra, hogy a gúlák *egybevágóságá*nak, vagy *szimmetriájá*nak a föltételeit kinyomozzuk. Mert bizonyos, hogy amely gúláknak *meghatározó* alkotórészeik egymással egyenlők, azok szükségkép egybevágók vagy szimmetrikusak, aszerint, amint az adott alkotórészek ugyanazon, vagy megfordított sorban következnek egymásután.

Ha valamely gúlát az alappal párhuzamosan fektetett síklappal ketté vágunk, a két párhuzamos sík közé foglalt testrészt *csonka-gúlá*nak nevezzük. Az alappal párhuzamos oldallapot *fedőlap*nak, a két párhuzamos sík kölcsönös távolságát a csonka gúla *magasságá*-nak, azt a gúlát pedig, amely a csonka-gúlát teljessé egészíti ki, *kiegészítő-gúlá*nak mondjuk. (31. ábra.)

31. ábra.



A gúla fontosabb tulajdonságai a következők:

1. Minden gúlánál az alapsíkkal párhuzamos metszet az alaphoz hasonló és e hasonló idomok területei úgy aránylanak egymáshoz, mint a gúla csúcsától mért távolságaik négyzetei.

Legyen *abcde* sík $\parallel$ $ABCDE$-vel. A 7. §. 5-dik pontjánál fogva $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$ stb., tehát $Sab\triangle \backsim SAB\triangle$. Hasonlóképen $Sbc\triangle \backsim SBC\triangle$ stb. következőleg:

$$\left.\begin{array}{l} ab : AB = bS : BS \\ bc : BC = bS : BS \end{array}\right\} \text{ és ebből}$$

$$ab : AB = bc : BC$$

Épen így: $bc : cd = BC : CD$ stb.

Továbbá: $abc \sphericalangle = ABC \sphericalangle$ (7. §. 1.),

$bcd \sphericalangle = BCD \sphericalangle$ stb.

Vagyis $abcde$ sokszög $\backsim$ $ABCDE$-hez.

Húzzuk meg a gúla csúcsából az alapra SO merőlegest, azaz legyen $SO \perp ABCDE$; ekkor egyszersmind: $So \perp abcde$.

A síkmértanból tudjuk, hogy:

$$abcde : ABCDE = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2. \qquad (1)$$

Továbbá: $Sb : SB = ab : AB$

$Sb : SB = So : SO$ ($Sbo \triangle \backsim SBO \triangle$)

Következőleg: $ab : AB = So : SO$

és: $\overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{So}^2 : \overline{SO}^2. \qquad (2)$

Az (1) és (2) egyenletből következik, hogy:

$$abcde : ABCDE = \overline{So}^2 : \overline{SO}^2.$$

2. *Az n-oldalú gúla (n—2) háromoldalú gúlára bontható.*

Mert az n-oldalú gúla alapját átlókkal $n-2$ háromszögre bonthatjuk és, ha ezen átlókon és a gúla csúcsán keresztül síkokat fektetünk, $n-2$ háromoldalú gúla (azaz négylap) támad, ezek együttvéve az n-oldalú gúlát alkotják.

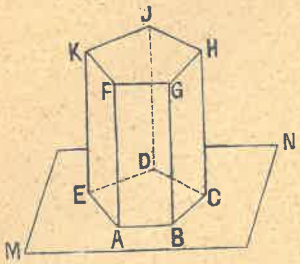
3. *Minden egyenes gúlának alapja körül kör alakítható, amelynek középpontja a magasság talppontjával egybeesik.*

Minthogy az egyenes gúla oldalélei egyenlők, ez utóbbiak talppontjai a magasság talppontjától egyenlő távolságra esnek; következőleg az utóbbi pontból az alap körül körvonalat szerkeszthetünk.

E tulajdonságon alapszik az egyenes gúla szerkesztésének módja.

II. A hasáb. Minél távolabb esik a kiegészítő gúla csúcsa a csonka gúla két párhuzamos alapsíkjától, annál inkább közelednek oldalélei a párhuzamos irányhoz. Ha a csúcsot végtelen távolban képzeljük, az oldalélek párhuzamosokká és az oldallapok parallelogrammákká válnak; azaz, a csonka gúla *hasáb*bá lesz. A hasábot (prizma) két párhuzamos és egybevágó sokszög és annyi parallelogramma határolja, ahány oldala van mindegyik sokszögnek. Ilyen test közvetlenül is alakítható következőképen:

32. ábra.



Feküdjék $ABCDE$ (32. ábra) adott sokszög MN síkban, továbbá legyen valamely HK sík párhuzamos MN-nel. Vonjunk A pontból tetszőleges egyenest, mely HK-t bizonyos F-pontban átmetszi; ezután húzzunk a többi szögpontból u. m B, C, D, E pontokból AF-fel párhuzamos egyeneseket HK síkig; ha most a metsző pontokat egyenesekkel összekapcsoljuk, vagyis $FGHJK$ sokszöget alakítjuk, a két sokszög közé foglalt $ABCDEFGHJK$ test hasáb. Mert, $ABGF$, $BCHG$ stb. idomok parallelogrammák és egyszersmind $ABCDE \cong FGHJK$. (Miért?)

A két párhuzamos sokszög egyikét a hasáb *alapjának*, a másikat *fedőlapjá*nak, a többi határlapot *oldallapok*nak, a két párhuzamos sík távolságát a hasáb *magasságá*nak nevezzük. Az oldallapok száma szerint a hasábot 3, 4, n-oldalúnak mondjuk. Az oldallapok metsző egyeneseit *oldalélek*nek nevezzük.

Az olyan hasábot, amelynek oldalélei az alapra merőlegesen állanak, *egyenes*nek, az olyat, melynek oldalélei nem állanak merőlegesen az alapra, *ferdé*nek nevezzük. Ha az egyenes hasáb alapja szabályos sokszög, úgy a hasábot *szabályos-egyenlőoldalú*nak hívjuk.

A mondottaknál fogva az n-oldalú hasábnak $(n+2)$ határlapja, $3n$ éle (ezek közül n oldalél) és $2n$ csúcsa van.

A hasábot akkor tekinthetjük meghatározottnak, ha alapját és egyik oldaléle irányát és hosszát ismerjük. Az *alap* meghatározási módja már a síkmértanból ismeretes. Az oldalél *irányát* egy háromélü testszög határozza meg, az t. i., melyet az oldalél a vele egy pontban találkozó két alapéllel alkot.

Könnyü ebből *két hasáb egybevágóságának, vagy szimmetriájának* föltételeit levezetni, mert amely hasábokban a *meghatározó* alkotórészek kölcsönösen egyenlők, azok vagy egybevágók, vagy szimmetrikusok aszerint, amint a megfelelő alkotórészek ugyanazon, vagy ellenkező sorban következnek egymásra.

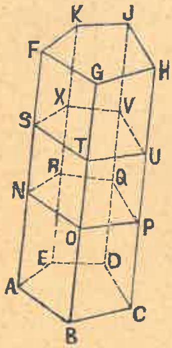
Külön említést érdemelnek azon négyoldalú hasábok, melyeknek alapjaik parallelogrammák. Az ily hasáboknak valamennyi határlapja parallelogramma, ezért azokat *parallellepipedon*oknak nevezzük. (34. ábra.)

A parallelepipedon lehet *merőleges*, vagy *ferde*. A merőlegesek közül különösen kiemeljük a *derékszögű*eket; ezeknek valamennyi határlapjaik derékszögü parallelogrammák. Az ilyenek közt legfontosabb a *kocka* (cubus), amelyet csupa négyzet határol.

A hasáb tulajdonságai a következők:

1. *A hasáb párhuzamos átmetszetei egybevágók.*

33. ábra.



Legyen $ABCH$ az adott hasáb (33. ábra) és $NOPQR$ sík $\parallel$ $STUVX$ síkkal. Akkor NO oldal $\parallel$ ST-vel, $NS \parallel OT$-vel; tehát $NO = ST$. Hasonló oknál fogva: $OP = TU$, stb.

Minthogy ezen egyenlő oldalak egyszersmind párhuzamosak is, tehát:

$$NOP\sphericalangle = STU\sphericalangle,$$
$$OPQ\sphericalangle = TUV\sphericalangle \text{ stb.}$$

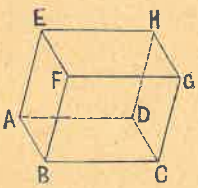
Következőleg $NOPQR \cong STUVX$.

Eszerint, az alapsíkkal párhuzamos hasábmetszet az alapidommal is egybevágó.

2. *Az n-oldalú hasábot (n—2) háromoldalú hasábra bonthatjuk.*

3. *A parallelepipedon átellenes oldallapjai párhuzamosak és egybevágók.* (34. ábra.)

34. ábra.



Mert a fentebbi értelmezésnél fogva:

$AD \parallel BC$ és $AE \parallel BF$, tehát:

$DAE\sphericalangle = CBF\sphericalangle$ és:

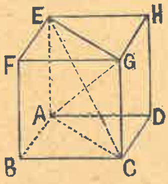
DAE sík $\parallel$ CBF síkkal.

Ezenkívül $AD = BC$, és $AE = BF$, tehát $ADHE \cong BCGF$.

4. *A parallelepipedon átellenes testszögei szimmetrikusak.*

Mert élszögeik kölcsönösen egyenlők, azonban ellenkező helyzetüek.

35. ábra.



5. *A parallelepipedon átlói egymást kölcsönösen felezik.*

Igy az $ABCG$ (35. ábra) parallelepipedon AG és CE átlói egymást felezik; ugyanez áll CE és DF-ről, nemkülönben DF és BH átlókról. (Miért?)

15. §. A szögletes testek általános tulajdonságai.

Valamint a sokszögek háromszögekre bonthatók, úgy minden szögletes test (polyeder) gúlákra osztható. E végett a test belsejében tetszés szerint kijelölünk valamely pontot, s ezt síklapok által a test összes csúcsaival összekapcsoljuk; ekkép a test annyi gúlára bomlik, a hány határlapja van.

A polyederek alakjai közül csak az *Euler*-féléket vesszük tekintetbe. Ezeknek jellemző tulajdonságuk az, hogy valamelyik határlapjukat gondolatban eltávolítván, a többi még mindig folytonosan összefüggő idomcsoportot alkot.

Mellőzni fogjuk tehát az oly szögletes testeket, melyeknek egyes határlapjaik nem teljes (pl. gyürü formájú) sokszögek; szintúgy azon testeket is, melyek belsejében külön felülettel elzárt üreg van. Ily kivételek a síkmértanban is előfordultak, habár ott külön meg nem említettük. Igy a sokszögekre vonatkozó tantételek nagyobbára nem érvényesek oly sokszögekre nézve, melyeknek belsejében külön kerülettel befogott űr van.

1) *Bármely szögletes testben a határlapok oldalainak száma kétszer akkora, mint a test éleinek száma,* ami természetes következménye annak, hogy a test minden éle két határlapban fordul elő.

2) *Bármely szögletes test éleinek száma az élszögek felével egyenlő;* mert minden határlapnak annyi oldala van, mint szöge, de az élek száma csak fél akkora, mint az összes oldalaké s így az élek száma is csak az élszögek számának felével lehet egyenlő.

3) *Bármely szögletes testben az élek és lapszögek száma egyenlő.*

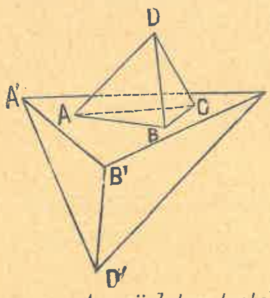
4) *Minden szögletes test éleinek száma kettővel kisebb mint határlapjainak és csúcsainak összes száma. (Euler*-tétele.)

Ugyanis a polyedert gúlákra s az utóbbiakat, amennyiben többoldalúak volnának, háromoldalú gúlákra bonthatjuk. Minden négylapú testen a lapok száma $l=4$, a csúcsok száma $cs=4$, és az élek száma csak fél akkora, mint az összes oldalaké, s így az élek száma $é=6$, tehát: $l+cs=é+2$.

Most, ha az első négylapú testhez gondolatban hozzáillesztjük a szomszédos másodikat, melynek alapsíkja az elsőnek valamelyik oldallapjával egybeesik, e két egybevágó határlap, mint olyan, elenyészik és a kettős gúlának nyolc határlapja hatlapú testet alkot. A lapok száma tehát kettővel szaporodott; a csúcsok száma eggyel, az élek száma pedig hárommal növekedett. Minthogy $1+2=3$, tehát a föntebbi egyenletnek mindkét oldala ugyanannyival gyarapodott, következéskép a föntebbi egyenlet az új testre nézve is áll. Ez utóbbihoz megint egy új négylapút kapcsolunk akkép, hogy ennek egyik határlapja valamelyik oldallappal összeessék; a lapok száma megint 2-vel, a csúcsoké 1-gyel, az élek száma 3-mal szaporodik, tehát az ujonnan származott testre nézve: $l + cs = é + 2$. És a többi.

Minden szögletes testnél, amely a föntebbi mód szerint négylapúakból alakult: $l + cs = é + 2$. Söt ez egyenlet még akkor is igaz, ha két szomszédos határlap egyazon síkba esik, azaz nyujtott lapszöget formál; mert e miatt a testszögek száma nem változik, a lapok száma ugyan eggyel kevesbedik, azonban az élek száma is ugyanannyival csökken; mert az egyazon síkba eső két szomszédos határlap közös éle, mint ilyen, megszünik és átlóvá alakúl. Eszerint a föntebbi egyenletnek mindkét oldala 1-gyel csökkent, az egyenlet tehát most is helyes. A szóban forgó tétel tehát oly polyederekre is áll, melyeket négyszögü, vagy vegyesen három és négyszögü idomok határolnak. — Hasonlóképen kimutatható, hogy a föntebbi tétel minden Euler-féle testre nézve érvényes.

36. ábra.



De ha az összekapcsolt gúlák alapsíkjai nem illenek össze, mint például a 36-ik ábrában, hol $ABC \triangle$ nem vág össze $A'B'C'$-tel, az Euler-féle tétel sem áll. Ugyanis látnivaló, hogy ábránkban $l = 7$, $cs = 8$, és $é = 12$, tehát $l + cs$ már nem $= é + 2$. Szóval a föntebbi tétel csak az Euler-féle testekre nézve igaz.

A szögletes testek felszinén található élszögek száma (a) kétszer annyi, mint az élek száma (é).

Mert az élszögek száma minden határlapon éppen annyi, mint az oldalak száma; azonban az oldalak összes száma kétszer akkora, mint az éleké, mert mindegyik él két oldalt képvisel; ennélfogva az élszögek száma *(a)* is kétszer annyi, mint az éleké *(é)*, vagyis:

$$a = 2é.$$

16. §. A szabályos testek.

*Szabályos*nak oly polyedert nevezünk, melynek határlapjai szabályos, egybevágó sokszögek, és testszögei egybevágók.

Szabályos test csak háromféle idomból alakítható, t. i. szabályos három-, négy- és ötszögekből. Mert egy-egy testszög megalakítására legalább három oldallap szükséges, márpedig, ha az oldallapok szabályos hatszögek lennének, a három élszög összesen $3.120^0 = 4R$ lenne, ez azonban lehetetlen. A szabályos hét-, nyolc- és többoldalú sokszögekben a szögek még nagyobbak; ezekről tehát még inkább áll az, amit a szabályos hatszögekről kimutattunk.

Szabályos test ötnél több nem lehet. Mert: a) szabályos, azaz egyenlőoldalú háromszögekből csak három-, négy- és ötélű testszög alakítható (hatélű már nem, mert $6.\,{}^2/_3\,R = 4R$); b) szabályos négy- és ötszögekből csak egy-egy háromélű testszöget alakíthatunk. Ennélfogva csak *öt* szabályos test lehetséges. A megelőző cikk alapján ezen öt szabályos test határlapjai, csúcsai és élei számát is meghatározhatjuk.

Hogy csak öt szabályos test lehetséges, azt még *Euler*-tételével is igazolhatjuk. Jelöljük e célból n-nel a határlapokúl szolgáló szabályos sokszögek oldalainak számát, l-lel a határlapok számát, cs-vel a csúcsok, $é$-vel az élek és m-mel az egy csúcsban összejövő élek számát, akkor:

$$nl = 2é\,;\ m.cs = 2é \text{ s így: } l = \frac{2é}{n}\,;\ cs = \frac{2é}{m};$$

tehát *Euler* tétele szerint:

$$é + 2 = \frac{2é}{n} + \frac{2é}{m}\,; \text{ vagy: } é = \frac{2mn}{2(m+n) - mn}.$$

Az élek száma csakis kettőnél nagyobb pozitiv szám lehet s azért szükséges, hogy: $2(m+n) > mn$ legyen. E feltételnek a következő értékek felelnek meg:

$n = 3,\ m = 3$	s akkor:	$é = 6$,	$l = 4$,	$cs = 4$
$n = 3,\ m = 4$		$é = 12$,	$l = 8$,	$cs = 6$
$n = 3,\ m = 5$		$é = 30$,	$l = 20$,	$cs = 12$
$n = 4,\ m = 3$		$é = 12$,	$l = 6$,	$cs = 8$
$n = 5,\ m = 3$		$é = 30$,	$l = 12$,	$cs = 20$.

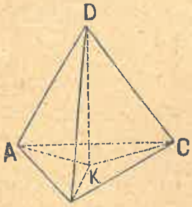
Az imént lelt számok feltűnő viszonosságot (reciprocitas) mutatnak. Ugyanis a *nyolclapú* test *csúcsainak* száma épen annyi, mint a *hatlapú* test *lapjainak* száma, viszont az előbbinek lapszáma megegyezik az utóbbi test csúcsainak a számával; az élek száma tehát az egyikben épen akkora, mint a másikban. Hasonló áll a húszlapú- és a tizenkétlapúról; csak a négylapú testnek nincs megfelelő párja, mert lapjainak száma egyenlő a csúcsokéval.

17. §. A szabályos testek szerkesztése.

Föntebb kimutattuk ugyan, hogy ötnél több szabályos test nem gondolható, azonban hogy ez az öt test *valóban* megszerkeszthető-e, azt még nem bizonyítottuk be. Térjünk most át erre.

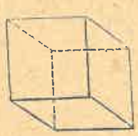
A szabályos négylap (tetraedron). Legyen ABC egyenlőoldalú háromszög (37. ábra) a négylap egyik határlapja és ebben K pont a körülírt kör középpontja, tehát $KA = KB = KC$. Emeljük K ponton a háromszög síkjára KD merőlegest és szerkesszük AKD $\triangle$-et úgy, hogy $AD = AB$ legyen; ezután húzzuk BD és CD egyenes vonalakat.

37. ábra.



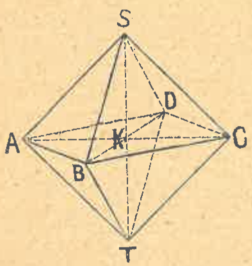
Minthogy DKA, DKB és DKC háromszögek egybevágók (miért?), tehát $AD = BD = CD$; azonban $AD = AB = BC = CA$, következésképp az élek mind egyenlők. Ezenkívül a gúla testszögei is egyenlők, mert három-három egyenlő élszögből alkotvák; következőleg a föntebbi gúla nem egyéb, mint szabályos négylapú test, vagy tetraedron.

38. ábra.



A szabályos hatlapú test (hexaedron) nem egyéb, mint a parallelepipedonoknál említett kocka (38. ábra). Szerkesztését illetőleg irányadó, amit a hasábokról mondtunk.

39. ábra.



A szabályos nyolclap (oktaedron). Legyen AB a nyolclap egyik éle (39. ábra). Alakítsunk AB vonalon szabályos négyszöget, ez az ábrában $ABCD$ parallelogramma alakjában mutatkozik; húzzuk meg AC és BD átlókat, továbbá ezek metszőpontjában K-ban a négyzet síkjára merőleges ST egyenest; határoljuk ezt S és T pontban akként, hogy $KS = KT = KA$; végül kapcsoljuk össze a merőleges egyenes végpontjait síkok által $ABCD$ négyzet oldalaival. $SABCDT$ test a keresett nyolclap. Mert:

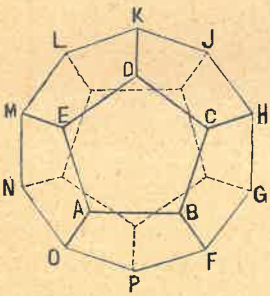
$$AK = BK = CK = DK = SK = TK, \text{ és}$$

AKB, BKC, ... SKA, SKB, ... TKA, TKB stb. szögek mind derékszögek, tehát AKB, BKC, SKA, SKB, TKA stb. háromszögek egybevágók, következőleg $AB = SA = SB = \ldots = TA = TB = \ldots$ szóval az élek mind egyenlők, tehát $SABCDT$ test nyolc egyenlőoldalú háromszögből van alkotva. Söt mi több, a nevezett test testszögei is mind egybevágók; így pl. S testszög $\cong B$ testszöggel. Mert nyilvánvaló, hogy $SAC \triangle \cong BAC \triangle$, és $TAC \triangle \cong BAC \triangle$, ennélfogva $ASC \sphericalangle = ATC \sphericalangle = 90^0$, tehát $SATC$ idom is szabályos négyszög, mégpedig $\cong ABCD$ négyzettel. Most, ha $BASCT$ gúlát $SABCD$-vel összehasonlítjuk, látni való, hogy az elsőnek alapja ($ASCT$) ráilleszthető a másiknak alapjára ($ABCD$-re); K pont ekkor mind a két alapsíknak közös középpontja lévén, a két magasság, KB és KS, szükségkép egybeesik, ennek következtében a két gúla is tökéletesen egybevágó és S testszög $\cong B$-vel.

Tehát csakugyan $SABCDT$ a keresett szabályos nyolclapú test.

A szabályos tizenkétlap (dodekaedron). Legyen $ABCDE$ szabályos ötszög (40. ábra) a tizenkétlap egyik határsíkja; továbbá $ABF \sphericalangle = ABC \sphericalangle$, és $CBF \sphericalangle$ is $= ABC$ szöggel.

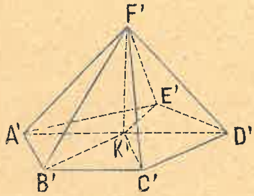
40. ábra.



Ebből a három 108 fokú szögből alkossuk meg B testszöget és nevezzük oldallapjainak hajlási szögét α-nak. Hasonlókép alkossunk C, D, E és A pontokon B-vel tökéletesen megegyező testszögeket; ekkor CBF és BCH szögek szükségkép ugyanazon síkba esnek, mert mind a kettőnek hajlása $ABCD$ síkhoz $= \alpha$-val. Továbbá FBC síklapon alakítsuk meg $BCHGF$ szabályos ötszöget, szintúgy CDK, DEM, EAO és ABF síkokban is szerkesszünk ugyanannyi szabályos ötszöget; ilyen módon oly domború felület támad, amely hat szabályos ötszögből áll, és hol a szomszédos síkok hajlási szöge mindenütt $= \alpha$. Ha még egy ilyen domború felületet alakítunk, amely az előbbivel tökéletesen megegyezik, az egyiknek kinyúló csúcsai épen beleillenek a másiknak benyúló részeibe (miért?); ha tehát a két felületet összekapcsoljuk, tizenkét szabályos ötszögtől határolt test származik, melynek minden testszöge egyenlő, mert mind három-három egyenlő élszögből van összetéve.

A szabályos húszlap (ikozaedron). Minthogy mindegyik testszöge öt egyenlő oldalú és egyenlő hajlású háromszögből áll, ezért mindenekelőtt ilyen *ötélű* testszöget kell szerkesztenünk. E célból legyen $A'B'C'D'E'$ (41. ábra) oly szabályos ötszög, melynek mindegyik oldala akkora, mint a húszlapú test egyik éle; ezen ötszög

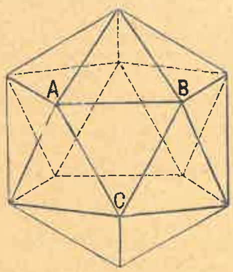
41. ábra.



K' középpontjából emeljük annak síkjára *K'F'* merőleges egyenest, ennek *F'* végpontját akként határozván meg, hogy *F'A'* = *A'B'*. Ugyanezen *F'* pontot síkok által összekapcsolva az ötszög oldalaival, a kivánt ötélü testszöget kapjuk. Mert először is *F'A'B'*, *F'B'C'*, *F'C'D'* stb. háromszögek egybevágók és egyenlőoldalúak; ezenkívül két-két szomszédos oldallap hajlási szöge is egyenlő, mert *A'*, *B'*, *C'* stb. testszögek egybevágók, hisz valamennyien három egyenlő élszögből alakultak.

Legyen továbbá *ABC* △ (42. ábra) a húszlapú test valamelyik határlapja; alkossunk ennek mind a három szögpontjában a fentebbivel tökéletesen megegyező ötélü testszögeket és csoportosítsuk úgy, hogy mindegyik testszögnek egy-egy oldallapja *ABC* △-gel egybeessék. Az ekkép származott domború felület 10 egyenlőoldalú háromszögből áll, ahol a testszögek is mind egyenlők.

42. ábra.



Most, ha *két* ilyen domború felületet egymásra illesztünk úgy, hogy az egyiknek hármas szögei a másiknak kettős szögeire jutnak, tökéletesen zárt soklapú test támad. Ezt 20 szabályos háromszög határolja, és testszögei mind egyenlők.

A szabályos testekkel a régi görög matematikusok, jelesen Plato tanítványai, kiváló szeretettel foglalkoztak. *Euklides* (285. Kr. e.) az ő elemeiben meglehetős tüzetesen tárgyalta; mai nap csak kevés hasznukat vesszük, mert a szabályos testek korántsem oly fontosak a térmértanra nézve, mint a szabályos sokszögek a síkmértanra nézve. Legnevezetesebb tulajdonságukat a következő fejezetben fogjuk tárgyalni.

Plato szerint a négylap (tetraedron) a tűznek, a nyolclap (oktaedron) a levegőnek, a húszlap (ikozaedron) a víznek, a hatlap (hexaedron) a földnek, és a tizenkétlap (dodekaedron) a világegyetemnek jelképe.

Negyedik fejezet.

A gömbölyű testek tulajdonságai.

18. §. A kúp és a henger.

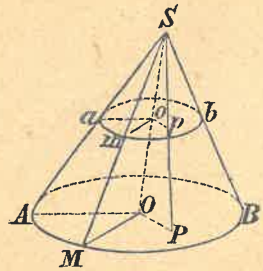
A gömbölyü testek közül a *kúp*ról, a *henger*ről és a *gömb*ről fogunk szólani.

A kúp. Ha a határtalannak fölvett és egyik pontjában megerősitett egyenes — az úgynevezett *alkotó* (generatrix) — valamely adott zárt görbének, — az *irányvonalnak* (directrix) — kerületén köröskörül mozog, *kúpos*nak nevezett görbe lapot ír le, amely egy pontban, *a csúcsban* összefüggő két részből áll. Ha a kúpos térnek a csúcstól számított egyik felét a nyílt oldalon síkkal elzárjuk, oly geometriai testet nyerünk, melyet *kúp*nak (conus) hívunk. A sík határlap a kúp *alapja*, a görbelap a kúp *oldallapja* (palástja), a csúcsnak az alaptól mért távolsága a kúp *magassága.* A kúpot *körkúpnak*, *elliptikus kúpnak* stb. nevezzük, aszerint, amint alapja kör, ellipszis stb. Mi csakis körkúpokkal fogunk foglalkozni. A kúp csúcsát az alapkörének centrumával összekötő egyenest a kúp *tengelyének* nevezzük. Ha a kúpot tengelyén átmenő síkkal átszeljük, *tengelymetszetet* kapunk. Megkülönböztetünk *egyenes*, vagy *ferde* kúpot aszerint, amint a tengely az alapra merőlegesen, vagy ferdén áll. Legfontosabb az *egyenes körkúp*, amelynél az *oldalvonalak*, vagyis a csúcsot az alapkör kerületével összekötő egyenesek mind egyenlö hosszúak és egyenlö szög alatt hajlanak az alaphoz. Az egyenes kúpot valamely derékszögü háromszögnek egyik befogója körül történö forgatásából is származtathatjuk. *Egyenlöoldalú* az olyan kúp, amelyben az alapkör átmérője akkora, mint az oldalvonal. A kúp származtatásából a következő könnyen beigazolható tételek következnek:

1. *A kúpnak az alappal párhuzamos síkmetszete oly kör, melynek centruma a tengelyben fekszik s melynek területe úgy aránylik az alapkör területéhez, mint az eredeti és az elvágott kúp magas-*

ságainak négyzetei. Ha $abm \parallel ABM$-hez (43. ábra) és a tengely o pontban döfi át a metsző síkot, akkor a tengelyen átmenő SMO sík metszetei: $om \parallel OM$ és: $om : OM = So : SO$, továbbá: $ao : AO = So : SO$, miből: $om : OM = ao : AO$. De $OM = OA$, tehát: $om = oa$, miáltal a tétel első részét már bebizonyítottuk. Ha $SP \perp ABM$ egyenest húzzuk, akkor: $op \parallel OP$ és: $ao : AO = So : SO = Sp : SP$. Ámde ismert planimetriai tétel szerint: $abm : ABM = \overline{ao}^2 : \overline{AO}^2$; miből: $abm : ABM = \overline{Sp}^2 : \overline{SP}^2$.

43. ábra.



A kúpnak az alapkör és a párhuzamos síkmetszet közé eső részét *csonkakúpnak* hívjuk; a felső kis kúp ennek *kiegészítő kúpja*. A csonkakúp is lehet *egyenes* és *ferde*.

2. *A kúp tengelymetszetei háromszögek*. Ezek az egyenes kúpnál egyenlőszárúak, egybevágók és merőlegesen állanak az alapra.

A ferde kúp tengelymetszetei közül csak az merőleges az alapra, amely a kúp magasságán vonul át és csupán az egyenlőszárú, amely az előbbi tengelymetszetre merőleges. A merőleges tengelymetszet egyszersmind a legrövidebb és a leghosszabb oldalvonalat tartalmazza.

3. *A kúpot végtelen sok oldalú piramisnak is tekinthetjük*, tekintettel arra, hogy belé szabályos sokszögü alapú gúlát írhatunk, melynek oldalszámát a végtelenségig megkettőztetve gondolhatjuk.

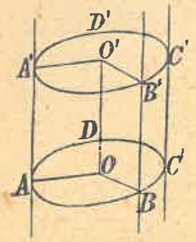
A henger. A határtalannak vett egyenes vonal, az *alkotó* (generatrix), mely adott zárt görbének, az *irányvonalnak* kerületét úgy járja köröskörül, hogy eredeti helyzetéhez mindig párhuzamos marad, *hengeresnek* nevezett görbelapot ír le. Ha a két oldalon nyitott hengeres tért két párhuzamos síkkal metszük, oly geometriai testet nyerünk, amelyet *henger*nek (cylinder) hívunk. A két síklapot a henger *alapjai*nak, a görbelapot a henger *oldalá*nak (palást) mondjuk. Ha az alapok középponttal bírnak, akkor a középpontokat összekötő egyenes a henger *tengelye*. A henger *egyenes*, ha alkotói az alapsíkokra merőlegesek, különben *ferde*. Ha az alapidom kör, *körhengert*, ha ellipszis, *elliptikus hengert* stb. nyerünk. Mi csakis körhengerekkel fogunk foglalkozni. *Egyenlő-oldalú* az olyan henger, melynek oldalvonala akkora, mint alapkörének átmérője.

A henger származtatásából a következő könnyen beigazolható tételek következnek:

a) *A henger összes alkotói egyenlő hosszúak és az alapsíkhoz ugyanazon szög alatt hajlanak.*

b) *A hengernek minden az alaphoz párhuzamos síkmetszete az alapkörrel kongruens kör, melynek centruma a henger tengelyében fekszik.* Legyen ABC kör (44. ábra) a henger alapja és messe $A'B'C'$ sík O'-ban a henger OO' tengelyét. Ha B' egy pontja a metszési idomnak és OO' egyenesen és B' ponton síkot vezetünk át, akkor: $BB' \parallel OO'$ és $O'B' \parallel OB$; tehát $O'B' = OB$, miáltal a tételt igazoltuk.

44. ábra.



c) *A hengernek valamely oldalvonalhoz párhuzamos átmetszetei parallelogrammák;* ha a metsző sík a tengelyen megy át, úgynevezett *tengelymetszet* keletkezik. Az egyenes henger tengelymetszetei az alapra merőleges, egybevágó derékszögű parallelogrammák, ilyformán az egyenes hengert valamely derékszögű parallelogrammának egyik oldala körül való forgásából is származtathatjuk. A ferde henger tengelymetszetei nem egyenlők s csakis az merőleges az alapra, amely a tengelynek az alapon való vetületén is keresztül halad.

d) Mivel a henger alapkörébe és a köré szabályos húr-, illetőleg érintő sokszögeket írhatunk, melyek alapjai lehetnek a beírt,- illetőleg körülirt prízmáknak, azért a hengert végtelen sok oldalú hasábnak is tekinthetjük.

19. §. A gömb.

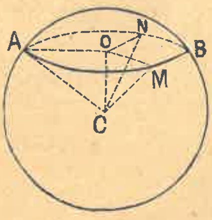
Ha a félkör átmérője körül addig forog, míg eredeti helyzetébe ismét visszaérkezik, akkor oly felületet ír le, melynek minden pontja egyenlő távolban van a félkör centrumától s amely tökéletesen körülzárja a félkör síkja által alkotott testet. Az ily felületet *gömbfelületnek* (szféra), az ez által határolt testet *gömbnek,* a gömbfelület minden pontjától egyenlő távolságban fekvő pontot a gömb *középpontjának* (centrum), az egyenlő távolságokat a gömb *sugarainak* (radius) hívjuk. A gömb két pontját összekötő egyenest a gömb *húrjának,* a középponton áthaladó húrokat a gömb *átmérőinek* (diameter) nevezzük. A gömb átmérői mind egyenlők és akkorák, mint a sugár kétszeresei. Az egyenlő sugarú gömbök kongruensek.

A gömb nevezetesebb tulajdonságai a következők:

1. *A gömb és a sík metszete mindig kör.*

Ha valamely gömböt síkkal átmetszünk, metszetül szükségkép zárt idomot nyerünk. Vonjuk a gömb C középpontjából (45. ábra.) $AMBN$ átmetsző síkra CO merőleges egyenest; kapcsoljuk össze az utóbbi O talppontját AMB vonal néhány tetszés szerinti pontjával, pl. A, M, N pontokkal, azaz vonjuk OA, OM és ON egyeneseket; ezután húzzuk AC, MC és NC sugarakat. Az ekkép támadt AOC, MOC és NOC háromszögek egybevágók, tehát $OA = OM = ON$, azaz $AMBN$ vonal *kör*, melynek O a középpontja.

45. ábra.



Az ily kört *gömbi kör*nek nevezzük.

2. *Az az egyenes vonal, amely a gömbi kör középpontját a gömb középpontjával összeköti, a gömbi kör síkjára merőlegesen áll:* viszont:

A gömbi kör középpontján annak síkjára emelt merőleges egyenes a gömb középpontján megy keresztül.

3. *Ugyanazon gömblapon a gömbi körök annál nagyobbak, minél közelebb esnek a gömb középpontjához és viszont.*

Mert, ha a gömb sugarát r-rel jelöljük, az előbbi ábra alapján: $OA = \sqrt{r^2 - \overline{CO}^2}$; eszerint OA, vagyis a gömbi kör sugara annál nagyobb, minél kisebb CO, azaz minél közelebb esik a kör középpontja a gömbéhez.

Ennélfogva az oly gömbi kör, melynek síkja a *gömb középpontján* megy át, szükségkép nagyobb a többieknél. Az olyan gömbi köröket, melyeknek középpontja a gömbével egybeesik, *fő*, vagy *nagy* köröknek nevezzük. *A nagy gömbi körök fél átmérője a gömb sugarával egyenlő.*

4. *Két fő kör bármely gömblapon felezi egymást.*

Mert mind a két kör síkja a gömb középpontján megy keresztül; a metsző egyenes tehát a két kör közös átmérője, következőleg mind a kettőt felezi.

5. *Minden fő kör a gömblapot és a gömböt két egyenlő félre osztja.*

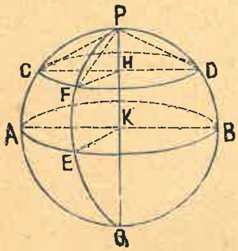
6. *A gömblap két meghatározott pontján keresztül csak egyetlen egy fő kör húzható.*

Mert a *fő* kör síkjának egyúttal a gömb középpontját is magában kell foglalnia; három ponton keresztül pedig csak egy síkot lehet vezetni. (Van-e kivétel?)

7. A gömbi kör középpontján ugyanannak síkjára emelt merőleges egyenes a gömblapot két átellenes pontban találja; ezeket a gömbi kör *sarkpont*jainak (polus), vagy gömbi középpontjainak nevezzük.

A gömbi kör két sarkpontja a kerület minden pontjától egyenlő távolságra esik.

46. ábra.

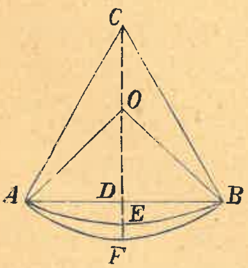


Legyen CFD (46. ábra) a gömb valamelyik köre, H e kör középpontja és PHQ a kör síkjára emelt merőleges egyenes; ekkor P és Q ugyane kör két sarkpontja. Minthogy PHQ merőlegesen áll mindazon egyenesekre, melyek H ponton keresztül a kör síkjában húzhatók (azaz $PQ \perp HC$, HD, HF), ezért, ha PC, PD, PF húrokat vonjuk, $PHC \triangle \cong PHD \triangle \cong PHF \triangle$, tehát $PC = PD = PF$, és mert egyenlő körökben egyenlő húrokhoz egyenlő ívek tartoznak, PC, PD, PF stb. ívek is egyenlők. Ezeket az íveket *gömbi sugarak*-nak nevezzük. — E fő körök síkjai egyszersmind merőlegesek CFD gömbi kör síkjára, mert mindannyian PQ egyenes vonalon mennek keresztül, ez pedig CFD síkra merőlegesen áll. Önként érthető, hogy a mondottak AEB fő körnek sarkpontjára is alkalmazhatók; ez esetben PA, PB, PE körívek negyedkörök. (Miért?)

8. *Párhuzamos gömbi köröknek a sarkpontjuk ugyanaz.*

9. *A gömblap két meghatározott pontján keresztül húzott fő ív rövidebb, mint az ugyanezen pontokat összekötő bármely más körív.*

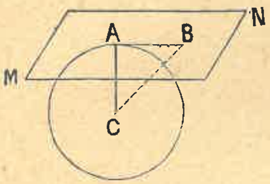
47. ábra.



Mert, ha a másik körívet a közös AB húr (47. ábra) körül addig forgatjuk, míg a fő ív síkjába kerül, és fontolóra vesszük, hogy e kör sugara szükségképen kisebb, mint a fő köré, tehát az előbbinek O középpontja AB húrhoz közelebb esik, mint a fő körnek C középpontja, továbbá ha AB húr és CO középponti vonal metsző pontját D-vel jelöljük, ACO háromszögben $AC < AO + CO$, vagy $AC < AO + CD - OD$; tehát $AC - CD < AO - OD$, vagyis $DE < DF$, azaz a nagyobb sugarú ív egész terjedelmében a kisebb sugarú íven belül esik, az utóbbi tehát hosszabb az előbbinél, föltéve természetesen, hogy mindenik ív az illető kör fél kerületénél kisebb. A gömblap két A és B pontján átvonuló legnagyobb gömbi kör AB rövidebb ívét a két pont *gömbi*, vagy *szferikus távolságának* nevezzük.

10. *A gömbsugár végpontján keresztül ugyane sugárra merőlegesen fektetett síklapnak a gömbbel csak egy közös pontja van, szóval, a sík a gömböt érinti.*

48. ábra.



Legyen MAN sík $\perp$ CA gömbsugárra (48. ábra). Ha ezen sík bármely pontját, pl. B-t, a gömb középpontjával és A végponttal két egyenessel összekapcsoljuk, BAC derékszögü háromszög keletkezik; ebben CB átfogó hosszabb CA befogónál, vagyis a gömb sugaránál. Ennélfogva B pont a gömbön kívül esik. Ugyanez áll a szóban levő sík többi pontjairól is. Nyilvánvaló tehát, hogy a síknak és a gömbnek csak egy közös pontja van, t. i.: A, melyet *érintési* pontnak nevezünk.

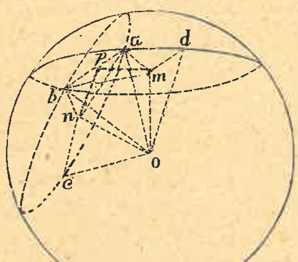
Az ilyen síkot a gömblap *érintő sík*jának hívjuk.

11. Viszont *az oly sík, mely a gömböt csak egy pontban éri, az érintő ponthoz húzott gömbsugárra merőlegesen áll.*

Mert a gömb középpontjából az érintő síkhoz húzható egyenesek között az érintő ponthoz húzott gömbsugár a legrövidebb, ennélfogva a mondott síkra merőlegesen áll.

12. *A gömblapot négy pontja határozza meg,* azaz *négy ponton keresztül csak egy gömblapot lehet fektetni.*

49. ábra.



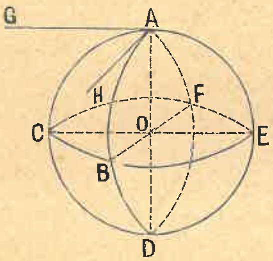
Legyen *(a)*, *(b)*, *(c)*, *(d)* (49. ábra) a négy adott pont, melyekről feltesszük, hogy nem tartoznak egyazon síkba. Vonjunk először *(a)*, *(b)* és *(c)*, azután *(a)*, *(b)* és *(d)* pontokon keresztül egy-egy kört. Tekintsük e két kört a keresett gömblap köreinek és vezessük *(m)* és *(n)* középpontjaikon, továbbá a közös *(ab)* húr felező pontján *(p)*-n keresztül *mpn* síkot; ez derékszög alatt áll mind a két gömbi kör síkjára, mert $ab \perp mp$ és np egyenesekre. Ha tehát *(m)* és *(n)* pontból a két kör sikjára merőlegeseket húzunk, ezek szükségkép az említett síkba esnek, következőleg egymást átmetszik. A metsző pont *(o)* a keresett gömb középpontja. Mert ha *od*, *dm*, *oa am*, *ob*, *bm*, *bn*, *oc* és *cn* egyeneseket meghúzzuk: $omd \triangle \cong oma \triangle \cong omb \triangle$, és $onb \triangle \cong onc \triangle$, tehát $od = oa = ob = oc$, vagyis az *o* pontból *oa* sugárral alakított gömb mind a négy adott ponton áthalad.

Hogy eme négy ponton keresztül *csak ezen egy gömblap* alakítható, azt onnan következtetjük, mert a középpontnak mind a két merőlegesbe, tehát ezek közös metsző pontjába kell esnie. Ilyen pedig csak egy van.

20. §. A gömbi szögek és háromszögekről.

*Gömbi szög*nek a két fő kör képezte szöget nevezzük; ilyen: *CAB* (50. ábra); ebben *AC* és *AB* íveket *szárak*nak, a közös metsző pontot, *A*-t, a gömbi szög *szögpontjá*nak mondjuk. Szorosan véve a *gömbi szög* azon egyenes vonalú szöget jelenti, melyet a szögponton keresztül a fő körökhöz vont érintők alkotnak. Eszerint *CAB* gömbi szög tulajdonkép nem más, mint *GAH* szög, melyet az *A* ponton a két körhöz vont *AG* és *AH* érintők befognak; következőleg a gömbi szög *egyszersmind hajlási szöge a két körsíknak*, mert a két érintő merőlegesen áll az A szögponthoz vont gömbsugárra, vagyis a két körsík metsző vonalára.

50. ábra.



A gömbi szöget azon fő kör közbefogott ívével mérjük, amelynek a gömbi szög szögpontja sarkpontul szolgál.

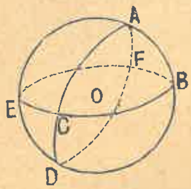
Igy *BAC* gömbi szöget (50. ábra) az *A* szögpontból mint sarkpontból húzott fő kör *BC* ívével mérjük, mert, ha *BO* és *CO* gömbsugarakat meghúzzuk, *AO* mind a kettőre merőleges, következőleg *BOC* szög, vagy az ennek megfelelő *BC* ív, egyszersmind hajlási szöge *ABD* és *ACD* körlapoknak, tehát *BC* ív mértéke *BAC* gömbi szögnek.

A gömbkétszög. Két fő kör a gömblapon *két* pontban találkozik és a gömb felszinét négy részre osztja: e részek mindegyikét *gömbkétszög*nek nevezzük; ilyen pl. a megelőző ábrában *ABDCA*.

Látnivaló, hogy *az átellenes gömbkétszögek egybevágók* és két szomszédos gömbkétszög összesen a gömblap *felét* foglalja el.

A gömbháromszög. Három fő kör a gömblapot nyolc részre osztja: ezen részek mindegyikét *gömbháromszög*nek nevezzük. A gömbháromszög tehát oly része a gömblapnak, melyet három fő kör ívei határolnak, ilyen pl. *ABC.* (51. ábra.)

51. ábra.

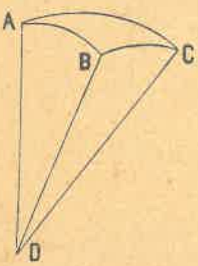


Minden gömbháromszögnek három oldala és három szöge van. Oldalaknak nevezzük a határoló íveket, szögeknek az ívek által berekesztett gömbi szögeket. Valamint az egyenes vonalú, úgy a gömbháromszög is vagy ferdeszögű, vagy derékszögű; oldalait illetőleg: egyenlő-oldalú, egyenlő-szárú, vagy különböző-oldalú.

A három fő-kör átmetszéséből keletkezett 8 gömbháromszögben az oldalak és szögek egyenként kisebbek *2R*-nél. De ha ezen háromszögek közül hármat összefoglalunk, oly gömbháromszög támad, melynek egyik oldala és szöge nagyobb *2R*-nél. Igy a föntebbi ábrában *AEC*, *ACB* és *AFB* gömbháromszögek együttesen olyan új háromszöget alkotnak, melynek oldalai: *AE*, *AF* és *ECBF* ívek. Ezek közül az utóbbi $>$ 180°-nál; hasonlóképen *A* szög, vagyis az *ECBF* oldallal szemközt fekvő szög szintén $>$ *2R*-nél. Mindazáltal könnyen meggyőződhetünk, hogy mihelyt a nyolc kisebb gömbháromszög közül bármelyik ismeretes, az említett *nagyobb* gömbháromszög is meghatározható; ezért az alábbiakban csak oly gömbháromszögeket fogunk tárgyalni, melyeknek oldalaik és szögeik egyenként véve kisebbek 180°-nál és ezeket egyszerűen gömbháromszögeknek nevezzük.

Ha valamely ABC gömbháromszög (52. ábra) három szögpontjához a megfelelő három gömbsugarat megvonjuk és két-két sugáron keresztül egy-egy síkot vezetünk, a gömb középpontján (*O*-ban) háromélű testszög támad melynek alkotórészei a gömbháromszög megfelelő alkotórészeivel azonosak; *az élszögek t. i. azonosak a gömbháromszög megfelelő oldalainak középponti szögeivel, a lapszögek pedig egyenlők a megfelelő gömbi szögekkel.*

52. ábra.



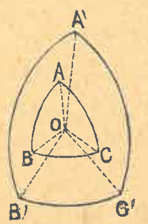
Ennélfogva a háromélű testszögekre nézve bebizonyított tételek a gömbháromszögekre nézve is érvényesek; nevezetesen:

1. *A gömbháromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalánál.*

2. *A gömbháromszög három oldalának összege kisebb négy derékszögnél.*

3. *Ha a gömbháromszög három szögpontjából, mint sarkpontokból, a megfelelő fő köröket megvonjuk, ezek olyan új gömbháromszöget alkotnak, melynek szögpontjai viszont az eredeti háromszög átellenes oldalainak a sarkpontjai.*

53. ábra.



Legyen ABC (53. ábra) az adott gömbháromszög; ennek szögpontjaiból, mint sarkpontokból, három fő kört vonunk a gömb felszinén; ezáltal $A'B'C'$ új gömbháromszög keletkezik, melyről azt állítjuk, hogy szögpontjai *(A', B' és C')* az eredeti háromszög átellenes oldalainak *(BC, AC és AB-nek)* sarkpontjai. Mert, ha a két háromszög szögpontjaihoz az illető gömbsugarakat meghúzzuk, két háromélü testszög támad, ezekben AO él merőleges $B'C'$ oldal síkjára, továbbá BO él $\perp$ $A'C'$ oldal síkjára, végül CO él $\perp$ $A'B'$ oldal síkjára, következőleg $O(ABC)$ testszög a másiknak, azaz $O(A'B'C')$-nek sarktestszöge, tehát viszont $A'O$ él $\perp$ BC oldal síkjára, $B'O$ él $\perp$ AC oldalsíkra és $C'O$ él $\perp$ AB síkra, következéskép A' pont sarkpontja BC ívnek, B' sarkpontja AC ívnek stb.

E tulajdonságok miatt az ABC és $A'B'C'$ gömbháromszögeket *megfelelő sark*-háromszögeknek nevezzük.

A megelőző tétel a háromélü testszögek nélkül is könnyen kimutatható, ha tekintetbe vesszük, hogy a sarkpont az illető fő körtől 90 foknyira van.

4. *Két megfelelő sarkháromszögnek az a nevezetes tulajdonsága van, hogy az egyiknek szögei a másiknak átellenes oldalait két derékszöggé egészítik ki.* Ezért a megfelelő sarkháromszögeket *kiegészítő* háromszögeknek is nevezhetjük.

A bebizonyítás vagy a sarktestszögek tulajdonságaira, vagy azon tételre alapítható, hogy a gömbi szöget azon fő körnek ívével mérjük, melynek a gömbi szög szögpontja sarkpontul szolgál.

5. *Az egyenlőszárú gömbháromszögben az egyenlő oldalakkal szemközt levő szögek is egyenlők,* viszont, *amely gömbháromszögnek két szöge egyenlő, az egyenlőszárú.*

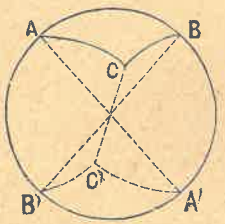
6. *A gömbháromszög nagyobb oldalával szemközt levő szög nagyobb, mint a kisebbikkel átellenes szög, és viszont.*

7. *A gömbháromszög három szöge összesen nagyobb két és kisebb hat derékszögnél.*

21. §. Egybevágó és szimmetrikus gömbháromszögek.

Egybevágóknak az oly gömbháromszögeket nevezzük, melyek megfelelő alkotórészeikkel egymásra téve elfödik egymást. Erre nézve nem elég, hogy a megfelelő alkotórészek egyenlők legyenek, hanem szükséges még, hogy a részek *ugyanabban a sorban* is következzenek egymásra.

54. ábra.



Ha ABC gömbháromszög (54. ábra) három szögpontján keresztül átmérőket vonunk, az utóbbiak végpontjai a gömblap másik felén új gömbháromszöget határoznak meg, $A'B'C'$-et, amelyet fekvésénél fogva *átellenes gömbháromszög*nek nevezünk. E háromszög megfelelő oldalai és szögei egyenlők az eredeti háromszög hasonnevü alkotórészeivel; ámde azért e két háromszög mégsem egybevágó, mert megfelelő alkotórészeik más-más rendben sorakoznak. Az ilyen gömbháromszögeket *szimmetrikus* gömbháromszögeknek nevezzük. Az átellenes háromszögek tehát szimmetrikusak, de nem egybevágók.

A háromélü testszögek tételei a gömbháromszögekre vonatkozólag így hangzanak:

1. *Ha két gömbháromszög három-három oldala kölcsönösen egyenlő, e háromszögek vagy egybevágók, vagy szimmetrikusak* a szerint, amint az alkotórészek ugyanazon, vagy ellenkező sorban következnek egymásra.

2. *Ha két gömbháromszög három-három szöge külön-külön egyenlő egymással, a két háromszög vagy egybevágó, vagy szimmetrikus.*

3. *Ha két gömbháromszögben két-két oldal és a közbenfekvő szög kölcsönösen egyenlő, a gömbháromszögek vagy egybevágók, vagy szimmetrikusak.*

4. *Ha két gömbháromszögben egy-egy oldal és a mellette levő két-két szög kölcsönösen egyenlő, e háromszögek vagy egybevágók, vagy szimmetrikusak.*

5. *Ha a két gömbháromszögben két-két oldal és egy-egy átellenben fekvő szög kölcsönösen egyenlő, a háromszögek nem szükségkép egybevágók vagy szimmetrikusak*, mert a mondott részekből két különböző háromszög alakítható.

6. *Ugyanez áll akkor is, ha két gömbháromszögben két-két szög és egy-egy átellenes oldal egyenlő.*

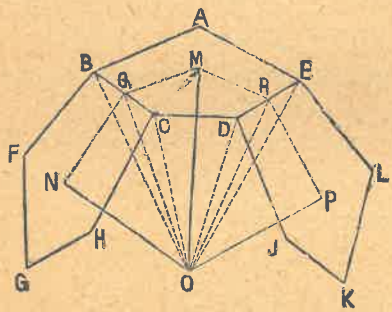
A gömbháromszögek *hasonlóságát* külön tárgyalni nem szükséges, mert a hasonlósági tételek olyanok, mint az egybevágóság tételei.

22. §. A gömbbe és köréje írt testekről.

Az olyan testeket, amelyeknek csúcsaik valamely gömb felületére esnek, *beírt-*, azokat pedig, amelyeknek oldallapjaik a gömb felületét érintik, *körülírt-* testeknek nevezzük. A beírt- és körülírt- testek közül a legfontosabbak a *szabályos* testek.

Minden szabályos test köré és szintúgy minden szabályos testbe gömb szerkeszthető.

55. ábra.



Ennek bebizonyításául legyen $ABCDE$, $BFGHC$ és $DJKLE$ (55. ábra) valamely szabályos test három szomszédos határlapja; M, N, P a nevezett szabályos idomok megfelelő középpontja. M középpontból BC élre MQ merőlegest vonjuk; ennek talppontja BC-t felezi, azaz $BQ = CQ$. Ugyanez áll az N pontból BC-re húzott merőleges egyenesről is. Ennélfogva MQ és NQ merőlegesek egyazon közös pontban találkoznak s az általuk berekesztett MQN szög nem egyéb, mint ABC és BFG síkok hajlási szöge. Továbbá BC merőlegesen áll MQN szögnek a síkjára, következőleg a mondott egyenesen keresztül haladó $ABCDE$ és $BFGHC$ síkok szintén merőlegesek MQN síkra. Most, ha M és N pontból az imént nevezett síkokra MO és NO merőlegeseket vonjuk, az utóbbiak okvetlenül MQN síkba esnek, és mert párhuzamosak nem lehetnek, szükségkép metszik egymást O pontban. Ez az O úgy a beírt, mint a körülírt gömbnek középpontja.

Mert ha OQ egyenest vonjuk, két derékszögű háromszög támad, u. m. MOQ és NOQ; ezekben OQ átfogó közös, és MQ befogó $= NQ$, tehát $MOQ\triangle \cong NOQ\triangle$, következőleg $MO = NO$, vagyis O pont ABC és BFG síkoktól egyenlő távolságban van; továbbá $MQO\sphericalangle = NQO\sphericalangle$-gel, azaz $\overline{OQ}$ egyenes MQN hajlási szöget felezi. Most, ha O pontból $DJKLE$ oldallap középpontjához OP egyenest vonjuk, ezen $OP = OM$-mel, s ezenkívül $OP \perp DJKLE$ síkra. Mert, ha DE élnek felező pontjából R-ből MR, PR és OR egyeneseket vonjuk: $MOQ \triangle \cong MOR \triangle$, tehát $OQ = OR$, és $MQO \sphericalangle = MRO \sphericalangle = {}^1/_2\, MQN$ szöggel; ám $MRP \sphericalangle = MQN \sphericalangle$ mert a szabályos test valamennyi szomszédos határlapjának ugyanazon hajlása van, tehát $MRO \sphericalangle = \frac{1}{2}\, MRP \sphericalangle = ORP$ szöggel és így $MRO \triangle \cong PRO \triangle$, következőleg $OP = OM$ és $OPR \sphericalangle = OMR \sphericalangle = 90^0$; minthogy pedig MRP sík $\perp$ $DJKLE$ síkra, OP szintén merőlegesen áll az utóbbi síkra.

Hasonló módon bizonyítjuk be, hogy O pont a *többi* határlaptól is egyenlő távolságra esik. Ennélfogva O csakugyan középpontja azon beírt gömbnek, mely a szabályos test minden oldallapját érinti.

Minthogy továbbá BC él $\perp$ MON síkra, tehát $OQB \sphericalangle = OQC \sphericalangle = 90^0$; hasonlókép $ORD \sphericalangle = ORE \sphericalangle = 90^0$; és ha még BO, CO, DO, EO egyeneseket vonjuk: $OQB \triangle \cong OQC \triangle \cong ORD \triangle \cong ORE \triangle$, mert e derékszögü háromszögekben a befogók egyenlők, következőleg $OB = OC = OD = OE$. Ezek alapján könnyü kimutatni, hogy O pont a szabályos test többi csúcspontjaitól is egyenlő távolságra van. Ennélfogva O egyszersmind azon gömbnek is középpontja, melynek felszíne a szabályos test valamennyi csúcspontját magában foglalja. Szóval O pont úgy a beírt, mint a körülírt gömbnek középpontja.

Ötödik fejezet.

A testek hasonlóságáról.

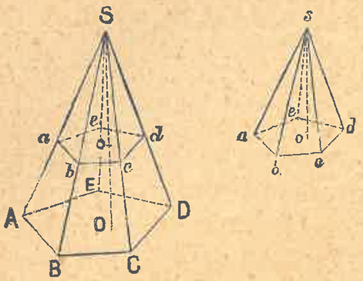
23. §. A gúlák hasonlósága.

Két gúla akkor *hasonló*, azaz megegyező alakú, ha testszögeik ugyanazon sorban egybevágók. Például ha valamely gúlát alapjával párhuzamosan szelünk (56 ábra), az elvágott kisebbik gúla hasonló a nagyobbikhoz, mert megfelelő testszögeik egybevágók. (Miért?)

1. *A hasonló gúláknak megfelelő határlapjaik is hasonlók egymáshoz, megfelelő éleik pedig egyenlő arányúak.*

Legyen $SABCDE$ gúla $\backsim$ *sabcde*hez; a föntebbi magyarázat alapján könnyen kimutathatjuk, hogy a megfelelő oldallapok is

56. ábra.



hasonlók, mert ezek oly háromszögek, melyekben a megfelelő szögek egyenlők és így a hasonló fekvésü oldal- és alapélek egyenlő arányúak, tehát a két alapsík is hasonló egymáshoz. (Miért ?)

A gúlák hasonlóságáról olyforma tantétel-sorozatot lehetne kifejteni, mint a síkmértanban a hasonló háromszögekről ; ámde minthogy a gúlák hasonlósága korántsem oly fontos, mint a háromszögeké, ezért csak néhány hasznosabb tételt említünk fel.

2. Azon gúlák, amelyeknél a csúcsnál lévő testszögek egybevágók, megfelelő oldaléleik pedig egyenlő arányúak, egymáshoz hasonlók.

3. Ha két gúlának megfelelő határlapjaik hasonlók és ugyanazon sorrendben következnek egymásra, akkor a gúlák is hasonlók.

4. Oly négylapú testek, amelyeken a megfelelő csúcs körül levő élszögek egyenlők és az oldalélek egyenlő arányúak, szintén hasonlók egymáshoz.

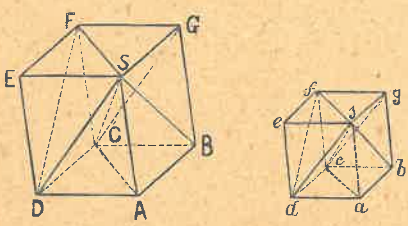
5. A hasonló gúlák magasságai úgy aránylanak egymáshoz mint hasonló fekvésü éleik.

24. §. Egyéb szögletes testek hasonlósága.

A szögletes testek akkor *hasonlók*, azaz alakra nézve megegyezők, ha egyenlő számú hasonló gúlából vannak összetéve és e hasonló gúlák ugyanazon rendben sorakoznak.

1. *A hasonló szögletes testek megfelelő határsíkjaik egymáshoz hasonlók, megfelelő testszögeik pedig egybevágók.*

57. ábra



SABC, *SADC*, *SCDF* stb. gúlák (57. ábra) az egyik testnek, *sabc*, *sadc*, *scdf* stb. pedig a másiknak megfelelő *hasonló* részei.

ABC és *ADC* háromszögek, melyek együttvéve a nagyobbik test egyik határlapját alkotják, megfelelőleg hasonlók a kisebbik testben levő *abc* és *adc* háromszögekhez. Ugyanis *SABC* gúla a föltételnél fogva $\backsim$ *sabc* gúlához, tehát a 23. § szerint $ABC \triangle \backsim abc$-hez stb. Söt mi több, ha ABC és ADC háromszögek egyazon síkba esnek (mint a jelen esetben), akkor a megfelelő *abc* és *adc* háromszögek is szükségkép közös síkban vannak. Mert $SABC$ és *sabc*, továbbá $SADC$ és *sadc* gúlák hasonlósága következtében $S(AC)B$ lapszög $= s(ac)b$-vel, és $S(AC)D$ lapszög $= s(ac)d$-vel; hogyha tehát $S(AC)B$ és $S(AC)D$ lapszögek összege nyujtott lapszög, a megfelelő $s(ac)b$ és $s(ac)d$ lapszögek szintén nyujtott lapszöget alkotnak. Ennélfogva $ABCD$ idom $\backsim$ *abcd*-hez, mert megfelelőleg hasonló háromszögekből alakultak.

Ugyanily módon lehet a többi megfelelő határlap hasonlóságát kimutatni.

Továbbá $B(AS)D$ lapszög $= b(as)d$-vel, mert: az előbbi $B(AS)C$ és $D(AS)C$, az utóbbi meg $b(as)c$ és $d(as)c$ lapszögekből áll, s a hasonnevü részek megfelelőleg egyenlők. Általában a fönebbi két szögletes test bármelyik megfelelő lapszög-párja egyenlő, minthogy ezen hasonló fekvésű lapszögek hasonló gúláknak megfelelő lapszögeiből vannak szerkesztve.

Mindezekből kiviláglik, hogy a szóban levö két szögletes test megfelelő testszögei (pl. A és a) egybevágók, mert megfelelő él- és lapszögeik egyenlők és megegyező fekvésüek.

2. Viszont, *ha két szögletes test határlapjai megfelelőleg hasonlók és testszögeik sor szerint egybevágók, akkor e testek szintén hasonlók, azaz megfelelő hasonló gúlákra bonthatók.*

A szabályos testek mindig hasonlók, ha oldalszámuk egyenlő.

25. §. A gömbölyű testek hasonlóságáról.

1. A gömbök mind hasonlók egymáshoz.

2. Két egyenes henger akkor hasonló, ha tengelymetszeteik hasonlók.

3. Két egyenes kúp is akkor hasonló, ha tengelymetszete hasonlók.

Hatodik fejezet.

A testek felszíne és köbtartalma.

26. §. A térfogat-egységről.

A testek *felszínét*, vagyis alap- és oldallapjaik összes kiterjedését területszámítás útján határozzuk meg. A területegység, amint tudjuk, oly négyzet, amelynek oldala a hosszúság egysége. A testek *térfogatának*, vagy *köbtartalmának* a meghatározásánál testmérték-egységre van szükségünk és e célra oly *kocka* (cubus) szolgál, amelynek minden éle a hosszúság-egységgel egyenlő. Ezzel közvetlenül csak a derékszögű parallelepipedont lehet megmérni; legtöbb esetben közvetve határozzuk meg a test köbtartalmát, t. i. összehasonlítjuk azt valamely derékszögű parallelepipedonnal, vagy oly test térfogatával, melynek köbtartalom-számítása már ismeretes előttünk.

Azt a számot, amely megmutatja, hogy az egységül elfogadott köbmérték hányszor van meg valamely testben, *térfogati számnak* nevezzük.

Megjegyzendő, hogy valahányszor az alábbi cikkekben térfogatok arányáról, területek és vonalak szorzatáról stb. szó lesz, — azokon mindannyiszor az illető mérési számok értendők.

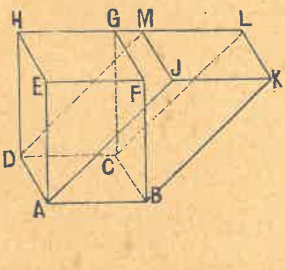
27. §. A parallelepipedonok térfogatainak egyenlőségéről.

1. *A közös alapú és egyenlő magasságú parallelepipedonok egyenlő térfogatúak, azaz egyenlők.*

Az ilyen parallelepipedonoknál ugyanis az alappal átellenes határlapok ugyanazon síkba esnek, mégpedig *a)* vagy ugyanazon két párhuzamos egyenes közé, mint az 58. ábra mutatja, *b)* vagy nem.

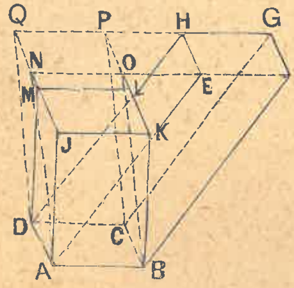
a) A két fedőlap ugyanazon két párhuzamos egyenes közé esik. Legyen $ABCDEFGH$ az egyik, $ABCDIKLM$ a másik parallelepipedon. (58. ábra.) Ezen esetben $AEJDHM$ háromoldalú hasáb $\cong$ $BFKCGL$ hasábbal, mert a háromélű E testszöget alkotó síklapok az F testszög megfelelő síkjaival sorban egybevágók; a nevezett két hasáb tehát tökéletesen egymásba illeszthető. Most, ha az AL testből $AEJDHM$ hasábot elvesszük, maradékul $ABCDJKLM$ parallelepipedont kapjuk és, ha ugyanazon AL

58. ábra.



testből $BFKCGL$ hasábot kivonjuk, $ABCDEFGH$ parallelepipedon marad; tehát AJL parallelepipedon $= AEG$-vel, mert ha egyenlő mennyiségekből egyenlőket kivonunk, a maradékok is egyenlők.

59. ábra.



b) *A két fedőlap nem esik ugyanazon két párhuzamos egyenes közé.* Hosszabbítsuk meg az egyazon síkban lévő EF, GH és JM, KL éleket (59. ábra); ezek egymást átmetszve $NOPQ$ parallelogrammát alkotják, mely az $ABCD$ alappal, nemkülönben a két ellenlappal is egybevágó. (Miért?) Ha tehát $NOPQ$ parallelogramma szögpontjait az alap megfelelő csúcsaival összekapcsoljuk, $ABCDNOPQ$ parallelepipedon keletkezik, mely az előbbi (a) pontnál fogva úgy AG, mint AL parallelepipedonnal egyenlő, ennélfogva AH parallelepipedon $= AL$-lel.

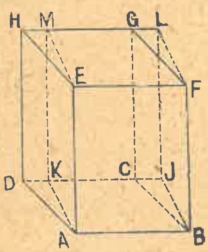
E tantétel alapján bármely ferde parallelepipedont derékszögüvé alakíthatunk át. Evégből t. i. az alap szögpontjain az alapsíkra merőlegeseket állítunk a fedőlap síkjáig; az ekkép támadt derékszögü parallelepipedon az eredeti ferde parallelepipedonnal egyenlő.

2. *Bármily ferdeszögü parallelepipedon egyenlő alapú és magasságú derékszögüvé alakítható át.*

Először is a ferdeszögü parallelepipedon a megelőző pont szerint oly egyenes parallelepipedonná alakítható át, amelynek az előbbivel közös alapja és egyenlő magassága van. Legyen $ABCDEFGH$ (60. ábra) az ekkép származott egyenes parallelepipedon és ennek alapja: $ABCD$ ferdeszögü parallelogramma.

Vonjuk az alap A és B pontjából CD-re AK és BJ merőlegeseket, ez által $ABJK$ derékszögü parallelogramma keletkezik, amelynek területe $= ABCD$-ével. Hasonlóképen húzzuk a fedőlap E és F pontjából GH-ra EM és FL merőlegeseket, ez által $EFLM$ derékszögü parallelogramma keletkezik. Végül kapcsoljuk össze e két derékszögü négyszög megfelelő szögpontjait egyenes vonalakkal, ekkor $ABJKE$ FLM új parallelepipedon keletkezik, és ez egyenlő alapú és magasságú az eredetivel és ezenkívül még derékszögü is. (Miért?)

60. ábra.

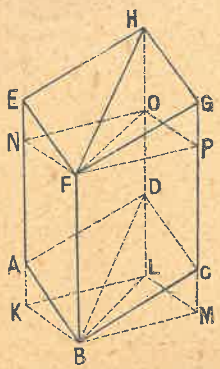


Minthogy a parallelepipedon bármelyik

határlapja szolgálhat alapul, a föntebbi két testet $ABFE$ közös alapon állóknak tekinthetjük, és mert fedőlapjaik két párhuzamos egyenes közé esnek, azért köbtartalmuk egyenlő.

3, *Minden átló-sík a parallelepipedont két egyenlő hasábra osztja, szóval felezi.*

61. ábra.



Legyen $ABCDEFGH$ (61. ábra) az adott parallelepipedon; ha BF és DH átellenes éleken keresztül átló-síkot vezetünk, ez a nevezett testet két egyenlő hasábra osztja.

Ennek bebizonyításául fektessünk B és F végpontokon keresztül BF élre két merőleges síkot; ezek a kellően meghosszabbított oldaléleket K, L, M és N, O, P pontokban metszik. Ennek folytán két egybevágó parallelogramma (u. m. $BKLM$ és $FNOP$), és egy derékszögű parallelepipedon u. m. $BKLMFNOP$ keletkezik. Ez utóbbit az átló-sík ($BFHD$) két *egybevágó* hasábra osztja, azaz $BLMFOP$ hasáb $\cong$ $BLKFON$ hasábbal, mert egymásba illeszthetők. (Miért?)

Továbbá $BF = AE = KN$, tehát $AE - AN = KN - AN$, vagyis $EN = AK$. Hasonló oknál fogva $HO = DL$. Ebből következik, hogy $FNEHO$ gúla $\cong$ $BKADL$ gúlával, mert ha e két testet egymásba helyezzük akkép, hogy BKL háromszög a vele egybevágó FNO-ra jut, akkor AK él EN-nel, LD él OH-val együvé esik, mert egy pontból valamely síkra csupán egy merőleges vonható. Hasonlóképen $FOHGP$ gúla $\cong$ $BLDCM$ gúlával.

Most, ha $BLKFON$ egyenes hasábhoz $FNEHO$ gúlát hozzá adjuk, az utóbbival egyenlő $BKADL$-t pedig elveszzük: $BADFEH$ ferde hasábot kapjuk; ez tehát az előbbi egyenes hasábbal egyenlő. Hasonlókép $BMLFPO$ egyenes hasáb $=$ $BCDFGH$ ferde hasábbal.

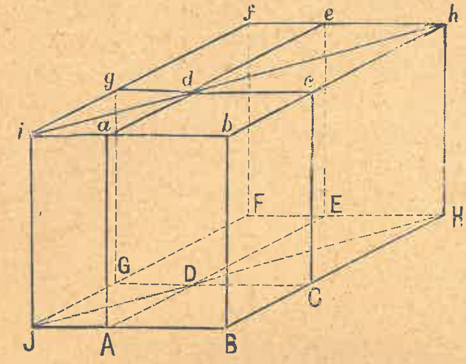
De ezen egyenes hasábok a föntebbiek szerint egybevágók, tehát a *ferde hasábok is szükségkép egyenlő térfogatuak.*

Eszerint: *minden háromoldalú hasábot valamely kétakkora alapú és egyenlő magasságú parallelepipedon felerészének tekinthetünk*

4. *Az egyenlő alapú és magasságú derékszögű parallelepidonok egyenlők.*

A síkmértanból (46. §. 3.) tudjuk, hogy ha valamely parallelogrammában az átló bármely pontján keresztül az oldalakhoz párhuzamosakat vonunk, az átló nem hasította két kisebb parallelo-

62. ábra.



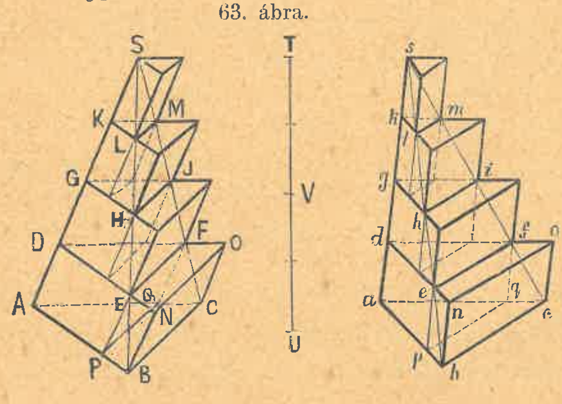
grammának egyenlő területe van. Szerkesszünk most oly derekszögü parallelepipedont (62. ábra), melyben az átló nem szelte parallelogramma-pár a két adott parallelepipedonnak az alapsíkjai; azaz rajzoljuk meg $BHFJ$-t, melynek oldalai a két alapsík megfelelö oldalainak összegével egyenlők; ekkor $ABCD$ és $DEFG$ a két derékszögü parallelepipedon alapjait ábrázolják. Továbbá emeljünk $BHFJ$ s a benne foglalt két kisebb parallelogramma összes szögpontjaiból merőleges egyeneseket; mérjük ki ezek egyikére, Bb-re a parallelepipedonok közös magasságát és fektessük b végponton keresztül $BHFJ$-vel párhuzamosan $bhfi$ síkot. Ezáltal a kérdéses két test is megalakult: az egyik t. i. $ABCDabcd$, a másik pedig $DEFGdefg$. Ezekután a megelözö tantétel alapján könnyen kimutathatjuk, hogy a föntebbi derékszögü parallelepipedonoknak egyenlö köbtartalmuk van.

5. *Az egyenlő alapú és magasságú ferde parallelepipedonok egyenlők.*

Mert a *ferde* parallelepipedonok a 2. p. szerint egyenlő alapú és magasságú *derékszögüekké* alakíthatók át; ámde az utóbbiak az előbbi pontnál fogva egyenlők, tehát a ferdék is.

Ezek következtében: *az egyenlő alapú és magasságú háromoldalú hasábok is egyenlők.*

63. ábra.



6. *Az egyenlő alapú és magasságú gúlák egyenlő térfogatúak.* Legyen $SABC$ és $sabc$ két háromoldalú gúla (63. ábra), melyeknek alapjuk és magasságuk egyenlő, azaz $ABC\triangle = abc\triangle$, és TU a közös magasság; közvetve megmutatjuk, hogy e gúlák köbtartalma is egyenlő, azaz $G = g$.

Mert tegyük, fel hogy $G > g$-nél. Osszuk el a gúlák közös magasságát (TU-t) n egyenlő részre és fektessünk az osztó pontokon keresztül az alappal párhuzamos síkokat, ezek mindegyike a gúlapárt két egyenlő területű háromszögben metszi.

Igy például $GHI\triangle = ghi\triangle$-gel, mert:

$$ABC\triangle : GHI\triangle = \overline{TU}^2 : \overline{TV}^2,$$

hasonlólag:
$$abc\triangle : ghi\triangle = \overline{TU}^2 : \overline{TV}^2,$$

tehát:
$$ABC\triangle : GHI = abc\triangle : ghi\triangle.$$

Ámde a föltétel szerint:

$$ABC\triangle = abc\triangle\text{; következőleg } GHI\triangle = ghi\triangle.$$

Az említett metsző síkok mindegyik gúlát $n-1$ csonka gúlára és 1 teljes gúlára (a csúcsnál) osztják. Szerkesszünk már most $ABCDEF$ csonka gúlának mindegyik alapsíkjára, vagyis ABC és DEF háromszögekre egy-egy olyan hasábot, melynek oldaléleit a nagy gúla valamelyik oldalélével pl. AS-sel párhuzamosaknak vesszük. A nagyobbik hasábot, vagyis $ABCDNO$-t, amely részben a gúlából kiszögellik, *külső*nek, a kisebbiket ellenben, amely egészen a gúlán belül van, *belső*nek nevezhetjük. Ugyanilyen külső és belső hasábokat szerkesszünk mind a két gúla többi részeihez, amint ezt az ábra mutatja. Minthogy az egyenlő alapú és magasságú háromoldalú hasábok egyenlő térfogatúak, az ugyanazon pár metsző sík közé foglalt külső hasábok is egyenlők, azaz $ABCDNO = abcdno$, stb. Ugyanez áll a megfelelő belső hasábokról is.

Eszerint, ha a külső hasábok összege az egyik gúlánál S (summa), a második gúlánál is annyi mint S: és ha a belső hasábok összege az egyik gúlában s, a másikban is s.

Kétséget nem szenved továbbá, hogy a külső hasábok összege nagyobb, a belsőké pedig kisebb, mint az illető gúla köbtartalma, vagyis:

$$S > G > s$$
$$\text{és } S > g > s$$

Most, ha a $G < S$ egyenlőtlenségből a $g > s$ egyenlőtlenséget kivonjuk, annál inkább áll, hogy:

$$G - g < S - s.$$

Azaz, a két gúla köbtartalma közt mindenesetre kisebb a különbség, mint a külső hasábok és a belső hasábok összege közt. Ámde bármely külső hasáb egyenlő térfogatú a közvetlen alatta levő belsővel, ennélfogva $S-s$ egyenlő a legalsó külső hasábbal, vagyis $ABCDNO$-val. Ha tehát az utóbbinak köbtartalmát h-val jelöljük:

$$G - g < h\text{-nál}.$$

Világos, hogy h értéke attól függ, hány részre van osztva a közös magasság; minél több részre osztjuk ezt, annál kisebb lesz amaz; miután pedig a magasságot tetszésünk szerint akárhány egyenlő részre oszthatjuk, bizonyos, hogy h hasábot is bármily parányira alakíthatjuk. Ugyde a két gúla közt a különbség a mondottak szerint h-nál kisebb, tehát $G-g=o$, vagyis: $G=g$.

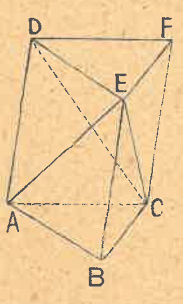
E fontos tételt rövidebben — habár nem oly szabatosan — igy is bebizonyithatjuk:

Amikor a föntebbiek szerint kimutattuk, hogy az alaptól egyenlő távolságra eső párhuzamos metszések az egyik és a másik gúlán egyenlő területüek, ekképen folytatjuk: A párhuzamos metsző síkok mind a két gulát n csonka gúlára osztják; ezek természetesen annál alacsonyabbaknak mutatkoznak, minél sürübben fektetjük a metsző síkokat; ha tehát n számot folyton folyvást növesztjük, a csonka gúlák is mind laposabbakká válnak, és elvégre mindegyik gúlát számtalan igen vékony lemezből állónak gondolhatjuk. De a megfelelő lapok egyenlők, tehát összegeik, a gúlák is. Látnivaló, hogy ez a bebizonyitás nemcsak három, hanem többoldalú gúlákra is alkalmazható.

Ily módon az egyenlő alapú és magasságú *hasábok* térfogatainak egyenlősége is kimutatható. (Cavalieri-féle elv.)

7. *Minden háromoldalú hasáb három egyenlő gúlára bontható (Eudoxus tétele).*

64. ábra.



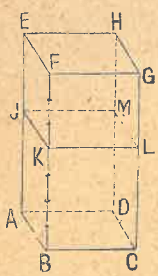
Legyen $ABCDEF$ (64. ábra) az adott hasáb. Fektessünk D, E, C és A, E, C csúcsokon keresztül két síkot; ezáltal a három oldalú hasábot három gúlára bontottuk, u. m. $EACD$, $EDCF$ és $EABC$-re.

Az előbbi kettőnek közös E csúcsa van és alapjaik ugyanazon $ACFD$-nek a felével egyenlők; e két gúla tehát egyenlő. A harmadik gúla $EABC$ ismét $= CDEF$-fel, mert alapjuk és magasságuk egyenlő; ámde $CDEF$ gúla $= EDCF$-fel, tehát $EABC$ gúla $= EDCF = EACD$ gúlával.

28. §. A parallelepipedonok térfogatainak arányossága.

1. *Közös alapú derékszögü parallelepipedonok térfogatai úgy aránylanak egymáshoz, mint megfelelő magasságaik.*

65. ábra.



Tegyük föl, hogy $ABGH$ és $ABLM$ derékszögü parallelogrammák magasságai összemérhetők és a közös mérték BF-ben m-szer, BK-ban n-szer foglaltatik; akkor:

$$BF : BK = m : n \quad (7:4).$$

Az osztó ponton keresztül az alappal párhuzamos síkokat fektetvén, a nagyobbik *(P)* parallelepipedont m, a kisebbik *(p)* parallelepipedont n derékszögü egybevágó parallelepipedonra osztjuk. Azaz:

$$P : p = m : n \quad (7:4).$$

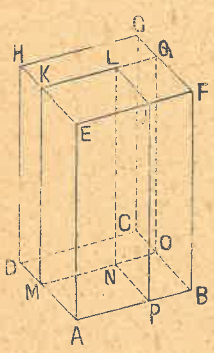
A két aránypárt egybevetve lesz:

$$P : p = BF : BK.$$

Azon esetre, ha BF és BK magasságok összemérhetetlenek, a tétel helyességét közvetve bizonyítjuk be. Mert, ha $BF : BK$ nem $= P : p$, akkor $BE : BK$ arány vagy nagyobb, vagy kisebb $P : p$-nél; ámde az utóbbi két eset ellenmondásra vezet, tehát a két arány egyenlő.

2. *Az egyenlő magasságú derékszögű parallelepipedonok térfogatai úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő alapsíkok területei.*

66. ábra.



Mert helyezzük $APLK$ kisebb parallelepipedont (p-t) (66. ábra) a nagyobbikba, azaz $ABGH$-ba (P-be) úgy, mint az ábra mutatja; továbbá hosszabbítsuk meg MKL síkot a nagyobbik parallelepipedon BFG oldallapjáig. Ez által $ABQK$ (P') harmadik parallelapipedon keletkezik, mely az előbbi kettö között közvetítőül szolgálhat.

Ugyanis az 1. pont szerint:

$$P : P' = \overline{EH} : \overline{EK},$$

és:

$$P' : p = \overline{EF} : \overline{EJ}$$

tehát:

$$P : p = \overline{EH}.\ \overline{EF} : \overline{EK}.\ \overline{EJ}.$$

Ámde $EH.\ EF = EFGH$ és $EK.\ EJ = EKLJ$ parallelogramma területével, következőleg $P:p = EFGH : EKLJ$.

3. *Két derékszögü parallelepipedon úgy aránylik egymáshoz, mint alapjuk és magasságuk szorzatai.*

Jelöljük az egyik térfogatát P-vel, alapját A-val, magasságát M-mel, a másiknál megfelelőleg P', A', M'-vel. E két testhez gondoljunk még egy harmadik parallelepipedont p-t, melynek alapja az elsőével, magassága a másodikéval megegyezik. A föntebbiek szerint:

$$P:p = M:M'$$
$$p:P' = A:A'$$

tehát: $P:P' = A.\ M:A'M.$

4. Minthogy a sokszögek parallelogrammákká és ezek megint derékszögü négyszögekké alakíthatók át, azért minden hasábot derékszögü parallelepipedonná alakíthatunk át, és így mindazok a tételek, amelyeket most levezettünk, akkor is érvényesek, ha bármilyen sokszög alapú hasábról van szó.

29. §. A parallelepipedon és a hasáb felszine és köbtartalma.

1. *A derékszögü parallelepipedon felszinét úgy találjuk meg, hogy az egyazon csúcson összetalálkozó három élt a-, b-, c-t páronként megszorozzuk egymással; e szorzatok kétszeres összege a parallelepipedon összes felszinével egyenlő,* azaz: $F = 2\ (ab + ac + bc)$.

Hogyha pedig az a, b, c élek közé zárt szögek nem 90^0-úak, akkor a *ferde* parallelepipedon felszine:

$$F = 2\ (ab \sin \gamma + ac \sin \beta + bc \sin \alpha),$$

itt α a b és c, β az a és c, γ az a és b élek által befogott szöget jelenti.

2. *A hasáb felszinét úgy találjuk meg, hogy alapsikjának kétszeres területéhez hozzáadjuk az oldallapok területének összegét.*

Ha az *egyenes hasáb*nak csakis az *oldalfelszinét* keressük, feltéve, hogy az alapsokszög egyes oldalainak mértékszámai a_1, a_2, $a_3 \ldots .\ a_n$ és:

$$a_1 + a_2 + a_3 . + \ldots . + a_n = k_n,$$

ahol tehát k_n nem egyéb, mint az alapsokszög kerülete, továbbá a hasáb magassága m, oldalfelszine O, akkor:

$$O = a_1 m + a_2 m + \ldots . + a_n m = m\ (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = m.\ k_n.$$

Az *oszlop*, vagyis a szabályos sokszög alapú egyenes hasáb felszine nem egyéb, mint az alapél és a magasság mértékszámainak az oldalak számával való szorzata: $O = n . am.$

A *kocka* felszine, ha egyik éle a, egyenlő $6a^2$-tel.

3. A *parallelepipedon köbtartalmát úgy számítjuk ki, hogy alapjának területszámát megszorozzuk magasságának mértékszámával.* Mert minden P *ferde* parallelepipedon vele egyenlő A alapú és M magasságú derékszögű parallelepipedonná alakítható át, ez utóbbit pedig a $K = 1$ térfogat-egységgel összehasonlítván, lesz:

$\frac{P}{K} = \frac{A . M}{a^2 . a}$, és mert: $\frac{P}{K}$ a parallelepipedon köbtartalmának mértékszáma: P, $\frac{A}{a^2}$, az alap területének mértékszáma: A, $\frac{M}{a} = M$ a magasság mértékszáma,

azért:
$$P = A . M$$

Eszerint a derékszögű parallelepipedon köbtartalmát megtaláljuk, ha az egyazon csúcsban összejövő élek mértékszámait egymással szorozzuk, vagyis $P = a. b. c.$

A kocka térfogata annyi, mint az él mértékszámának harmadik hatványa (köbe), vagy $K = a^3$, ha a a kocka élhosszát jelenti. Viszont: $a = \sqrt[3]{K}$, vagyis a kocka élhosszát úgy nyerjük, hogy a köbtartalmát jelentő számból harmadik gyököt vonunk.

4. Minthogy a 27. §. 2. tétele szerint a hasábok derékszögű parallelepipedonokká alakíthatók át, azért: *a hasáb köbtartalma annyi, mint alapjának területszáma megszorozva magasságának mértékszámával:*
$$K = a. m.$$

30 §. A gúla és a csonka gúla felszíne és köbtartalma.

1. *A gúla, vagy piramis felszíne annyi, mint n háromszög és az alap-sokszög területeinek összege.*

A szabályos sokszög alapú egyenes gúla felszínét úgy nyerjük, hogy az egyik oldal-háromszög területének n-szereséhez hozzáadjuk az alapot alkotó szabályos n-szög területét.

2. A *csonka piramis* felszínét megtaláljuk, ha a két hasonló n-szögű alap területéhez az oldalakat alkotó n trapéz területét hozzáadjuk. A szabályos n-szög alapú egyenes csonka gúla felszínét úgy határozzuk meg, hogy az alapok kerületének számtani középarányosát megszorozzuk az egyik oldalt alkotó trapéz magasságával és e szorzathoz hozzáadjuk a két alap területét.

3. *A gúla köbtartalmát úgy nyerjük, hogy alapjának területszámát megszorozzuk a magasságát alkotó egyenes mértékszámának a harmadrészével:*

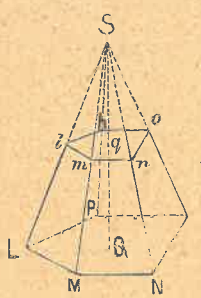
$$K = \frac{1}{3} . A . M.$$

Mert, tudjuk, hogy minden *háromoldalú* gúla egyenlő a vele egyenlő A alapú és M magasságú prizma harmadrészével. A háromoldalú gúlára tehát a fent adott képlet valóban érvényes. Ámde a többoldalú gúlák átlós-síkokkal egyenlő magasságú háromoldalú gúlákra bonthatók oly módon, hogy ezek alapjai együttvéve a többoldalú gúlák alapjaival egyenlők. Ilyformán a megismert szabály a többoldaló gúlák térfogatának a meghatározására is kiterjed.

A föntebbi tételnél fogva: *az egyenlő alapú gúlák úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő magasságok, és az egyenlő magasságúak úgy, mint az illető alapsíkok.*

4. *A csonka gúla köbtartalmát megtaláljuk, ha két alapsíkjának és ezek mértani középarányosának összegét a magasság harmadrészével megszorozzuk.*

67. ábra.



Ugyanis nyilvánvaló, hogy a csonka gúla térfogata annyi, mint a kiegészített (teljes) gúla és az elvágott kisebbik gúla térfogatának a különbsége. Rövidség okáért legyen *LMNOP alap* $= A$, *lmnop fedőlap* $= a$, a magasság $qQ = m$ és a kiegészítő kisebbik gúla magassága $Sq = x$. Az előbbi pontnál fogva:

a nagyobbik gúla köbtartalma $= \frac{1}{3} A (m + x)$;

a kisebbik gúla köbtartalma $= \frac{1}{3} a . x$.

Tehát a *csonka gúla köbtartalma* $= \frac{1}{3} [(m + x) A - ax]$

$= \frac{1}{3} [m A + (A - a) x]$.

x értékének meghatározására a 14. §. I. szakaszának 1. pontját alkalmazzuk:

$$A : a = (m + x)^2 : x^2, \text{ vagy: } \sqrt{A} : \sqrt{a} = (m + x) : x$$

és ebből: $$x = \frac{m \sqrt{a}}{\sqrt{A} - \sqrt{a}}$$

Ezen értéket a föntebbi egyenletbe helyettesítve, lesz:

a csonka gúla köbtartalma $= \frac{1}{3} \left[m A + (A - a) \frac{m \sqrt{a}}{\sqrt{A} - \sqrt{a}} \right]$;

minthogy $\frac{A-a}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{A}+\sqrt{a})(\sqrt{A}-\sqrt{a})}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}=\sqrt{A}+\sqrt{a}$ tehát:

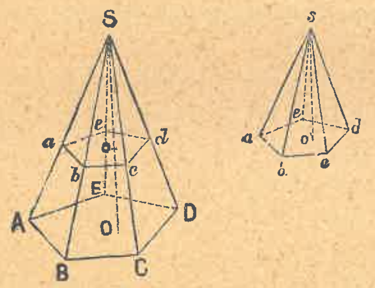
$$K=(A+a+\sqrt{Aa})\frac{m}{3}.$$

Vagyis: *a csonka gúla három gúla összegével egyenlő, melyeknek ugyanazon magasságuk van, mint a csonka gúlának és melyek közül az egyiknek alapja a csonka gúla alapjával, a másodiké ugyannak fedőlapjával, a harmadiké az előbbi kettőnek mértani középarányosával egyenlő.*

31. §. A hasonló szögletes testek térfogatainak arányáról.

1. *Két hasonló gúla köbtartalma úgy aránylik egymáshoz, mint megfelelő éleik, vagy magasságaik harmadik hatványai.*

68. ábra.



Legyen $SABCDE$ gúla (68. ábra) köbtartalma $= G$ és a hozzá hasonló $sabcde$ gúláé $= g$.

A 30. §. szerint:

$$G=\tfrac{1}{3}\,ABCDE.\,\overline{SO},$$

$$g=\tfrac{1}{3}\,abcde.\,\overline{so},$$

tehát: $G:g=$

$$ABCDE.\,\overline{SO}:abcde.\,\overline{so}.$$

Minthogy a gúlák hasonlóságánál fogva:

$$ABCDE:abcde=\overline{AB}^2:\overline{ab}^2,$$

tehát: $ABCDE.\,\overline{SO}:abcde.\,\overline{so}=\overline{AB}^2\,\overline{SO}:\overline{ab}^2.\,\overline{so}.$

Következöleg: $G:g=\overline{AB}^2.\overline{SO}:\overline{ab}^2.\overline{so}.$

Minthogy továbbá a hasonló gúlák magasságai úgy aránylanak egymáshoz, mint hasonló fekvésü éleik, tehát:

$$\overline{SO}:\overline{so}=\overline{AS}:\overline{as}=\overline{AB}:\overline{ab}$$

és $\overline{AB}^2.\overline{SO}:\overline{ab}^2.\overline{so}=\overline{AB}^3:\overline{ab}^3,$

következéskép:

$$G:g=\overline{AB}^3:\overline{ab}^3=\overline{SO}^3:\overline{so}^3.$$

2. *A hasonló polyederek köbtartalma úgy aránylik egymáshoz, mint hasonló fekvésü éleik harmadik hatványai.*

Mert két hasonló polyedert egyenlö számú hasonló gúlára lehet bontani és, ha az utóbbiakra a föntebbi tételt alkalmazzuk, és tekintetbe vesszük, hogy a hasonló polyederek megfelelő élei arányosak, a szóban forgó tétel önként következik.

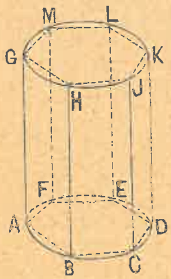
32. §. A henger felszine és köbtartalma.

Ha valamely egyenes henger alapkörébe szabályos sokszöget irunk és ez utóbbira, mint alapra, a hengerrel egyenlö magasságú merőleges hasábot szerkesztünk, ennek oldalélei a henger palástjára esnek, más szóval, a hasáb a hengert élei hosszában érinti. Ily hasábot *beirt* hasábnak nevezünk. Könnyü elképzelni, hogy a beirt hasáb oldallapjai annál közelebb simulnak a henger palástjához, minél rövidebbek, tehát egyszersmind minél számosabbak az alapkörbe írt szabályos sokszög oldalai. Ha tehát ez oldalak számát kellően szaporítjuk, a hasáb oldalai és a henger palástja közt lévő különbséget bármily parányi értékre leszállíthatjuk. Szóval, a henger palástja a beirt n, $2n$, $4n$, $8n$ oldalú hasábok oldalterületének a határértéke.

Hasonló áll a henger köbtartalmáról is; ez is a beirt n oldalú hasáb térfogatának határértéke, ha t. i. n számot gondolatban végnélkül megnövesztjük.

1. *Az egyenes henger palástját megtaláljuk, ha alapköre kerületét a magassággal megszorozzuk.*

69. ábra.



Jelöljük a hengerbe írt $ABCDEF$ alapú (69. ábra) merőleges hasáb alap-kerületét K-val, összes oldalapjainak területét O-val és a két test közös magasságát M-mel; a 29. §. 1. pontja szerint:

$$O = K.M$$

Az előbbiek szerint a henger palástja a beirt hasáb oldal-felszinének a határa, azaz, minél inkább szaporítjuk a hasáb oldalainak számát, annál közelebb jut az a hengerhez; ennek palástját tehát megtaláljuk, ha $K.M$ szorzat határértékét vesszük. Már pedig a beirt sokszög kerületének határa a kör, a magasság (M) meg állandó; tehát a henger palástja = a kör kerülete $\times$ M-mel, vagyis: $O = 2R\pi . M$.

Eszerint a henger palástja egyenlö azon derékszögü négyszög területével, melynek alapvonala akkora, mint a henger kerülete, magassága pedig ugyanaz, mint a hengeré. Az eredményt a henger palástjának lefejtése, azaz síklapon való kiterítése is igazolja.

Ha a henger palástjához az alapsík kétszeres területét hozzáadjuk, a henger teljes felszinét találjuk. Tehát:

$$F = 2R^2\pi + 2R\pi . M = 2R\pi (R + M).$$

Az egyenlőoldalú hengernél $M = 2R$ és így:

$$F = 6 R^2\pi.$$

2. *A henger köbtartalmát megtaláljuk, ha alapköre területét a magassággal megszorozzuk.*

Jelöljük a hengerbe írt ($ABCDEF$ alapú) hasáb alapját A-val, köbtartalmát K-val, s a közös magasságot M-mel, a 29. §. 3. pontja alapján:

$$K = A \times M.$$

A henger köbtartalma a mondottak szerint $A \times M$ szorzat *határértéke*. Ámde az egyik tényezőnek, t. i. a beírt sokszög területének (A-nak) határa a kör területe, a másik tényező (M) meg állandó, ennélfogva a henger köbtartalma:

$$K = \text{a kör területe} \times M;$$

és ha az alapkör sugara $= R$, a henger térfogata $= R^2\pi \,.\, M$.

Eszerint: *az egyenlő alapú hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő magasságok; és az egyenlő magasságú hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő alapok.*

Az egyenlőoldalú egyenes hengernél $M = 2R$ s így:

$$K = 2\,R^3\pi.$$

3. *Az üres, vagyis olyan hengernek, amelynek a belsejéből egy kisebb henger ki van vágva, a köbtartalmát* úgy találjuk meg, hogy a belső és külső kör félkerületének összegét megszorozzuk a henger falának a vastagságával s e szorzatot a henger magasságával. Azaz, ha R jelenti a külső, r a belső kör sugarát, úgy $(R - r)$ a henger falának a vastagsága, ha még m a henger magassága, úgy a köbtartalom:

$$K = R^2\pi \,.\, m - r^2\pi \,.\, m = \pi(R^2 - r^2)\, m =$$

$$= \pi(R + r)\,(R - r)\,.\, m = 2\pi \,.\, \frac{(R + r)}{2} \,.\, (R - r)\,.\, m.$$

33. §. A kúp és a csonka kúp felszíne és köbtartalma.

Ha a kúp alapkörébe szabályos sokszöget írunk és ennek szögpontjaiból a kúp csúcsához egyeneseket húzunk, ekképen olyan gúla keletkezik, melynek oldalélei a kúp palástjába esnek. Az ilyen gúlát *beírt* gúlának nevezzük. Amint a hengernél, úgy itt is áll, hogy minél több oldala van az alapkörbe írt sokszögnek, annál kisebb a beirt gúla és a kúp palástja közt a különbség; ha tehát a beírt sokszög oldalainak számát kellően szaporítjuk, az említett különbséget bármely parányi értéküvé tehetjük. Szóval, *a kúp palástja annyi, mint a beírt gúlák oldalterületének a határa* és ennélfogva *a kúp térfogata is a beírt gúlák köbtartalmának határértéke,* ha t. i. ezek oldalszámát végtelenül szaporítjuk.

1. *A kúp felszíne F az alapterület a és a palást P összegével egyenlő,* tehát:

$$F = a + P,$$

vagy, ha az alapkör sugara R, úgy:

$$F = R^2 \pi + P.$$

Az egyenes kúp palástját úgy találjuk meg, hogy alapkörének kerületét megszorozzuk a kúp oldalvonalának felével.

Mert, jelöljük a kúpba írt gúla oldalfelszínét O-val, az alapkörbe szerkesztett *szabályos* sokszög kerületét K-val és a háromszögek közös szögpontjából az egyik alapélre vont merőlegest L-lel, akkor:

$$O = \tfrac{1}{2} K \times L.$$

A kúp palástja a beírt gúlák oldalterületének határa lévén világos, hogy $\frac{1}{2}$ K. L-nek határértéke a kúp palástjának területét adja. K-nak határa az alapkör kerülete, L-nek határa a kúp oldaléle l (latus), ennélfogva a kúp palástja $= \frac{1}{2}$ körkerület $\times$ l, vagy, ha az alapkör sugarát ismét R-rel jelöljük:

$$O = P = \tfrac{1}{2} . 2R\pi . l = Rl\pi.$$

Az egyenes kúp palástja tehát egyenlő azon körcikk területével, melynek íve oly hosszú, mint a kúp kerülete, és sugara akkora, mint a kúp oldaléle. Ezt az eredményt a kúp palástjának lefejtése, azaz síklapra való legombolyítása által is megtalálhattuk volna. A kúplap t. i., szintúgy, mint a hengerlap, keletkezésénél fogva a lefejthető görbelapok közé tartozik.

A kúp *összes* felülete ilyformán:

$$F = R^2\pi + R\pi l = R\pi (R + l).$$

Az egyenlő oldalú kúpnál $l = 2R$, tehát:

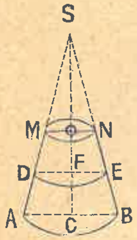
$$F = 3R^2\pi.$$

A csonka kúp felszínét úgy találjuk meg, hogy a két alapterületéhez hozzáadjuk a palást területét:

$$F = A + a + P.$$

Az egyenes csonka kúp palástjának területét épen úgy keressük, mint a csonka gúláét, t. i. a teljes kúp palástjából a kiegészítő kisebbik kúpét kivonjuk.

70. ábra.



Rövidség okáért legyen (70. ábra) az alapkör sugara $AC = R$, a fedőlap sugara $MO = r$, a magasság $CO = m$, az oldalhossza $MA = l$, a kiegészítő kúp oldalhossza $SM = z$. A föntebbiek szerint a csonka kúp palástja: $= \pi R (l + z) - \pi r z$

$$= \pi [R (l + z) - rz].$$

Minthogy: $SA : AC = SM : MO$, vagy:

$$(l + z) : R = z : r;$$

tehát: $$z = \frac{rl}{R - r} \text{ és } l + z = \frac{Rl}{R - r};$$

következőleg a csonka kúp palástjának területe:

$$P = \pi \left[R \frac{Rl}{R - r} - r \frac{rl}{R - r} \right] = \pi l \frac{R^2 - r^2}{R - r}, \text{ vagy:}$$

$$P = \pi l (R + r).$$

Azonban $(R + r) \pi = 2 \frac{1}{2} (R + r) \pi$, azaz $(R + r) \pi$ annyi mint az $\frac{1}{2} (R + r)$ sugarú körnek kerülete.

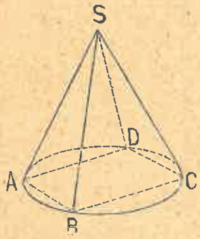
E kört a csonka kúpon is előállíthatjuk, ha az utóbbinak magasságát (CO-t) F pontban felezzük és ezen keresztül az alappal párhuzamos síkot fektetünk. Ugyanis az ekkép támadt DEF körnek DF sugara $= \frac{1}{2} (AC + MO) = \frac{1}{2} (R + r)$, (miért?) tehát kerülete $= (R + r) \pi$. Ennélfogva a csonka kúp palástja oly derékszögü négyszög területével egyenlő, amelynek alapja a csonka kúp középső metszetének kerületével, magassága a csonka kúp oldalvonalával egyenlő hosszúságú.

Ha az egyenes csonka kúp teljes felszinét (F) keressük, az oldalterületéhez hozzá kell adnunk még a két alapkör területét. Azaz:

$$F = R^2 \pi + r^2 \pi + \pi l (R + r) = \pi [R^2 + r^2 + l (R + r)].$$

2. *A kúp térfogatát megtaláljuk, ha alapját magassága harmadrészével szorozzuk.*

71. ábra.



Mert jelöljük a kúp terébe írt gúlának $(SABCD)$-nek alapját A-val (71. ábra) köbtartalmát K-val, s a közös magasságot M-mel, akkor:

$$K = \frac{1}{3} A \times M$$

Minthogy a kúp térfogata egyenlő a beírt gúlák köbtartalmának határával, ennélfogva az $A.M$ szorzat határértékét kell keresnünk. Az egyik tényező (M) állandó mennyiség, a másiknak, A-nak, határértéke a körlap területe; tehát a kúp térfogata $= \frac{1}{3}$ kör terület $\times$ M-mel, vagy, ha az alapkör sugarát R-rel jelöljük, a kúp térfogata:

$$K = \tfrac{1}{3} R^2 \pi . M$$

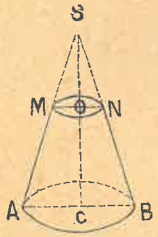
Eszerint: az egyenlő alapú kúpok köbtartalma úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő magasságok; és az egyenlő magasságúak ismét egyenlő arányúak a megfelelő alapokkal.

Az egyenlőoldalú kúpnál: $l = 2R$ s így:

$$M = R\sqrt{3} \text{ és } K = \tfrac{1}{3} R^3 \pi . \sqrt{3}.$$

4. A csonka kúp köbtartalmát hasonló módon számítjuk ki, mint a csonka gúláét.

72. ábra.



Jelöljük az alapkör sugarát (AC-t) R-rel (72. ábra), a fedőlapét r-rel, a csonka kúp magasságát (CO-t) m-mel, a kiegészítő kúp magasságát SO-t x-szel, a csonka kúp köbtartalmát K-val.

$$K = \tfrac{1}{3} R^2 \pi (m + x) - \tfrac{1}{3} r^2 \pi x =$$

$$= \frac{\pi}{3} [R^2 (m + x) - r^2 x].$$

Itt mindenekelőtt x értékét kell kikeresnünk. A háromszögek hasonlóságánál fogva:

$$AC : SC = MO : SO, \text{ vagy } R : (m + x) = r : x,$$

tehát:

$$x = \frac{m\, r}{R - r}, \text{ és } m + x = \frac{m\, R}{R - r};$$

következőleg:

$$K = \frac{\pi}{3} \left[R^2 \frac{m\, R}{R - r} - r^2 \frac{m\, r}{R - r} \right],$$

$$K = \frac{\pi}{3} . \frac{R^3 - r^3}{R - r} . m = \frac{\pi\, m}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

E képlet így is írható:

$$K = \tfrac{1}{3} R^2 \pi . m + \tfrac{1}{3} r^2 \pi . m + \tfrac{1}{3} R\, r\, \pi . m,$$

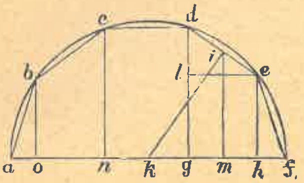
azaz: *a csonkakúp köbtartalma három azzal egyenlő magasságú teljes kúp összegéből áll, melyek közül az egyiknek alapja akkora, mint a csonka kúp alapsíkja, a másodiké egyenlő ugyanannak fedőlapjával és a harmadiké az előbbi kettőnek mértani középarányosával.*

34. §. A szabályos sokszögek körülforgásából származott testek és a gömb felszíne és köbtartalma.

1. Ha valamely szabályos 2n-szög kerületét a felező átmérő körül megforgatjuk, a sokszög kerülete által leírt görbelap felszíne akkora, mint a beírt kör kerületének és a forgási tengely hosszának szorzata.

Először is világos, hogy a sokszög felének körülfordulásából ugyanaz a test származik, mint az egésznek körülfordulásából. Legyen tehát $abcdef$ a félkörbe írt szabályos $2n$-szög fél kerülete (73. ábra). Az egyes oldalak által leírt görbelapok kúpok, csonka kúpok, vagy hengerlapok lehetnek; minthogy azonban a hengert oly csonka kúpnak tekinthetjük, melynek két alapköre egyenlő, és a kúpot oly csonka kúpnak, a melynek fedőlapja $= o$; azért a sokszög egyes oldalvonalai által leírt görbelapokat általában csonka kúplapoknak tekinthetjük.

73. ábra.



Vegyük szemügyre a de oldalt; vonjuk dg-t és eh-t merőlegesen af-re, felezzük de-t i pontban, kapcsoljuk össze i-t a sokszög középpontjával k-val, és legyen $im \perp af$-re és $el \perp dg$-re. A de oldal leírta lap területe f a föntebbiek szerint:

$$f = de \,.\, 2\, im \,.\, \pi.$$

Minthogy azonban $del \triangle \backsim kim \triangle$, tehát:

$$de : le = ki : mi, \text{ vagy :}$$

$$de \,.\, mi = le \,.\, ki, \text{ vagy :}$$

$$de \,.\, mi = gh \,.\, ki;$$

következőleg:

$$f = gh \,.\, 2\, ki \,.\, \pi.$$

És ha a beírt kör sugarát ki-t ρ-val jelöljük:

$$f = gh \,.\, 2\, \rho\, \pi.$$

A sokszög többi oldala által leírt görbelapokat illetőleg hasonló úton lesz:

$$f' = ng \,.\, 2\rho\pi$$

$$f'' = on \,.\, 2\rho\pi \text{ stb.;}$$

következőleg az összes felszín:

$$F = (gh + ng + on + \ldots)\; 2\rho\pi.$$

A zárójelben lévő összeg a forgási tengely hosszát af-et jelenti, tehát:

$$F = af \,.\, 2\rho\pi.$$

Épen úgy, ha a körbe írt sokszög kerületének csak egyik *része* (pl. cde) fordul meg af átmérő körül, a leírt görbelap területét megtaláljuk, ha *a beírt kör kerületét a sokszög kerület-részének a forgási tengelyen való vetületével* (nh-val) *megszorozzuk.*

2. *A gömb felszíne annyi, mint egyik fő körének négyszeres területe.*

Mert, ha a gömböt leíró félkörbe (73. ábra) valamely szabályos 2-n szög fél kerületét írjuk, az utóbbinak körülfordulásából származott görbelap területe:

$$F = af \,.\, 2\rho\pi = 2r \,.\, 2\rho\pi.$$

Itt r a körülírt, ρ a beírt kör sugarát jelenti. Minél több oldalú a sokszög, annál inkább megközelíti a körülírt kört és ennélfogva a sokszög alkotta görbelap is annál közelebb jut a gömblaphoz elannyira, hogy, ha a sokszög oldalait kellően szaporítjuk, a két görbe lap közötti különbség mindinkább elenyészik.

A gömb felszíne tehát a beírt forgási testek felszínének a határa, vagyis a beírt testek felszíne annál inkább közeledik a gömb felszínéhez, minél inkább szaporodik oldalaik száma. Ennélfogva a gömb felszíne: $2r \,.\, 2\rho\pi$-nek határértéke. Ámde $2\rho\pi$-nek határa $=$ a körülírt kör kerülete, vagyis $2r\pi$, a másik tényező $2r$ állandó, következőleg a gömb felszíne:

$$F = 2r \,.\, 2r\pi = 4r^2\pi.$$

Látni ebből, hogy: *két gömb felszíne úgy aránylik egymáshoz, mint az illető sugarak másodhatványai* (négyzetei).

3. *A gömblap egyes részeinek felszíne.*

a) A gömblapnak két párhuzamos sík közé foglalt részét *gömböv*-nek, a két síklap kölcsönös távolságát a gömböv magasságának mondjuk. Azon esetben, ha az egyik sík a gömböt érinti, a két sík közé foglalt görbe terület neve *gömbsüveg*. Így ha (73. ábra) $abcdef$ félkörnek de íve af átmérő körül megfordul, dg és eh egyenesek párhuzamos körlapokat, de ív pedig gömbövet ír le. Ha pedig ef ív fordul meg af körül, gömbsüveg keletkezik.

A gömböv felszínét megtaláljuk, ha a gömb főkörének kerületét a gömböv magasságával (m) szorozzuk, vagyis: $f = 2r\pi \,.\, m$.

Mert például a de végtelen kicsinynek vett egyenes forgása által (73. ábra) leírt gömböv felszíne oly csonkakúp palástjával vehető egyenlőnek, melynek oldalvonala $o = de$, felette kis magassága $m = le$ és így felszíne:

$$F = \frac{dg + eh}{2} \,.\, 2\pi \,.\, o.$$

Ha a $dehg$ trapéz középvonala mi, akkor:

$$\frac{dg + eh}{2} = mi,$$

tehát: $F = mi \,.\, 2\pi \,.\, o$. Minthogy $mik \triangle \backsim dle \triangle$-höz, azért:

$$o : m = r : mi,$$

s így:

$$mi = \frac{mr}{o},$$

és a *gömböv felszíne:*

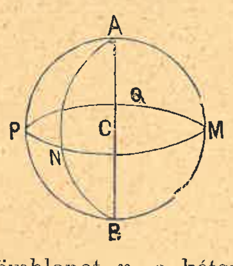
$$F = 2r\pi . m.$$

E képlet akkor is érvényes marad, ha a gömböv magassága véges érték, mert akkor a gömböv parallel síkokkal oly övekre bontható fel, melyek végtelen kicsiny magasságúak és amelyek felszíneinek összege a véges magasságú gömböv felszínét adja. Ámde ezen felszíneket kifejező képletekből $2r\pi$ kiemelhető s akkor a zárójelben maradó végtelen kis magasságok összege éppen a gömböv véges magasságát adja.

b) *A gömbsüveg felszínét úgy nyerjük, hogy a legnagyobb gömbkör kerületét megszorozzuk a gömbsüveg magasságával:* $F = 2r\pi . m$; ha r a gömb sugara, m a gömbsüveg magassága. A gömbsüveget alapjával párhuzamosan haladó síkok segítségével oly gömbövekre oszthatjuk fel, amelyek felszíneinek összege a gömbsüveg felszínét adja. Ha ezen gömbövek végtelen kis magasságai rendre: m_1, m_2, m_3, m_4 . . . ., akkor felszíneik: $2r\pi m_1$, $2r\pi m_2$ . . . ., ezek összege: $2r\pi(m_1 + m_2 + \ldots)$, ámde: $m_1 + m_2 + \ldots = m$, miáltal a tétel beigazolást nyert.

c) *A gömbkétszög területe úgy aránylik a gömb összes felszínéhez, mint a gömbkétszög szöge* (α) *négy derékszöghöz, vagy mint a gömbkétszög szögét mérő körív az egész kör kerületéhez.*

74. ábra.



Legyen $AMBNA$ (74. ábra) a kérdéses gömbkétszög. Tegyük föl, hogy MN ív, mely MAN gömbi szög mértékéül szolgál, a kör kerületével összemérhető; az egész kerületet t. i. n egyenlő részre osztván, MN ív m ily részt foglal magában. Továbbá fektessünk gondolatban minden osztóponton és AB átmérőn keresztül egy-egy síkot; ezáltal a gömblapot n, a kétszöget pedig m kisebb kétszögre osztjuk; e részek egybevágók lévén, $AMBNA$ gömbkétszög területe (f) úgy aránylik az egész gömb felszínéhez, (F)-hez, mint $m : n$; minthogy azonban:

$$MN \text{ ív} : MNPQ \text{ kerülethez} = m : n,$$

tehát:

$$f : F = MN \text{ ív} : MNPQ = \alpha : 4R.$$

Az esetben, ha MN ív és a kör kerülete összemérhetetlenek, a síkmértanból ismert okoskodással élve, *közvetve* kell a fentebbi aránylat helyességét bebizonyítanunk.

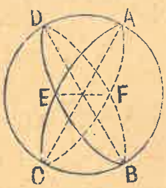
d) *A gömbkétszög felszíne.* Minthogy a gömbkétszög felszíne úgy aránylik a gömb fölszínéhez, mint a szöge (α) $4R$-hez, vagyis:

$$f : 4r^2\pi = \alpha^0 : 360^0,$$

$$\text{azért: } f = \frac{4r^2\pi \cdot \alpha^0}{360^0} = r^2\pi \frac{\alpha^0}{90^0}.$$

$$\text{Ha } r = 1, \text{ akkor } f = \frac{\alpha^0}{90^0} \cdot \pi$$

75. ábra.



e) *Közös szögpontú gömbháromszögek területe. Ha a gömb ABCD és AECF két fő körét* (75. ábra) *valamely harmadik DEBF fő kör lapjával átmetszük, a közös szögpontú AED és BEC háromszögek összes területe egyenlő az BEC szögnek megfelelő gömbkétszög területével.*

Mert, a szimmetrikus háromszögek közt:

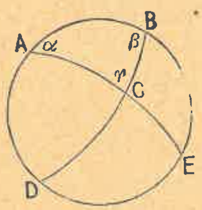
AED háromszög $= CFB$-vel, tehát:

$AED + BEC = CFB + BEC,$

vagyis: $AED + BEC = EBFCE$ gömbkétszög területével, melynek szöge: BEC.

f) *A gömbháromszög és a gömb felszinének aránya. A gömbháromszög felszíne úgy aránylik a gömbéhez, mint szögei összegének 2R-en felül vett fölöslege nyolc derékszöghöz.*

76. ábra.



Legyen ABC (76. ábra) a kérdéses gömbháromszög; egészítsük ki AB ívet teljes fő körré, továbbá hosszabbítsuk meg AC és BC íveket addig, míg az említett fő körrel másod ízben találkoznak. Látnivaló, hogy:

$ABC + BCE$ háromszög $= A$ gömbkétszöggel

$ABC + ACD$ « $= B$ «

és a föntebbi c) pontnál fogva:

$ABC + DCE$ háromszög $= C$ gömbkétszöggel; összeadva e három egyenletet, lesz:

3. $ABC + (BCE + ACD + DCE) = A + B + C$ kétszögek összegével.

Ámde: $ABC + BCE + ACD + DCE$ a félgömb felszinével, $^1/_2\, F$-el egyenlő, továbbá:

$$A \text{ kétszög} = \frac{\alpha}{4R} \cdot F;\quad B \text{ kétszög} = \frac{\beta}{4R} \cdot F;\quad C \text{ kétszög} = \frac{\gamma}{4R} \cdot F;$$

$$2 \,.\, ABC + {}^1/_2\, F = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{4R}\, F,$$

vagyis: $$2 \, . \, ABC = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4R} \, . \, F - {}^1/_2 \, F,$$

$$ABC = F \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2R}{8R} \right),$$

tehát: $$\frac{ABC}{F} = \frac{\alpha+\beta+\gamma-2R}{8R}.$$

A gömbháromszög felszíne tehát $(\alpha+\beta+\gamma) - 2R$ különbségtől függ, melyet gömbi, vagy szferikus *fölöslegnek* nevezünk.

g) *A gömbháromszög területe.* Minthogy a gömbháromszög területe *(f)* úgy aránylik a gömb felszínéhez, mint a szferikus fölösleg $8\,R$-hez, azért:

$$f : 4\,r^2\pi = (\alpha+\beta+\gamma-180^0) : 8\,R$$

következésképen:

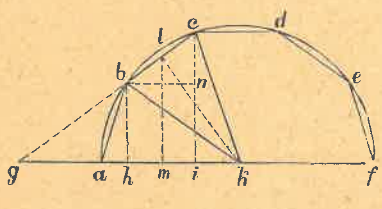
$$f = \frac{r^2\pi}{180^0} (\alpha+\beta+\gamma-180^0).$$

$$\text{Ha } r = 1, \; f = \frac{\pi}{180^0} (\alpha+\beta+\gamma-180^0),$$

minthogy $\frac{\pi}{180^0}$ nem egyéb, mint az 1^0-nyi ív hossza, ennélfogva az egységsugarú gömbön a *gömbháromszög területe annyi, mint ívmértékben kifejezett gömbi fölöslege.*

4. *Ha valamely szabályos $2n$-szöget a felező átmérő körül 360^0-nyira megforgatunk, a leírt forgási test köbtartalma annyi, mint a sokszögbe írt kör területének és a forgási tengely kétharmad hosszának szorzata.*

77. ábra.



Legyen *abcdef* (77. ábra) a szabályos $2n$-szög félkerülete, melyet *af* átmérő körül megforgatunk.

Mindenekelőtt határozzuk meg a *bck* középponti háromszög körülfordulásából származott test köbtartalmát, melyet röviden *(bck)*-val jelölünk.

Hosszabbítsuk meg *bc*-t *g*-ig, ahol a forgási tengelyt átmetszi, továbbá húzzuk meg *b* és *c* pontokból a tengelyre *bh* és *ci* merőlegeseket.

(bck) test térfogata annyi, mint a *gck* és *gbk* háromszögek körülforgásából eredő testek különbsége, azaz:

$$(bck) \text{ test} = (gck) \text{ test} - (gbk) \text{ test}.$$

Azonban:

$$(gck) \text{ test} = (gci) \text{ test} + (kci) \text{ test} =$$
$$= \tfrac{1}{3}\, ci^2 \pi .\, gi + \tfrac{1}{3}\, ci^2 \pi .\, ik =$$
$$= \tfrac{1}{3}\, ci^2 \pi .\, gk.$$

Továbbá:

$$(gbk) \text{ test} = (gbh) \text{ test} + (kbh) \text{ test} =$$
$$= \tfrac{1}{3}\, bh^2 \pi .\, gh + \tfrac{1}{3}\, bh^2 \pi .\, hk. =$$
$$= \tfrac{1}{3}\, bh^2 \pi .\, gk.$$

Tehát $(bck) \text{ test} = \tfrac{1}{3}\, ci^2 \pi .\, gk - \tfrac{1}{3}\, bh^2 \pi .\, gk =$

$$= \frac{\pi}{3}\, gk\, (ci^2 - bh^2).$$

Ámde $\overline{ci^2} - \overline{bh^2} = (ci + bh).\, (ci - bh)$; továbbá, ha bc oldal felező pontjából (l-böl) af-re lm merőlegest bocsátjuk és b ponton keresztül ugyanazon af-hez bn párhuzamost vonjuk:

$$(ci + bh) = 2.\, lm, \text{ és } (ci - bh) = cn, \text{ tehát:}$$
$$(\overline{ci^2} - \overline{bh^2}) = 2.\, lm.\, cn.$$

Következésképen:

$$(bck) \text{ test} = \tfrac{2}{3}\, \pi .\, gk.\, lm.\, cn.$$

Minthogy továbbá $glk \triangle \backsim bnc \triangle$ (miért?), tehát:

$$gk : lk = bc : cn \text{ és:}$$
$$gk.\, cn = lk.\, bc.:$$

Hasonló okból $lkm \triangle \backsim bcn \triangle$, tehát:

$$lk : lm = bc : bn \text{ és}$$
$$lk.\, bn = lm.\, bc.$$

Következőleg:

$$(bck) \text{ test} = \tfrac{2}{3}\, \pi .\; lk.\; lk.\; bn. = \tfrac{2}{3}\, \pi .\; \overline{lk^2}.bn =$$
$$= \tfrac{2}{3}\, lk^2 \pi .\; hi.$$

Azonban lk a sokszögbe írt kör sugara és $\overline{lk^2}.\,\pi$ ugyane kör területe; bn, vagy hi pedig nem egyéb, mint bc oldal vetülete a forgás tengelyen. Ennélfogva a bck háromszögnek körülfordulásából eredt test köbtartalmát megtaláljuk, ha a beírt kör területének $\tfrac{2}{3}$-át az illető oldalnak a forgási tengelyre vonatkozó vetületével megszorozzuk.

Ugyane szabály szerint határozzuk meg az (abk), (cdk), (dek) stb. forgási testek köbtartalmát is.

(cdk) testre nézve, hol $cd \parallel af$ tengellyel, ezt könnyü kimutatni; (abk)-ra nézve, a kifejtés valamivel hosszabb ugyan, de mégis egyszerübb, mint (bck) testre nézve.

Mindezen forgási testek összegéből származik, hogy:

$(abcdef)$ test térfogata $= \frac{2}{3}\overline{lk}^2\pi\ (ah + hi + ik + \ldots) =$
$= \frac{2}{3}\overline{lk}^2\pi \,.\, af,$

vagy, ha $lk = \rho$, úgy $abcdef = \frac{2}{3}\rho^2\pi \,.\, af.$

Látnivaló egyszersmind, hogy: *a szabályos* $2n$*-oldalú sokszög bármelyik cikkének* (például $bcdk$-nak) *a sokszöget felező átmérő körül való körülfordulásából származott test köbtartalmát is úgy találjuk meg hogy a beírt kör területének* $\frac{2}{3}$*-át az illető kerületrésznek* (bcd-nek) *a forgási tengelyen való vetületével megszorozzuk.*

5. *A gömb köbtartalmát megtaláljuk, ha felszínét a sugár harmadrészével megszorozzuk.*

Ugyanis, ha a félkörbe, amelynek körülforgásából a gömb származott, valamely szabályos $2n$-szögnek fél kerületét írjuk, az ennek körülfordulása által támadt test köbtartalma a föntebbiek szerint: $K = \frac{2}{3}\overline{lk}^2\pi \,.\, \overline{af}$, ahol $\overline{lk}$ a sokszögbe írt kör sugarát, $\overline{af}$ a forgási tengely hosszát jelenti.

Tudjuk továbbá, hogy a beírt sokszög annál közelebb simul a körhöz, következőleg K is annál kevésbbé különbözik a gömb térfogatától, minél több oldala van a sokszögnek. Minthogy pedig a kör és a beírt sokszög közt a különbséget a sokszög oldalainak kellő szaporítása által bármely parányi mennyiségnél lejebb szállíthatjuk, ennélfogva a gömb és az említett forgási test között lévő különbséget is oly parányivá tehetjük, amint akarjuk. Más szóval, a *gömb köbtartalma a beírt testek térfogatának*, vagyis $\frac{2}{3}\overline{lk}^2\pi \,.\, \overline{af}$ szorzatnak a határértéke; ámde $\overline{lk}$-nak határa a gömb sugara (r), af pedig állandóan $= 2r$, tehát:

a gömb köbtartalma: $\frac{2}{3}r^2\pi \,.\, 2r = \frac{4}{3}r^3\pi.$

E képlet szerint: a) *Két gömb térfogata úgy aránylik egymáshoz, mint sugaraik harmadik hatványai.*

b) *A gömb köbtartalma kétszer akkora, mint a vele egyenlő átmérőjű és magasságú kúpé* (vagyis azon kúpé, melynek alapja a gömb fő körével, magassága a gömb átmérőjével egyenlő). Ugyanis az ily kúp köbtartalma $\frac{1}{3}r^2\pi \,.\, 2r = \frac{2}{3}r^3\pi$, és ez a gömb térfogatának fele.

c) Továbbá: *a henger köbtartalma háromszor akkora, mint a vele egyenlő alapú és magasságú kúpé.*

Eszerint a szóbanforgó kúp, gömb és henger köbtartalma úgy aránylik egymáshoz, mint 1 : 2 : 3. (Ezen tételt Archimedes találta föl).

Az *üres gömb*, vagyis két koncentrikus gömblap által határolt test köbtartalmát úgy találjuk meg, hogy a külső gömb köbtartalmából kivonjuk a belső gömbét. Ha tehát R a külső, r a belső gömb sugara, úgy:

$$K = \frac{4}{3}\pi\,(R^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi\,(R - r)\,(R^2 + Rr + r^2).$$

6. *A gömb egyes részeinek köbtartalom-számítása.*

a) A gömb azon részét, mely egy körcikknek (pl. *akb*-nek a 77. ábrában) egyik határsugara *(ak)* körül történő fordulásából keletkezik, *gömbcikknek* (szektor) nevezzük. Ennek térfogatát akkép számítjuk ki, hogy a megfelelő gömbsüveg felszínét a gömbsugár $^1/_3$-val megszorozzuk, vagyis:

a gömbcikk köbtartalma: $= 2r\pi \,.\, m \,.\, \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}r^2\pi \,.\, m$, ahol m a gömbsüveg magasságát, r a gömb sugarát jelenti.

A föntebbi képletből látnivaló, hogy: *a gömbcikk köbtartalma oly kúp térfogatával ér föl, melynek alapja a gömbcikk süvegje, magassága a gömb sugara.*

b) Minden metszősíklap a gömböt két *szeletre* (szegmentum) osztja. Minden *gömbszeletnek* egy körlap és egy gömbsüveg a határa. Köbtartalmát nyilván úgy találjuk meg, hogy a megfelelő gömbcikk köbtartalmából kivonjuk azon kúp térfogatát, melynek alapja a gömbszelet alapköre, csúcsa a gömb középpontja.

A gömb sugarát r-rel, a gömbszelet alapkörének sugarát (*ci*-t a 77. ábrában) ρ-val, a gömbszelet magasságát (*ai*-t) m-mel jelölvén, a gömbszelet köbtartalma $= \frac{2}{3}r^2\pi \,.\, m - \frac{1}{3}(r - m)\rho^2\pi$.

Minthogy a síkmértan szerint:

$\overline{ci}^2 = \overline{ai} \,.\, \overline{if} = ai\;(af - ai)$, vagyis $\rho^2 = m\;(2r - m)$,

tehát, a gömbszelet köbtartalma $= \frac{2}{3}r^2\pi \,.\, m - \frac{1}{3}\pi\,(r - m)\,m\,(2r - m)$

$$= \tfrac{1}{3}\pi\left[2mr^2 - (r - m)\;(2mr - m^2)\right], \text{ tehát:}$$

$$\text{a gömbszelet köbtartalma} = \tfrac{1}{3}\pi m^2\;(3r - m), \qquad (\alpha)$$

vagy:

$$\text{a gömbszelet köbtartalma} = m^2\pi \,.\, r - \frac{m^3 . \pi}{3}.$$

Mit jelent $m^2\pi \,.\, r$ és mit $\dfrac{m^3\pi}{3}$, azaz $\dfrac{m}{3} \,.\, m^2\pi$?

Az imént ρ értékét r és m függvényeképen fejeztük ki; minthogy azonban r a gömbszeleten közvetlenül meg nem mérhető, célszerübb, ha megfordítva r értékét ρ és m által fejezzük ki. Ugyanis, *cik* $\triangle$ ben (77. ábra):

$\overline{ck}^2 = \overline{ci}^2 + \overline{ik}^2$, vagyis $r^2 = \rho^2 + (r - m)^2$

és ebből:

$$r = \frac{\rho^2 + m^2}{2m};$$

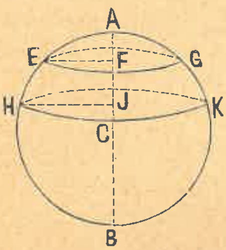
és ha a föntebbi (α) egyenletben r értékét helyettesítjük:

$$\text{a gömbszelet köbtartalma} := \frac{m\pi}{2}\left(\rho^2 + \frac{m^2}{3}\right), \text{ vagy:}$$

$$\text{a gömbszelet köbtartalma} = \tfrac{1}{2}\rho^2\pi \, . \, m + \frac{m^3\pi}{6} \ldots\ldots (\beta).$$

c) A gömbnek két párhuzamos körlap közé foglalt részét *gömbrétegnek* (korong) nevezzük; ilyen például az EFG és HJK (78. ábra) párhuzamos körök közé eső gömbrész.

78. ábra.



A gömbrétegen a két körlap átmérőjét (vagy sugarát) és a réteg magasságát mérhetjük meg. Ez adatokból köbtartalmát következőképen határozhatjuk meg. Minden gömbréteg két gömbszelet *különbsége* gyanánt tekinthető. Legyen a gömb sugara $AC = r$ (78. ábra), a kisebb gömbszelet magassága $AF = m_2$, a nagyobbiké $AJ = m_1$, a kisebb körlap sugara $EF = \rho_2$, a nagyobbiké $HJ = \rho_1$, a gömbréteg magassága $FJ = m$. Akkor a megelöző pontban kifejtett (α) egyenlet alapján a gömbréteg (K) köbtartalma:

$$K = \tfrac{1}{3}\pi m_1^2 (3r - m_1) - \tfrac{1}{3}\pi m_2^2 (3r - m_2),$$

$$= \pi\left[r(m_1^2 - m_2^2) - \tfrac{1}{3}(m_1^3 - m_2^3)\right];$$

vagy minthogy $m_1^2 - m_2^2 = (m_1 - m_2)(m_1 + m_2) = m(m_1 + m_2)$ és $m_1^3 - m_2^3 = (m_1 - m_2)(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2) = m(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)$,

$$\text{azért: } K = \pi m\left(m_1 r + m_2 r - \frac{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}{3}\right).$$

Minthogy: $\overline{EF}^2 = \overline{AF} \, . \, \overline{FB} = AF(AB - AF)$, vagyis:

$\rho_2^2 = m_2(2r - m_2)$ és szintúgy $\rho_1^2 = m_1(2r - m_1)$, vagy:

$$\rho_2^2 = 2rm_2 - m_2^2 \text{ és } \rho_1^2 = 2rm_1 - m_1^2,$$

$$\text{miből: } m_2 r = \frac{\rho_2^2 + m_2^2}{2} \text{ és } m_1 r = \frac{\rho_1^2 + m_1^2}{2};$$

$$\text{azért: } K = \pi m\left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 + m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi m}{6}\left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + m_1^2 - 2m_1 m_2 + m_1^2\right)$$

$$= \frac{\pi m}{6}\left[3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + (m_1 - m_2)^2\right], \text{ vagy:}$$

$$K = \frac{m\pi}{6}\left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + m^2\right).$$

Hetedik fejezet.

Gömbháromszög-mértan.

(Szferikus trigonometria.)

BEVEZETÉS.

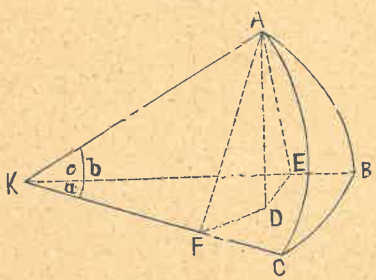
Amint a síkháromszögmértan az egyenes vonalú háromszög megfejtését tárgyalja, úgy a *gömbháromszög-mértan* a gömbháromszög megfejtésével foglalkozik, azaz a gömbháromszög három ismeretes alkotórészéből a többiek kiszámítására tanít.

Mindkettőnek alapja: a szögmértan. Lényegileg abban különböznek egymástól, hogy a gömbháromszög-mértanban kizárólag szögmértani számok (szögfüggvények) szerepelnek; ellenben a síkháromszög-mértanban nemcsak szögmérő, hanem hosszúsági számok is fordulnak elő. Ugyanis tudvalevő, hogy minden gömbháromszögnek egy háromélü testszög felel meg, amelynek csúcsa a gömb középpontja, és $\begin{matrix}\text{élszögei}\\\text{lapszögei}\end{matrix}$ a gömbháromszög megfelelő $\begin{matrix}\text{oldalaival}\\\text{szögeivel}\end{matrix}$ mértékre nézve tökéletesen megegyeznek. A gömbháromszög oldalai tehát oly *szögmérő* körívekül tekintendők, melyeknek sugaraik a hosszúság egységével egyenlők.

35. §. A gömbháromszög alapegyenletei.

Legyen ABC (79. ábra) valamely gömbháromszög. Oldalait a-, b-, c-vel, az utóbbiakkal szemben lévő szögeket pedig megfelelőleg α-, β- és γ-val jelöljük. A gömb középpontja: K, sugara: $AK = BK = CK = 1$. Eszerint a gömbháromszögnek megfelelő háromélü testszög: $K\ (ABC)$.

79. ábra.



Hogy a háromszög alkotórészei közt lévő kapcsolatot kifürkészhessük, A szögpontból BKC síkra AD merőlegest bocsátjuk, és ennek D talppontjából BK- és CK-ra DE és DF merőlegeseket vonjuk, azaz $DE \perp BK$, és $DF \perp CK$. Továbbá az E és F pontokat összekötjük A ponttal EA és FA egyenesekkel. Ily módon

ADE és ADF két derékszögű, egyenes vonalú háromszög keletkezik, amelyek a gömbháromszög β és γ szögét tartalmazzák.

Ugyanis DE egyenes nem egyéb, mint AE-nek vetülete KBC síkon; hasonlókép DF egyenes AF-nek vetülete ugyanazon a síkon. Minthogy BK sugár AE-nek vetületével derékszöget alkot, tehát, ismeretes tantételnél fogva, AE-vel is derékszöget alkot. Hasonlókép CK sugár is merőlegesen áll AF egyenesen. Ennélfogva AED szög csakugyan ABK és BKC síkok hajlási szöge, vagyis $AED \sphericalangle = \beta$. Épen úgy $AFD \sphericalangle = \gamma$.

Már most AED $\triangle$-ben:

$$AD = AE. \sin \beta,$$

ámde AEK $\triangle$-ben: $AE = \sin c$, mert $AK = 1$, tehát:

$$AD = \sin c \sin \beta.$$

Másrészt AFD $\triangle$-ben:

$$AD = AF. \sin \gamma,$$

és AFK $\triangle$-ben: $AF = \sin b$, tehát:

$$AD = \sin b \sin \gamma.$$

Következéskép:

$$\sin b. \sin \gamma = \sin c \sin \beta.$$

Az utóbbit még így is írhatjuk;

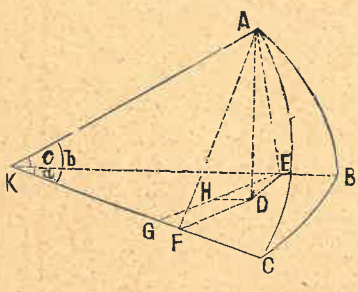
$$\sin b : \sin c = \sin \beta : \sin \gamma. \quad \text{I.}$$

Hasonlókép: $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$.

Összefoglalva: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$, azaz: *minden gömbháromszögben az oldalak sinusai a szemközt fekvő szögek sinusaival egyenlő arányúak.* (Sinus tantétel.)

Ezen tétel akkor is érvényes, ha az oldalak vagy szögek nagyobbak 90^0-nál.

80. ábra.



Húzzuk a 80. ábrában $EG \parallel DF$ és $DH \parallel CK$ egyeneseket. Minthogy: $FK = GK + FG$ (*)

és: $FK = AK. \cos b = \cos b$,

$GK = EK. \cos a$,

$EK = AK. \cos c = \cos c$,

tehát $GK = \cos a \cos c$,

továbbá: $FG = DH$,

ámde: $DH = DE. \sin DEH =$

$= DE. \sin a$ (miért?),

és $DE = AE.\cos\beta = AK.\sin c\cos\beta$,

vagyis $DE = \sin c\cos\beta$; tehát:

$DH = FG = \sin c\cos\beta\sin a$,

következőleg a (*) alatt található egyenletből lesz:

hasonlóképen:
$$\left.\begin{aligned}\cos b &= \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos\beta\\ \cos a &= \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha\\ \cos c &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma\end{aligned}\right\}\ \text{II.}$$

Ez a gömbháromszögtan második *fő* képlete, mely szerint: *minden gömbháromszögben bármely oldalnak cosinusa annyi, mint a másik két oldal cosinusainak szorzata, hozzá adva ehhez az utóbbi oldalok sinusainak és a közbefogott szög cosinusának szorzatát.*

Alkalmazzuk most e tételt a megfelelő *sarkháromszögre*, melynek alkotórészeit vesszővel megkülönböztetett betükkel jelöljük, akkor:

$$\cos a' = \cos b'\cos c' + \sin b'\sin c'\cos\alpha'$$
$$\cos b' = \cos a'\cos c' + \sin a'\sin c'\cos\beta'$$
$$\cos c' = \cos a'\cos b' + \sin a'\sin b'\cos\gamma'.$$

Minthogy a gömbháromszög és sarkháromszögének alkotórészei között a következő kapcsolatok állanak fent:

$$a' = 180^0 - \alpha,\ b' = 180^0 - \beta,\ c' = 180^0 - \gamma,$$
$$\alpha' = 180^0 - a,\ \beta' = 180^0 - b,\ \gamma' = 180^0 - c.$$

azért:

$$\cos(180^0 - \alpha) = \cos(180^0 - \beta).\cos(180^0 - \gamma) + \sin(180^0 - \beta).\sin(180^0 - \gamma).\cos(180^0 - a),$$

vagy:

$$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

és:

hasonlóképen:
$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a\\ \cos\beta &= -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b\\ \cos\gamma &= -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c\end{aligned}\right\}\ \text{III.}$$

Ez a háromszög-mértan III-dik főképlete. (Szavakkal kifejezve?)

Ha a II. számú egyenletek közül a $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$ egyenletbe $\cos c$ értékét a II. csoportbeli egyenletek közül a harmadikból helyettesítjük, úgy a müveletek végrehajtása és kellő összevonás után lesz:

$$\cos a\sin^2 b = \sin a\sin b\cos b\cos\gamma + \sin b\sin c\cos\alpha;$$

az utóbbi egyenletet $\sin a\ \sin b$-vel elosztván:

$$\cot g\, a\sin b = \cos b\cos\gamma + \frac{\sin c}{\sin a}\cos\alpha$$

és mert: $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$, következőleg:

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha \text{ vagy:}$$
$$\cos b \cos \gamma = \sin b \operatorname{cotg} a - \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha.$$

E képletet a betük kellő fölcserélésével hatféle módon irhatjuk fel, u. m.:

$$\left.\begin{array}{l}
\cos b \cos \gamma = \sin b \operatorname{cotg} a - \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha \\
\cos b \cos \alpha = \sin b \operatorname{cotg} c - \sin \alpha \operatorname{cotg} \gamma \\
\cos c \cos \alpha = \sin c \operatorname{cotg} b - \sin \alpha \operatorname{cotg} \beta \\
\cos c \cos \beta = \sin c \operatorname{cotg} a - \sin \beta \operatorname{cotg} \alpha \\
\cos a \cos \beta = \sin a \operatorname{cotg} c - \sin \beta \operatorname{cotg} \gamma \\
\cos a \cos \gamma = \sin a \operatorname{cotg} b - \sin \gamma \operatorname{cotg} \beta.
\end{array}\right\} \text{IV.}$$

Az I., II., III. és IV. alatt található egyenletek általánosak s így minden gömbháromszögre érvényesek.

36. §. A derékszögű gömbháromszögek megfejtése.

Minthogy a gömbháromszögben a szögek összege *két* és *hat* derékszög között váltakozhatik, ennélfogva a gömbháromszögnek nemcsak egy, hanem két, söt mind a három szöge is lehet derékszög.

Ha mind a három szög 90^0, az oldalak negyedkörök; ha két szög 90^0-nyi, akkor az ezekkel átellenes oldalak negyedkörök, a harmadik oldal pedig mértékére nézve megegyezik a szemben lévő szöggel. (Miért?) Az utóbbi esetekben tehát nincs mit számítani; ezért a derékszögü gömbháromszögek közül csak azokat tárgyaljuk, amelyekben *egy* derékszög van.

Minthogy a derékszögön ($\alpha = 90^0$) kívül még két alkotórésznek kell ismeretesnek lennie, önként következik, hogy a derékszögü gömbháromszögeket megfejtő egyenletek mindegyike három alkotórészt foglal magában; minthogy továbbá öt mennyiséget 10-féleképen lehet hármanként összekapcsolni, azért mindössze 10 egyenletet kell kifejtenünk. Ezeket a megelőző § *általános* képleteiből származtatjuk le. Evégből az idézett képletekben α-t 90^0-nyinak tesszük, akkor $\sin \alpha$ helyébe 1-et, $\cos \alpha$ helyébe 0-t és $\operatorname{cotg} \alpha$ helyett 0-t írunk.

Az I. alatt lévő második és harmadik aránypárból ekkor:

$$\sin b = \sin a \sin \beta. \quad (1)$$
$$\sin c = \sin a \sin \gamma. \quad (2)$$

A II. számú egyenletek középsőjéből:

$$\cos a = \cos b \cos c. \qquad (3)$$

A III. számú képletekből:

$$\cos a = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma. \qquad (4)$$

$$\cos \beta = \sin \gamma \cos b. \qquad (5)$$

$$\cos \gamma = \sin \beta \cos c. \qquad (6)$$

Végül a IV. számú képletekből:

$$\cos \gamma = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a. \qquad (7)$$

$$\sin b = \operatorname{cotg} \gamma \operatorname{tg} c. \qquad (8)$$

$$\sin c = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tg} b. \qquad (9)$$

$$\cos \beta = \operatorname{tg} c \operatorname{cotg} a. \qquad (10)$$

E 10 egyszerü és kényelmes egyenlet alapján *minden derékszögü gömbháromszög megfejthető.*

A szóban forgó egyenleteket hasonlóságuk miatt bajos volna emlékezetben megtartani; ezért *Napier* két egyszerü gyakorlati szabályt gondolt ki, amelyek segélyével a föntebbi 10 egyenletet minden nehézség nélkül azonnal leírhatjuk. Ugyanis, a derékszögü gömbháromszögben a derékszögön kívül öt alkotórész van; ezek közül az egyiket (pl. b-t) *középső*-nek és a közvetlenül mellette fekvő két részt (c-t és γ-t) *szomszédos* részeknek, a hátralévő két részt pedig nem szomszédos részeknek nevezhetjük és a föntebbi egyenleteket a következö két szabály által fejezhetjük ki, megjegyezvén, hogy *a befogók helyébe a megfelelő pótlószögek teendők.*

1. *Minden középsö rész cosinusa annyi, mint a két szomszédos rész cotangenseinek szorzata.* 2. *Minden középső rész cosinusa annyi, mint a két nem szomszédos rész sinusainak szorzata.*

E két szabály helyes, mert a föntebbi 10 egyenletre vezet.

A derékszögü háromszögek megfejtésénél a következő 6 eset fordul elö:

1. A derékszögön kívül ismeretes a két befogó: b és c
2. az átfogó a és egy befogó b;
3. egy befogó b és a vele szemközt lévő szög β;
4. egy befogó b és a mellette lévő szög γ;
5. az átfogó a és egy hegyes szög β;

6. a két hegyes szög β és γ; keressük minden egyes esetben a többi részeket. — A megfelelő képletek a következők:

Adott részek	Keresett részek	Megfejtő képletek
$\alpha = 90^0$, b, c	a β γ	$\cos a = \cos b \cos c$ $\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{cotg} b \sin c$ $\operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{cotg} c \sin b$
$\alpha = 90^0$, a, b	c β γ	$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$ $\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a}$ $\cos \gamma = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b$
$\alpha = 90^0$, b, β	a c γ	$\sin a = \frac{\sin b}{\sin \beta}$ $\sin c = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} \beta$ $\sin \gamma = \frac{\cos \beta}{\cos b}$
$\alpha = 90^0$, b, γ	a c β	$\operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} b \cos \gamma$ $\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} \gamma$ $\cos \beta = \cos b \sin \gamma$
$\alpha = 90^0$, a, β	b c γ	$\sin b = \sin a \sin \beta$ $\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos \beta$ $\operatorname{cotg} \gamma = \cos a \operatorname{tg} \beta$
$\alpha = 90^0$, β, γ	a b c	$\cos a = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma$ $\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}$ $\cos c = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}$

E hat eset közül a harmadik *kétes*. Ebben t. i. az átfogó a sinus-függvény által van meghatározva; ámde egyazon pozitiv sinusnak két különböző (egy hegyes, meg egy tompa) szög felel meg; ez esetben tehát — egyéb korlátoló körülmények hiányában — a megfejtés határozatlan, azaz két különböző háromszöget eredményez.

37. §, A gömbháromszögtan főképleteinek átalakítása.

A gömbháromszögtan főképletei közül csak a sinus-tétel alkalmas a logaritmusokkal való számításra; a többit e célra még át kell alakítani. Az átalakítások a síkháromszögmértani átalakítások mintája szerint néhány ismeretes szögmértani képlet segítségével, vagy valamely segédszög fölvételével végezhetők a következőképen:

1. *A gömbháromszög három adott oldalából határozzuk meg valamelyik szögét, pl. α-t.*

A II. számú képletnél fogva:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

A szögmértan szerint:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

helyettesítvén $\cos\alpha$-nak föntebbi értékét:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}}{2}}\quad\text{és,}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}}{2}},$$

vagy:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}{2\sin b\sin c}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{2\sin b\sin c}},$$

ámde a szögmértan ismert képleteinél fogva:

$$\cos b\cos c-\sin b\sin c=\cos(b+c),$$
$$\cos b\cos c+\sin b\sin c=\cos(b-c);$$

tehát:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\sin b\sin c}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\sin b\sin c}}.$$

Tudjuk továbbá, hogy:

$$\cos a-\cos(b+c)=2\sin\tfrac{1}{2}(b+c+a)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a),$$
$$\cos(b-c)-\cos a=2\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c),$$

következésképen:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2\sin\frac{1}{2}(b+c+a)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{2\sin b\sin c}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{2\sin b\sin c}}.$$

Rövidség okáért legyen:

$a+b+c=2s$, ebből folyólag:

$$b+c-a=2(s-a),$$
$$a+c-b=2(s-b),$$
$$a+b-c=2(s-c);$$

ekkor:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}.$$

Eszerint az α szög meghatározására két egyenletünk van. Hasonlókép erednek:

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}},$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}},$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}}.$$

2. *A gömbháromszög három adott szögéből számítsuk ki valamelyik oldalát, pl. a-t.*

A III) számú képletek elsejéből önként következik, hogy:

$$\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Ez egyenlet ép úgy alakítható át, mint az előbbi, az eredmény:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

Rövidség kedvéért $(\alpha+\beta+\gamma)$-t 2σ-val jelöljük, ekkor:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}.$$

Hasonlóképen:

$$\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}},$$

$$\sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\sin\gamma}},$$

$$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}},$$

$$\sin\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta}}.$$

3. *A gömbháromszögnek két oldalából* (pl. *b* és *c*-ből) *és a közbefogott szögből* (α-ból) *határozzuk meg a harmadik* a *oldalt.*

A keresett oldalt a következő egyenletből találjuk meg:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Az egyenlet jobb oldalán lévő kéttagú kifejezést *segédszög* fölvételével egytagúvá változtathatjuk. Evégből a föntebbi egyenletet ily alakban irjuk:

$$\cos a = \cos b (\cos c + tg\, b \sin c \cos \alpha).$$

Minthogy a *tangens függvény* minden érték felvételére képes, feltehetjük, hogy van olyan φ szög, melyre nézve:

$$tg\, b \cos \alpha = tg\, \varphi, \text{ ekkor:}$$

$$\cos a = \cos b (\cos c + \sin c\, tg\, \varphi) =$$

$$= \cos b \left(\cos c + \sin c \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right) =$$

$$= \cos b \frac{\cos c \cos \varphi + \sin c \sin \varphi}{\cos \varphi} =$$

$$= \cos b \frac{\cos (c - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

tehát: $\cos a = \dfrac{\cos b \cos (c - \varphi)}{\cos \varphi}$

ahol: $tg\, \varphi = tg\, b \cos \alpha.$

Hasonlóképen: $\cos b = \dfrac{\cos c \cos (a - \psi)}{\cos \psi}$

ahol: $tg\, \psi = tg\, c \cos \beta.$

stb.

4. *A gömbháromszög két ismeretes szögéből* (pl. α, β) *és a köztük fekvő oldalból* (c-*ből*) *határozzuk meg a harmadik* γ *szöget.*

A keresett szöget a következő egyenletből tudjuk meg:

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

A föntebbi módon:

$$\cos \gamma = \cos \alpha (-\cos \beta + tg\, \alpha \sin \beta \cos c.)$$

Legyen:

$$tg\, \alpha \cos c = cotg\, \varphi,$$

ekkor:

$$\cos \gamma = \cos \alpha (\sin \beta\, cotg\, \varphi - \cos \beta),$$

$$= \cos \alpha \left(\sin \beta \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \cos \beta\right),$$

$$= \cos \alpha \frac{\sin \beta \cos \varphi - \cos \beta \sin \varphi}{\sin \varphi},$$

$$= \cos \alpha \frac{\sin (\beta - \varphi)}{\sin \varphi};$$

tehát: $$\left.\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{\cos\alpha \sin(\beta-\varphi)}{\sin\varphi} \\ \text{és: } \operatorname{cotg}\varphi &= \operatorname{tg}\alpha \cos c. \end{aligned}\right\}$$

5. *A gömbháromszög két oldalából* (pl. *a*- és *b*-ből) *és egy átellenes szögből* (pl. α-ból) *számítsuk ki a harmadik oldalt.*

A 3. pontban nyert formulából:

$$\left.\begin{aligned} \cos(c-\varphi) &= \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b} \\ \text{és } \operatorname{tg}\varphi &= \operatorname{tg} b \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

6. *A gömbháromszög két szögéből* (α- és γ-ból) *és az átellenes oldalak egyikéből* (*c*-ből) *keressük a harmadik* β *szöget.*

A 4. pontban talált képletből:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\beta-\varphi) &= \frac{\cos\gamma \sin\varphi}{\cos\alpha} \\ \text{és } \operatorname{cotg}\varphi &= \operatorname{tg}\alpha \cos c. \end{aligned}\right\}$$

7. *A gömbháromszög két oldalából és a szemközt lévő szögek egyikéből számítsuk ki a közbefogott szöget.*

Legyen adva *a*, *b* oldal és α szög. γ-t megtaláljuk a IV. képlet nyomán a következő egyenletből:

$$\cos b \cos\gamma = \sin b \operatorname{cotg} a - \sin\gamma \operatorname{cotg}\alpha.$$

Ebből: $$\cos b \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{cotg}\alpha = \sin b \operatorname{cotg} a, \text{ vagy:}$$

$$\cos b\left[\cos\gamma + \sin\gamma \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos b}\right] = \sin b \operatorname{cotg} a.$$

Legyen ebben $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{\cos b} = \operatorname{cotg}\varphi$, akkor:

$$\cos b(\cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{cotg}\varphi) = \sin b \operatorname{cotg} a,$$

$$\cos b \frac{\sin\varphi \cos\gamma + \cos\varphi \sin\gamma}{\sin\varphi} = \sin b \operatorname{cotg} a,$$

$$\cos b \frac{\sin(\gamma+\varphi)}{\sin\varphi} = \sin b \operatorname{cotg} a; \text{ tehát:}$$

$$\sin(\gamma+\varphi) = \frac{\sin b}{\cos b} \operatorname{cotg} a \sin\varphi,$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\gamma+\varphi) &= \frac{\operatorname{tg} b \sin\varphi}{\operatorname{tg} a} = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a \sin\varphi \\ \text{és } \operatorname{tg}\varphi &= \cos b \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right\}$$

8. *A gömbháromszög két szögéből és a szemközt lévő oldalak egyikéből határozzuk meg a közbeeső oldalt.*

Ismeretes α és β szög és *a* oldal; keressük *c* oldalt.

A IV. képlet szerint:

$$\cos c \cos \beta = \sin c \operatorname{cotg} a - \sin \beta \operatorname{cotg} \alpha, \text{ tehát:}$$

$$\sin \beta \operatorname{cotg} \alpha = \sin c \operatorname{cotg} a - \cos c \cos \beta, \textit{ vagy}:$$

$$\sin \beta \operatorname{cotg} \alpha = \cos \beta \left[\sin c \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos \beta} - \cos c \right]$$

Legyen ebben $\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos \beta} = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, akkor:

$$\sin \beta \operatorname{cotg} \alpha = \cos \beta \left[\sin c \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \cos c \right]$$

$$= \cos \beta \frac{\sin c \cos \varphi - \cos c \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

$$= \cos \beta \frac{\sin (c - \varphi)}{\sin \varphi}$$

Következésképen:

$$\left. \begin{aligned} &\sin (c - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \beta \sin \varphi}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \beta \operatorname{cotg} \alpha \sin \varphi \\ &\text{és } \operatorname{tg} \varphi = \cos \beta \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\}$$

38. §. A Delambre- v. Gauss-féle képletek és a Napier-féle analogiák.

A megelözö cikk első hat egyenletéből nevezetes képletek származtathatók, melyek a gömbháromszög mind a hat alkotórészét magukban foglalják és gyakorlati számításokra igen előnyösen alkalmazhatók.

A szögmértan egyik ismeretes formulája szerint:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}.$$

Helyettesítsük itt $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\beta}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\beta}{2}$ értékét, az előbbi §-ból lesz:

$$\sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - b)}{\sin a \sin c}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}} \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - c)}{\sin a \sin c}} =$$

$$= \frac{\sin (s - b) + \sin (s - a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - c)}{\sin a \sin b}}.$$

Ámde az utóbbi gyökmennyiség nem egyéb, mint $cos\,\frac{\gamma}{2}$, tehát:

$$sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{sin\,(s-a)+sin\,(s-b)}{sin\,c}\,cos\,\frac{\gamma}{2};$$

továbbá $sin\,(s-a)+sin\,(s-b)$ összeget szorzattá változtatva:

$$sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{2\,sin\,\frac{1}{2}(2s-a-b)\,cos\,\frac{1}{2}(a-b)}{2\,sin\,\frac{c}{2}\,cos\,\frac{c}{2}}\,cos\,\frac{\gamma}{2};$$

minthogy: $2s=a+b+c$, tehát:

$$sin\,\tfrac{1}{2}(2s-a-b)=sin\,\frac{c}{2};$$

ezen értéket helyettesítve és kellően rövidítve, lesz:

$$sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{cos\,\frac{1}{2}(a-b)}{cos\,\frac{c}{2}}\,cos\,\frac{\gamma}{2}. \qquad (1)$$

Hasonlókép ered a következő képletből:

$$sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=sin\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}-cos\,\frac{\alpha}{2}\,sin\,\frac{\beta}{2},$$

az értékek helyettesítése következtében:

$$sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{sin\,\frac{1}{2}(a-b)}{sin\,\frac{c}{2}}\,cos\,\frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

Továbbá helyettesítsük a szögmértan eme képletében:

$$cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}-sin\,\frac{\alpha}{2}\,sin\,\frac{\beta}{2}$$

$cos\,\frac{\alpha}{2}$, $cos\,\frac{\beta}{2}$, $sin\,\frac{\alpha}{2}$, és $sin\,\frac{\beta}{2}$, értékét a 37. §. 1. pontjából, akkor:

$$cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\sqrt{\frac{sin\,s\,sin\,(s-a)}{sin\,b\,sin\,c}}\sqrt{\frac{sin\,s\,sin\,(s-b)}{sin\,a\,sin\,c}}-$$

$$-\sqrt{\frac{sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,b\,sin\,c}}\sqrt{\frac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-c)}{sin\,a\,sin\,c}}$$

$$=\frac{sin\,s-sin\,(s-c)}{sin\,c}.\sqrt{\frac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)}{sin\,a\,sin\,b}}.$$

Az utóbbi gyökmennyiség $=sin\,\frac{\gamma}{2}$, tehát:

$$cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{sin\,s-sin\,(s-c)}{sin\,c}.\,sin\,\frac{\gamma}{2}.$$

A számlálót ismét szorzat alakjában fejezzük ki ekképen:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{2\cos\tfrac{1}{2}(2s-c)\sin\frac{c}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2},$$

vagy:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (3)$$

Szintúgy ered $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$-nak képletéből:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (4)$$

A föntebbi (1—4) képleteket *Delambre* francia mérnök találta föl; azokat igy is irhatjuk:

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{c}{2}&=\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}\\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{c}{2}&=\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}\\
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{c}{2}&=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}\\
\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{c}{2}&=\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}\right.$$

A háromszög alkotórészeinek ciklikus felcserélése révén még nyolc ilyen egyenletet nyerünk.

Gyakorlati fontosságukat *Gauss Frigyes* mutatta ki; ezért a németek Gauss-féle képleteknek nevezik.

Ha ez egyenletekből $\frac{c}{2}$-t vagy $\frac{\gamma}{2}$-t kirekesztjük, 4 új egyenlet származik, melyek a háromszögnek csak 5 alkotórészét tartalmazzák.

Jelesen, ha az előbb nyert egyenletek közül az elsőt a 2-ikkal, a 2-ikat a 4-ikkel osztjuk, következő két egyenlet keletkezik:

$$tg\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}\cdot cotg\frac{\gamma}{2}$$

$$tg\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b)}\cdot cotg\frac{\gamma}{2}$$

Ellenben, ha γ-t küszöböljük ki, azaz az utolsó egyenletet elosztjuk az előtte állóval és a 2-ikat az elsövel, ismét két új egyenlet származik, u. m.:

$$tg\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot tg\frac{c}{2},$$

$$tg\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot tg\frac{c}{2}.$$

A háromszög alkotórészeinek ciklikus felcserélése révén még nyolc ilyen egyenletet nyerünk.

Ezeket *Napier*-féle analogiáknak nevezzük és ezek alapján két oldalból és a közbefoglalt szögből a másik két szöget, vagy két szögből és a közbeeső oldalból a másik két oldalt kiszámíthatjuk.

39. §. A ferdeszögű gömbháromszögek megfejtése.

Az eddigi képletek alapján bármely gömbháromszög megfejthető. A főesetek a következők:

I. *A gömbháromszög három oldalából keressük a szögeket.*

Itt a 37. §. 1. pontjában talált képleteket alkalmazhatjuk. Azonban pontosabb eredményre teszünk szert, ha a sinus és cosinus helyett a tangens függvényt használjuk. Ugyanis az idézett képletekből osztás által a következő egyenletek származnak;

$$\left.\begin{aligned} tg\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-a)}}, \\ tg\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-b)}}, \\ tg\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,\sin(s-b)}{\sin s\,\sin(s-c)}}. \end{aligned}\right\} \quad \text{ezekben: } 2s = a + b + c.$$

Példa. Valamely gömbháromszög oldalai: $a = 70^0\ 23'\ 42''$, $b = 48^0\ 24'\ 16''$, $c = 59^0\ 38'\ 27''$; mekkorák a szögek?

a	$70^0\ 23'\ 42''$
b	$48^0\ 24'\ 16''$
c	$59^0\ 38'\ 27''$
$2s=$	$178^0\ 26'\ 25''$

s	$89^0\ 13'\ 13''$
$s-a$	$18^0\ 49'\ 31''$
$s-b$	$40^0\ 48'\ 57''$
$s-c$	$28^0\ 34'\ 46''$

$log\ sin\ (s-b)$	9·81534—10
$log\ sin\ (s-c)$	9·69340—10
	9·50874—10
	9·50874—10
	— +
	0·00000 : 2
$og\ tg\ \frac{1}{2}\alpha$	0·00000
$og\ sin\ (s-a)$	9·50878—10
$log\ sin\ (s-c)$	9·69340—10
	19·20218—20
	9·81530—10
	— +
	19·38688—20 : 2
$log\ tg\ \frac{1}{2}\beta$	9·69344—10

$log\ sin\ s$	9·99996—10
$log\ sin\ (s-a)$	9·50878—10
	9·40874—10

$\frac{1}{2}\alpha = 45^0$

$\alpha = 90^0.$

$log\ sin\ s$	9·99996—10
$log\ sin\ (s-b)$	9·81534—10
	9·81530—10

$\frac{1}{2}\beta = 26^0\ 16'\ 28''$

$\beta = 52^0\ 32'\ 56''$

$\gamma = 66^0\ 20'\ 40$

Hasonlókép........

II. *Három adott szögből számítsuk ki a gömbháromszög oldalait.*

A keresett oldalak a 37. §. 2. pontjának a képletei segítségével számíthatók ki. Azonban lehet az előbbi mód szerint a tangensre áttérni és a következő képleteket alkalmazni:

$$tg\,\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\,\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\,\cos(\sigma-\gamma)}},$$

$$tg\,\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\,\cos(\sigma-\beta)}{\cos(\sigma-\alpha)\,\cos(\sigma-\gamma)}}.\qquad \text{stb.}$$

Példa. Valamely gömbháromszögben a szögek: $\alpha = 130^0\ 48'$, $\beta = 60^0\ 27'\ 10''$ és $\gamma = 48^0\ 16'\ 50''$; mekkorák az oldalak?

α	$130^0\ 48'$	$\sigma =$	$119^0\ 46'$
β	$60^0\ 27'\ 10''$	$\sigma-\alpha = -$	$11^0\ 2'$
γ	$48^0\ 16'\ 50''$	$\sigma-\beta =$	$59^0\ 18'\ 50''$
2σ	$239^0\ 32'$	$\sigma-\gamma =$	$71^0\ 29'\ 10''$

$log\ (-\cos\sigma)$	9·69589—10	$log\ \cos(\sigma-\beta)$	9·70785—10
$log\ \cos(\sigma-\alpha)$	9·99190—10	$log\ \cos(\sigma-\gamma)$	9·50179—10
	9·68779—10		9·20964—10
	9·20964—10		
	— +		
	0·47815 : 2		$\frac{1}{2}\alpha = 60^0\ 1'\ 46''$
$log\ tg\ \frac{1}{2}\ a$	0·23907		$\alpha = 120^0\ 3'\ 32''$

Hasonlólag: $b = 84^0\ 4'\ 40''$ és $c = 58^0\ 35'\ 5''$

III. *Két oldalból és a közbefogott szögből számítsuk ki a gömbháromszög többi alkotórészét.*

A megadott részek: a, b és γ. Az ismeretlen szögeket Napier képletei segítségével határozzuk meg.

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,cotg\,\frac{\gamma}{2},$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\,cotg\,\frac{\gamma}{2}.$$

Ismeretes lévén $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ és $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, α és β szögek meghatározhatók.

A harmadik oldal kiszámítására a Gauss-féle egyenletek valamelyikét alkalmazhatjuk, például:

$$\cos\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\sin\frac{\gamma}{2},$$

vagy Napier analógiái közül a harmadikat vagy negyediket.

Azonban c oldalt közvetlenül az adott részekből is kiszámíthatjuk, mégpedig a 37. §. 3. pontjában talált egyenlet segítségével, melyszerint:

$$\left.\begin{array}{l} \cos c = \dfrac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi} \\ \text{és } tg\, \varphi = tg\, a \cos \gamma. \end{array}\right\}$$

Példa. Valamely gömbháromszögben: $a = 112^0\ 28'$, $b = 48^0\ 40'$ és $\gamma = 76^0\ 38'\ 20''$; keresteinek a többi részek.

a	$112^0\ 28'$
b	$48^0\ 40'$
$a+b$	$161^0\ 8'$
$a-b$	$63^0\ 48'$
$\frac{1}{2}(a+b)$	$80^0\ 34'$
$\frac{1}{2}(a-b)$	$31^0\ 54'$
$\frac{1}{2}\gamma$	$38^0\ 19'\ 10''$
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	$81^0\ 19'\ 30''$
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	$34^0\ 7'\ 47''$
α	$115^0\ 27'\ 17''$
β	$47^0\ 11'\ 43''$

$log\ cos\ \frac{1}{2}(a+b)$	9·21428—10
$log\ cos\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	9·17848—10
	— +
	0·63610
$log\ sin\ \frac{1}{2}\gamma$	9·79243—10
$log\ cos\ \frac{1}{2}c$	9·82853—10

$log\ cos\ \frac{1}{2}(a-b)$	9·92889—10
$log\ cos\ \frac{1}{2}(a+b)$	9·21458—10
	— +
	0·71431
$log\ cotg\ \frac{1}{2}\gamma$	0·10221
$log\ tg\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	0·81652
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	$81^0\ 19'\ 30''$
$log\ sin\ \frac{1}{2}(a-b)$	9·72299—10
$log\ sin\ \frac{1}{2}(a+b)$	9·99409—10
	— +
	9·72890—10
$log\ cotg\ \frac{1}{2}\gamma$	0·10221
$log\ tg\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	9·83111—10
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	$33^0\ 7'\ 47''$

$\frac{1}{2}c = 47^0\ 38'\ 20''$

$c = 95^0\ 16'\ 40''$

IV. *Két ismeretes szögből és a köztük fekvő oldalból számítsuk ki a gömbháromszög többi részét.*

Az adott részek legyenek α, β és c. Az ismeretlen oldalakat Napier analogiái segitségével tudhatjuk meg, ugyanis:

$$tg\ \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}\ tg\ \frac{c}{2},$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}\ tg\ \frac{c}{2}.$$

Miután az oldalak fél összegét és különbségét meghatároztuk, magát a-t és b t is könnyen kiszámíthatjuk. A 3-ik γ szöget ismét a Gauss-féle egyenletek valamelyikéből határozhatjuk meg. Például:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(a - b)} \cos \frac{c}{2}.$$

Azonban a Napier-féle analogiák elseje vagy másodika is szolgálhat e célra.

Végül γ szöget közvetlenül az adott alkotórészekből is kiszámíthatjuk a 37. § 4. pontjában kifejtett képlet nyomán. Ugyanis:

$$\left.\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{\cos\alpha \sin(\beta-\varphi)}{\sin\varphi}, \\ \text{itt: } \operatorname{cotg}\varphi &= \operatorname{tg}\alpha \cos c. \end{aligned}\right\}$$

Például. Valamely gömbháromszögben: $\alpha = 95^0\ 34'$, $\beta = 60^0\ 14'\ 30''$ és $c = 130^0\ 27'$; mekkora a γ szög;

Itt a keresett szöget *közvetlenül* fogjuk kiszámítani (a legutóbbi képlet alapján).

$\log \operatorname{tg}\alpha$	1·01116 (n)	
$\log\cos c$	9·81210—10 (n)	$\varphi = 8^0\ 32'\ 36''$
$\log \operatorname{cotg}\varphi$	0·82326	$\beta-\varphi = 51^0\ 41'\ 54''$
$\log\cos\alpha$	8·98679—10 (n)	
$\log\sin(\beta-\varphi)$	9·89473—10	
	8·88152—10	
$\log\sin\varphi$	9·17189—10 (n)	
	— +	$180^0-\gamma = 59^0\ 10'\ 30''$
$\log\cos\gamma$	9.70963—10 (n)	$\gamma = 120^0\ 49'\ 30''$

V. *A gömbháromszög két oldalából és a velük szemben lévő szögek egyikéből számítsuk ki a többi három részt.*

Az adott részek a, b és α.

A b-vel szemközt fekvő β szöget a sinus tétel segítségével tudhatjuk meg, melynélfogva:

$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}.$$

γ szög és c oldal a Napier-féle analogiák nyomán nyerhetők, ugyanis:

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \text{ vagy:}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

és:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b), \text{ vagy:}$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b).$$

γ szög *közvetlenül* is meghatározható a 37. §. 7. pontjának a képlete segítségével, melyszerint

$$\sin(\gamma+\varphi) = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a \sin\varphi,$$

ahol φ segédszögre nézve ezen egyenlet áll:

$$\operatorname{tg}\varphi = \cos b \operatorname{tg}\alpha.$$

Hasonlóképen c oldalt is közvetlenül kiszámíthatjuk az ugyanazon §. (5.) pontjában talált képlet alapján; t. i.:

$$\cos(c-\varphi)=\frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b},$$

ahol előbb φ segédszöget kell meghatározni a következő egyenletből:

$$tg\,\varphi = tg\,b \cos\alpha.$$

Minthogy β értékét a *sinus*-ból nyertük, a megfejtés kétértelmü, azaz β-nak két értéke van, az egyik hegyes- a másik tompaszög. Mindazáltal vannak esetek, midőn e kétértelmüség bizonyos korlátoló körülmények folytán megszünik. Mielőtt ezen eseteket tüzetesen tárgyalnók, a gömbháromszögek egy fontos és általános tulajdonságát kell megemlítenünk, melyet legegyszerübben a Gauss-féle képletekből lehet levezetni. Ismerjük a következő képletet:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{c}{2}=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ezen egyenletben úgy c, mint γ kisebb 180^0-nál, következésképp $\cos\frac{c}{2}$ és $\sin\frac{\gamma}{2}$ pozitiv mennyiségek, és ennek következtében $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$-nak és $\cos\frac{1}{2}(a+b)$-nek szükségkép ugyanazon előjelük van. Ebből azután önként következik, hogy: ha $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\lesseqgtr 90^0$-nál, megfelelőleg: $\frac{1}{2}(a+b)\lesseqgtr 90^0$-nál, vagy, ha $\alpha+\beta\lesseqgtr 180^0$-nál, megfelelőleg $(a+b)\lesseqgtr 180^0$-nál; szavakkal kifejezve: *ha valamely gömbháromszögben két szög összege kisebb (nagyobb) 180°-nál, a megfelelő két átellenes oldal összege is kisebb (illetőleg nagyobb) 180°-nál.*

Előfordulhatnak pedig a következő esetek:

1. Legyen $a+b=180^0$. Ezen esetben a mondottaknál fogva: $\alpha+\beta=180^0$, következőleg $\beta=180^0-\alpha$, tehát β-nak csak *egy* értéke lehet, azaz a szóban forgó háromszög *teljesen* meg van határozva.

2. Legyen $a+b<180^0$-nál. Ez esetben $\alpha+\beta$ is $<180^0$-nál, emellett lehet:

A) $\alpha=90^0$; ezen esetben: $\beta<90^0$,

B) $\alpha>90^0$; ekkor ismét: $\beta<90^0$,

C) $\alpha<90^0$; itt már $\beta \gtrless$ lehet 90^0-nál.

Az utóbbi esetben tehát β értéke határozatlan; de még itt is két alsóbb rendü esetet lehet megkülönböztetni. T. i. a oldal vagy $>$ vagy $<b$-nél.

m) $a \geqq b$; ekkor α is $=$, illetőleg $>\beta$-nál; tehát a föltétel következtében, melyszerint $\alpha+\beta<180^0$, és $\alpha<90^0$-nál, β-nak okvetlenül kisebbnek kell lennie 90^0-nál.

n) $a<b$; ezen esetben β nagyobb, vagy kisebb lehet 90^0-nál, azaz *két* különböző háromszög van, mindkettő magában foglalván a, b és α alkotórészeket.

3. Legyen $a+b>180^0$-nál. Ekkor $\alpha+\beta$ szintén $>180^0$-nál. Továbbá:

A) $\alpha=90^0$; ezen esetben $\beta>90^0$-nál.

B) $\alpha<90^0$; ekkor is $\beta>90^0$-nál.

C) $\alpha>90^0$; itt már $\beta \gtrless$ lehet 90^0-nál.

Az utóbbi esetben megint meg kell vizsgálnunk, vajjon a oldal $\leqq$ vagy $>$ b-nél.

m) a $\leqq b$. Ez esetben α szög is megfelelőleg $\leqq\beta$, tehát a föltétel következtében, melyszerint $\alpha+\beta>180^0$-nál és $\alpha>90^0$-nál, β szögnek is nagyobbnak kell lenni 90^0-nál.

n) $a>b$. Itt $\alpha>\beta$-nál; minthogy pedig $\alpha>90^0$, β nagyobb is, kisebb is lehet 90^0-nál, azaz ebben az esetben a háromszögnek két különböző megfejtése van.

Példa. Legyen $a=73^0\,48'$, $b=112^0\,16'$ és $\alpha=41^0\,25'\,20''$; mekkora β, γ és c?

log sin b	9·96634—10
log sin a	9·82060—10
	9·78694—10
log sin a	9·98240—10
	— +
log sin β	9·80454—10

minthogy itt $a+b>180^0$-nál és $\alpha<90^0$, tehát a föntebbiek szerint $\beta>90^0$-nál, azaz $\beta=140^0\,23'\,17''$.

γ szöget és c oldalt a Napier-féle képletek alapján számítjuk.

b	112° 16′
a	73° 48′
$b+a$	186° 4′
$b-a$	38° 28′
tehát: $\frac{1}{2}(b+a)$	93° 2′
$\frac{1}{2}(b-a)$	19° 14″
$log\ cos\ \frac{1}{2}(a+b)$	8·72359—10 (*n*)
$log\ tg\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	1·80130—10 (*n*)
	10·52489—20
$log\ cos\ \frac{1}{2}(b-a)$	9·97506—10
$log\ cotg\ \frac{1}{2}\gamma$	0·54983
$\frac{1}{2}\gamma$	15° 44′ 45″
γ	31° 29′ 30″

β	140° 23′ 17″
α	41° 25′ 20″
$\beta+\alpha$	181° 48′ 37″
$\beta-\alpha$	98° 57′ 57″
$\frac{1}{2}(\beta+\alpha)$	90° 54′ 19″
$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$	49° 28′ 59″
$log\ cos\ \frac{1}{2}(\beta+\alpha)$	8·19864—10 (*n*)
$log\ tg\ \frac{1}{2}(b+a)$	1·27580 (*n*)
	9·47444—10
$log\ cos\ \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$	9·81269—10
$log\ tg\ \frac{1}{2}c$	9·66175—10
$\frac{1}{2}c$	24° 39′ 7″
c	49° 18′ 14″

VI. Két szögből és a szemközt fekvő oldalak egyikéből keressük a gömbháromszög többi részét.

Nevezzük az adott részeket α-, β- és a-nak; b oldalt a sinustétel alapján tudjuk meg, t. i.:

$$\sin b = \frac{\sin\beta \sin a}{\sin\alpha}$$

Minthogy itt b sinus-függvényben van meghatározva, a nevezett oldalnak *két* értéke van, és a föladat *kétfélekép* fejthető meg. Azonban vannak esetek, mikor csak egy megfejtésnek van helye. Először is tekintetbe veendő az V. pontban tett megjegyzés, melyszerint, ha $\alpha+\beta \gtreqless 180^0$-nál, akkor megfelelőleg $a+b \gtreqless 180^0$.

Már most lehet, hogy:

1. $\alpha+\beta = 180^0$. Ezen esetben $a+b=180^0$, következőleg $b=180^0-a$; tehát b-nek csak *egy* értéke van.

2. $\alpha+\beta < 180^0$-nál. Most, ha:

A) $a=90^0$, ez esetben $b<90^0$-nál,

B) $a>90^0$, itt is $b<90^0$-nál,

C) $a<90^0$, ekkor már $b \lesseqgtr$ lehet 90^0-nál.

Az utóbbi eset, mely egyelőre kétesnek látszik, két alsóbb rendü esetet foglal magában, ugyanis $\alpha \geqq$ vagy $<\beta$-nál.

m) $\alpha \geqq \beta$. Ekkor a oldal is megfelelőleg $\geqq b$; azonban a föltétel szerint $a<90^0$-nál, tehát b-nek is kisebbnek kell lennie 90^0-nál.

n) $\alpha<\beta$. Ez esetben $a<b$-nél, és mert $a<90^0$-nál, $b \gtrless$ lehet 90^0-nál, azaz a föladatnak két különböző háromszög felel meg.

3. Legyen $\alpha+\beta>180^0$-nál. Ekkor $a+b$ is $>180^0$-nál, továbbá, ha:

A) $a=90^0$; akkor $b>90^0$-nál,

B) $a<90^0$; akkor $b>90^0$-nál,

C) $a>90^0$; itt már b $\gtrless$ lehet 90^0-nál.

Az utóbbi (C) esetben meg kell vizsgálnunk, vajjon $\alpha \leqq$, vagy $>\beta$-nál.

m) $\alpha \leqq \beta$. Ez esetben $a \leqq b$; és mert $a>90^0$-nál, azért b-nek is nagyobbnak kell lenni 90^0-nál.

n) $\alpha > \beta$. Itt $a > b$-nél; azonban a föltétel szerint $a > 90^0$-nál, következéskép $b \gtrless$ lehet 90^0-nál, tehát a jelen esetben az adott részekből két különböző háromszög szerkeszthető.

A c oldalt és γ szöget a Napier-féle analogiák alapján számítjuk ki. T. i.:

$$tg\frac{c}{2} = \frac{cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{cos\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\,tg\,\tfrac{1}{2}(a+b) =$$

$$= \frac{sin\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{sin\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\,tg\,\tfrac{1}{2}(a-b).$$

$$tg\frac{c}{2} = \frac{cos\,\frac{1}{2}(a-b)}{cos\,\frac{1}{2}(a+b)}\,cotg\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{sin\,\frac{1}{2}(a-b)}{sin\,\frac{1}{2}(a+b)}\,cotg\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Különben c oldal közvetlenül az adott részekből is kiszámítható, az előbbi §. utolsó képletei alapján:

$$sin\,(c-\varphi) = tg\,\beta\,cotg\,\alpha\,sin\,\varphi;$$

$$\text{itt: } tg\,\varphi = cos\,\beta\,tg\,\alpha.$$

Hasonlókép γ szög is közvetlenül kiszámítható a 37. §. 1. pontja alapján. Azonban kényelmesebb a Napier-féle analogiák felhasználásával.

Példa. $\alpha = 92^0\,1'\,10''$, $\beta = 60^0$, $a = 45^0$.

$log\ sin\ \beta$	$9{\cdot}93753-10$
$log\ sin\ a$	$9{\cdot}84949-10$
	$9{\cdot}78702-10$
$log\ sin\ \alpha$	$9{\cdot}99973-10$
$log\ sin\ b$	$9{\cdot}78729-10$
b	$37^0\ 47'\ 20''$

Itt $\alpha > \beta$-nál, tehát $a > b$-nél, de $a < 90^0$-nál, következőleg $b < 90^0$-nál.

Továbbá:

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	$76^0\ 0'\ 35''$
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	$16^0\ 0'\ 35''$
$log\ cos\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	$9{\cdot}38338-10$
$log\ tg\ \frac{1}{2}(a+b)$	$9{\cdot}94520-10$
	$9{\cdot}32858-10$
$log\ cos\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	$9{\cdot}98282-10$
$log\ tg\ \frac{1}{2}c$	$9{\cdot}34576-10$

$\frac{1}{2}c = 12^0\ 30'$

$c = 25^0$

$\frac{1}{2}(a+b) = 41^0\ 23'\ 40''$

$\frac{1}{2}(a-b) = 3^0\ 36'\ 20''$.

$log\ cos\ \frac{1}{2}(a-b)$	$9{\cdot}99914-10$
$log\ cotg\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	$9{\cdot}39646-10$
	$9{\cdot}39560-10$
$log\ cos\ \frac{1}{2}(a+b)$	$9{\cdot}87517-10$
$log\ tg\ \frac{1}{2}\gamma$	$9{\cdot}52043-10$

$\frac{1}{2}\gamma = 18^0\ 20'\ 17''$

$\gamma = 36^0\ 40'\ 34''$.

Az V. és VI. pontban mondottakból kitünik, hogy a gömb háromszög megfejtése csak akkor *kétes*, ha:

$$a \text{ két adott } \begin{matrix}\text{(oldal)}\\ \text{(szög)}\end{matrix} \text{ összege } \begin{Bmatrix}\text{nagyobb}\\ \text{kisebb}\\ \text{nagyobb}\\ \text{kisebb}\end{Bmatrix} \text{ lévén } 180^0\text{-nál, az adott } \begin{Bmatrix}\text{átellenes szög}\\ \text{átellenes oldal}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\text{nagyobb}\\ \text{kisebb}\\ \text{nagyobb}\\ \text{kisebb}\end{Bmatrix} 90^0\text{-nál, és az utóbbival szemközt fekvő } \begin{matrix}\text{(oldal)}\\ \text{(szög)}\end{matrix} \begin{Bmatrix}\text{nagyobb}\\ \text{kisebb}\\ \text{nagyobb}\\ \text{kisebb}\end{Bmatrix} \text{ a másik}$$

$$\text{adott } \begin{matrix}\text{(oldalnál).}\\ \text{(szögnél).}\end{matrix}$$

A többi esetben a föladat vagy *meghatározott*, vagy épenséggel *meg nem fejthető*. Az utóbbi csak akkor állhat elő, ha az adott részeket *tetszés szerint* választjuk meg; mert ha a részek mérés eredményei,. a háromszög okvetetlenül megfejthető.

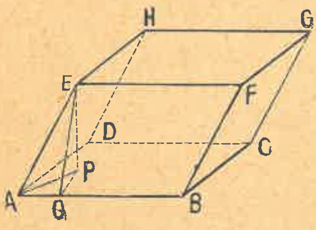
Nyolcadik fejezet.

A gömbháromszögmértan néhány alkalmazása.

40. §. A ferde parallelepipedon, a háromoldalú hasáb és gúla köbtartalom-számítása.

I. *A ferde parallelepipedon.* A hasábféle testek köbtartalmát úgy számítjuk ki, hogy az alapsík területét a magassággal megszorozzuk. Legyen $ABC\ldots H$ (81. ábra) valamely ferdeszögű parallelepipedon; ennek AB, AD, AE éleit és a közbefogott három élszöget u. m. BAD, BAE és DAE szögeket ismerteknek föltételezzük, számítsuk ki ezen meghatározó adatokból a test köbtartalmát.

81. ábra.



Rövidség okáért legyen:

$$AB = l_1,\ AD = l_2,\ AE = l_3,$$

$$BAD \sphericalangle = a,\ BAE \sphericalangle = b, \text{ és } DAE \sphericalangle = c.$$

Húzzuk E pontból ABC alapsíkra EP merőlegest; a parallelepipedon köbtartalma:

$$K = l_1 \,.\, l_3 \ sin\ \alpha.\ \overline{EP} \text{ (u)}$$

EP meghatározása végett húzzuk $PQ \perp AB$ egyenest és kössük össze Q pontot E-vel EQ egyenessel. A térmértan egyik ismeretes tantételénél fogva EQ is $\perp$ AB-re, következőleg EQP szög (vagy γ) DAB és BAE síkok hajlási szöge. EPQ derékszögű háromszögben:

$$EP = EQ.\ sin\ EQP = EQ.\ sin\ \gamma,$$

és EQA $\triangle$-ben:

$$\overline{EQ} = \overline{AE}.\ sin\ BAE = l_3.\ sin\ b,$$

következőleg:

$$\overline{EP} = l_3.\ sin\ b\ sin\ \gamma.$$

Helyettesítvén EP-nek értékét (u) egyenletben:

$$K = l_1\, l_2\, l_3\ sin\ a\ sin\ b\ sin\,\gamma. \qquad \text{(v)}$$

Az ismeretlen γ szöget a, b, és c által fejezhetjük ki. Ugyanis az A pontban találkozó három él testszöget alkot, melynek egy gömbháromszög felel meg. Az utóbbinak három oldala (a, b, c) ismeretes lévén, a c oldallal szemközt fekvő γ szög is meghatározható, mert:

$$sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{sin\ (s-a)\ sin\ (s-b)}{sin\ a\ sin\ b}},\ cos\ \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{sin\ s\ sin\ (s-c)}{sin\ a\ sin\ b}}.$$

ahol $s = \frac{1}{2}\,(a + b + c)$;

következőleg:

$$sin\,\gamma = 2\,sin\frac{\gamma}{2}cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2}{sin\ a\ sin\ b}\sqrt{sin\,s\,sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)};$$

$sin\,\gamma$ értékét (v) egyenletben helyettesítve:

$$K = 2\,l_1\,l_2\,l_3\ \sqrt{sin\,s\,sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}.$$

Az utóbbi képlet nyomán a ferde parallelepipedon köbtartalmát az adott részekből logaritmusokkal kiszámíthatjuk.

Ha: $a = b = c$,

$$K = 2\,l_1\,l_2\,l_3\ \sqrt{sin\ \tfrac{3}{2}\ a\,sin^3\frac{a}{2}},\ \text{vagy:}$$

$$K = 2\,l_1\,l_2\,l_3\ sin^2\frac{a}{2}\sqrt{2\,cos^2\frac{a}{2} - 1}.$$

És, ha: $a = b = c = 90^0$, azaz a ferde parallelepipedon derékszögüvé változik, $K = 2\,l_1\,l_2\,l_3.\ \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 = l_1\,l_2\,l_3$ a mint lennie kell.

II. *A háromoldalú hasáb.* Minden háromoldalú hasáb oly parallelepipedonná egészíthető ki, melynek alapja és köbtartalma kétszer akkora, magassága pedig ugyanakkora, mint a hasábé. Eszerint, ha a hasáb valamelyik csúcsán összetalálkozó három él hosszát l_1, l_2, l_3-mal, a közbefogott élszögeket a, b, c-vel jelöljük, a háromoldalú hasáb köbtartalma:

$$K = l_1\,l_2\,l_3.\ \sqrt{sin\,s\,sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}.$$

III. *A háromoldalú gúla.* Ez ismét a közös alapú és egyenlő magasságú háromoldalú hasáb harmadrésze; ennélfogva:

$$K = \frac{1}{3} l_1 l_2 l_3 \sqrt{sin\, s\, sin\,(s-a)\, sin\,(s-b)\, sin\,(s-c)}.$$

41. §. A gömbháromszögmértan alkalmazása a szabályos testek kiszámítására.

Hogy a szabályos testek köbtartalmát és felszínét kiszámíthassuk, előbb a nevezett testeken előforduló él- és lapszögeket kell meghatároznunk.

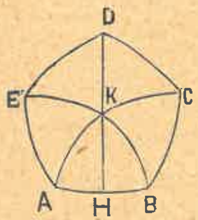
Az élszögeket könnyü meghatározni. Tudjuk, hogy minden szabályos testnek egybevágó szabályos határlapjai vannak. Nevezzük egy ily határlapon az oldalak számát n-nek, valamelyik szöget μ-nek, úgy:

$$\mu = \frac{(2n-4)\,90^0}{n} = 180^0 - \frac{360^0}{n}$$

A lapszögeket, vagyis a határlapok hajlási szögét, a gömbháromszögmértan segítségével számítjuk ki.

Tudvalevő, hogy a szabályos test testszögei egybevágók. Ha egy ily m-oldalú testszög csúcsából, mint középpontból, tetszés szerinti sugárral gömblapot szerkesztünk, ez az m-élü testszög oldallapjait $ABD\ldots$ m-oldalú szabályos gömbsokszög alakjában metszi (82. ábra). Ennek szögpontjai egyazon síkba tartoznak és ugyanazon körvonalba esnek, melynek sarkpontját a gömblapon K-val jelöljük. A nevezett sokszögnek mindegyik szöge (például ABC) a keresett hajlási szöget ν-t képviseli.

82. ábra.



AKB, BKC, CKD ..... gömbháromszögek egyenlöszárúak és egybevágók lévén, $BAK\sphericalangle = ABK\sphericalangle = \frac{1}{2}\nu$

$$\text{és} \quad AKB\sphericalangle = \frac{360^0}{m}.$$

Az utóbbi szöget KH körívvel felezvén $\overset{\frown}{KH} \perp \overset{\frown}{AB}$-re, mert az AKH gömbháromszög szimmetrikus BKH-val. Eszerint AHK háromszög derékszögü, következöleg:

$$cos\, AKH = sin\, BAK.\, cos\, AH,$$

tehát:

$$sin\, BAK = \frac{cos\, AKH}{cos\, AH}.$$

vagy a föntebbieknél fogva:

$$\sin\frac{\nu}{2} = \frac{\cos\frac{180^0}{m}}{\cos\frac{\mu}{2}} = \frac{\cos\frac{180^0}{m}}{\cos\frac{180^0}{n}} \qquad 1)$$

A tetraedronra nézve:

$m = 3$ és $n = 3$, tehát $\sin\frac{1}{2}\nu = \sqrt{\frac{1}{3}}$;

a kockára vonatkozólag:

$m = 3$ és $n = 4$, « $\sin\frac{1}{2}\nu = \sqrt{\frac{1}{2}}$;

az oktaedronra nézve:

$m = 4$ és $n = 3$, « $\sin\frac{1}{2}\nu = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

a dodekaedronra vonatkozólag:

$m = 3$ és $n = 5$, « $\sin\frac{1}{2}\nu = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}$

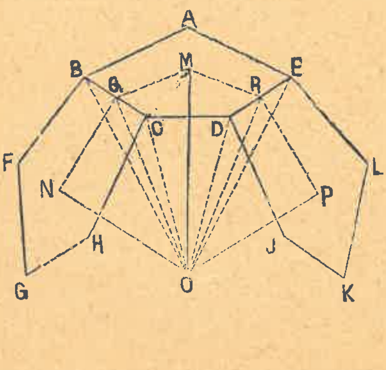
végre az ikozaedront illetőleg:

$m = 5$, és $n = 3$, tehát $\sin\frac{1}{2}\nu = \frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{2}{3}\sqrt{5}}$

Ezekből azután a megfelelő $\cos\frac{\nu}{2}$, továbbá $\sin\nu$, $\cos\nu$ és $tg\,\nu$ értéke is kiszámítható. Az utóbbiakra nézve következő *végszerű* számértékeket találjuk:

a tetraedronra	nézve	$\cos\nu = \frac{1}{3}$,	tehát $\nu = 70^0\,31'\,34''$
a kockára	«	$\sin\nu = 1$,	« $\nu = 90^0$
az oktaedronra	«	$\cos\nu = -\frac{1}{3}$,	« $\nu = 109^0\,28'\,16''$
a dodekaedronra	«	$tg\,\nu = -2$,	« $\nu = 116^0\,33'\,54''$
az ikozaedronra	«	$\sin\nu = \frac{2}{3}$,	« $\nu = 138^0\,11'\,23''$.

Már most ismerjük ugyan az él- és a lap-szögeket, mielőtt azonban tulajdonképeni föladatunk megfejtéséhez fognánk, még a beírt és körülírt gömb sugarát is ki kell számítanunk.



83. ábra.

A 22. §. szerint mind a két gömblapnak ugyanazon közös középpontja van; nevezzük e pontot O-nak (83. ábra); legyenek továbbá M, N, P valamely szabályos test három szomszédos határlapjának megfelelő középpontjai. A körülírt gömb sugarát r-rel, a beírt gömbét ρ-val jelöljük, azaz:

$$AO = BO = CO = \ldots = r$$
$$MO = NO = PO = \ldots = \rho.$$

Az egyes határlapokat bekerítő körök sugarai: $AM = BM = BN = \ldots = r'$, az ugyanezen idomokba beírt körök sugarai $MQ = NQ = \ldots = \rho'$.

$CQM \triangle$-ben: $CQ = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a$, MCQ szög $= \frac{1}{2} BCD = \frac{1}{2} \mu$ és CQM szög $= 90^0$, tehát:

$$r' = \frac{a}{2 \cos \frac{\mu}{2}}, \text{ és } \rho' = \tfrac{1}{2} a . tg \frac{\mu}{2}.$$

Továbbá az $OMQ \triangle$-ben: $OMQ \sphericalangle = 90^0$, és $OQM \sphericalangle = \frac{\nu}{2}$, tehát:

$$\rho = \rho' . tg \frac{\nu}{2}, \text{ vagy:}$$

$$\rho = \tfrac{1}{2} a . tg \frac{\mu}{2} . tg \frac{\nu}{2}$$

és: $$OQ = \frac{\rho'}{\cos \frac{\nu}{2}} = \tfrac{1}{2} a . \frac{tg \frac{\mu}{2}}{\cos \frac{\nu}{2}},$$

végül BOQ háromszögben $BQO \sphericalangle = 90^0$, tehát:

$$\overline{BO}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{OQ}^2, \quad \text{azaz:}$$

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a . tg \frac{\mu}{2}}{2 \cos \frac{\nu}{2}}\right)^2,$$

következőleg: $$r = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{\left(tg \frac{\mu}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{\nu}{2}\right)^2}}; \qquad 3)$$

r-nek ezen értéke sokkal egyszerübb alakot ölt, ha $tg \frac{\mu}{2}$-t a megfelelő cosinussal fejezzük ki és a cosinus helyébe az 1) egyenletből folyó értéket tesszük.

Ugyanis:

$$\left(tg \frac{\mu}{2}\right)^2 = \frac{\left(\sin \frac{\mu}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{\mu}{2}\right)^2} = \frac{1 - \left(\cos \frac{\mu}{2}\right)^2}{\left(\cos \frac{\mu}{2}\right)^2}.$$

De az 1) egyenletnél fogva:

$$\cos\frac{\mu}{2} = \frac{\cos\frac{180^0}{m}}{\sin\frac{\nu}{2}}$$

$$\left(tg\,\frac{\mu}{2}\right)^2 = \frac{\sin\left(\frac{\nu}{2}\right)^2 - \left(\cos\frac{180^0}{m}\right)^2}{\left(\cos\frac{180^0}{m}\right)^2},$$

az utóbbi értéket helyettesítvén a 3) egyenletben, kellö összevonás után lesz:

$$r = \frac{a}{2}\,tg\,\frac{180^0}{m}\,tg\,\frac{\nu}{2}. \qquad 4)$$

Hasonló alaku ρ-nak értéke is, ha t. i. a 2) egyenletben $\frac{\mu}{2}$ helyébe a §. elején talált értékét tesszük, ekkor:

$$\rho = \frac{a}{2}\,cotg\,\frac{180^0}{n}\,tg\,\frac{\nu}{2}. \qquad 5)$$

Már most jelöljük valamely szabályos test határlapjai számát általánosan l-lel, egy-egy határlap területét t-vel, a test fölszinét F, köbtartalmát K betüvel; a háromszög-mértanban tanultak szerint:

$$t = \tfrac{1}{4}\,n\,a^2.\,tg\,\frac{\mu}{2}, \qquad \text{vagy:}$$

$$t = \frac{a^2 n}{4}\,cotg\,\frac{180^0}{n}, \text{ és}$$

$$F = \frac{a^2\,n\,l}{4}\,cotg\,\frac{180^0}{n}; \qquad 6)$$

továbbá tudvalevöleg minden polyeder annyi gúlára bontható, ahány határlapja van; mind ezen gúlák közös magassága $= \rho$, ennélfogva a szabályos test köbtartalma:

$$K = \tfrac{1}{2}\,F\,.\,\rho.$$

F és ρ helyébe az imént talált értékeket téve:

$$K = \frac{a^2 nl}{24}\left(cotg\,\frac{180^0}{n}\right)^2 tg\,\frac{\nu}{2}. \qquad 7)$$

E képleteket az öt szabályos testre alkalmazván, a következő számértékeket kapjuk.

A tetraedront illetöleg:

$$r = \frac{\sqrt{6}}{4}\,a,\ \rho = \frac{\sqrt{6}}{12}\,a, \qquad F = \sqrt{3}.\,a^2,\ K = \frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3.$$

A kockára nézve:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \; \rho = \frac{a}{2}, \qquad F = 6a^2, \quad K = a^3.$$

Az oktaedronra vonatkozólag:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} a, \; \rho = \frac{\sqrt{6}}{6} a, \qquad F = 2\sqrt{3}.a^2, K = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3.$$

A dodekaedronra nézve:

$$r = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4} a, \qquad \rho = \frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20} a.$$

$$F = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\, a^2, \qquad K = \frac{15+\sqrt{5}}{4} a^3.$$

Az ikozaedronra vonatkozólag:

$$r = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a, \qquad \rho = \frac{3\sqrt{3}+7\sqrt{15}}{12} a,$$

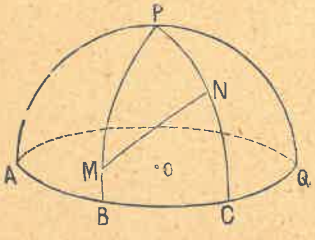
$$F = \sqrt{3}.a^2, \qquad K = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12} a^3.$$

Eddigelé a-t, vagyis az él hosszát mindig ismertnek föltételeztük; azonban ha nem a, hanem például r ismeretes, akkor előbb a-t kifejezzük r által, és ezután a értékét a többi egyenletben helyettesítjük.

42. §. Geografiai helyek valóságos távolságainak a meghatározása.

Keressük két helynek földrajzi hosszuságából és szélességéből egymástól való valódi távolságukat.

(84. ábra.)



Legyen M és N (84. ábra) a két geografiai hely; a rajtok átmenő fő körnek MN íve a keresett távolság. Legyen továbbá P a föld sarka, AQ az egyenlítő, PMB vonal M pont, PNC pedig N pont délköre és APQ a kezdő délkör, melytől a hosszuságokat számítjuk; ennek következtében BC ív, vagyis az ennek megfelelő γ szög a két hely hosszuság-különbségét, $MB = \varphi$ az M pont földrajzi szélességét, $NC = \varphi'$ az N pont szélességét jelenti.

PMN háromszögből ismeretes: PM oldal $= 90^0 - \varphi$, PN oldal $= 90^0 - \varphi'$ és a közbefogott szög $MPN = \gamma$; keressük a harmadik oldalt, MN-et, a 37. §. 3. pontja szerint:

$$\cos MN = \frac{\cos(90^0 - \varphi)\cos(90^0 - \varphi' - \psi)}{\cos\psi},$$

ahol $tg\,\psi = tg(90^0 - \varphi)\cos\gamma$,

vagyis:

$$\left.\begin{aligned} \cos MN &= \frac{\sin\varphi \sin(\varphi' + \psi)}{\cos\psi} \\ tg\,\psi &= cotg\,\varphi\cos\gamma. \end{aligned}\right\}$$

Feladatok a sztereometriához.

I. fejezet. A téridomokról általában.

Bevezetés. 1. Hány egyenest lehet a térben fekvő 4 ponton át húzni úgy, hogy mindegyiknek a fekvése meg legyen határozva?

2. Adva van n (7) pont a térben; ezek közül a (3) pont egy egyenes vonalba, b (2) egy másik egyenes vonalba, c (4) egy harmadik egyenesbe esik. Hány különböző egyenes vonal fekvése van az adott pontok által meghatározva?

3. Adva van 4 (m) egyenes és 7 (n) pont a térben. Hány síklap fektethető ezeken keresztül úgy, hogy minden sík egy vonalat és egy pontot foglaljon magában?

4. Hány különböző sík fekvése van n (7) adott pont által meghatározva?

5. Hány sík van öt oly egyenes által meghatározva, melyek közül négy párhuzamos egymással és az ötödik két párhuzamost metsz?

6. Egy pontból n (6) egyenes indul ki; hány síkot határoznak meg ezek?

7. Adott ponton át egyenest kell fektetni, mely egy adott egyenessel párhuzamos.

8. Hány egyenesben metszheti egymást n (5) adott sík?

9. Hány egyenes vonalban metszi egymást n adott sík, ha közülök a párhuzamos és b ugyanazon egyenes vonalon megy keresztül?

Síklapra merőleges egyenes. 10. Ha két pontból valamely síkra egyenlő merőlegeseket bocsátunk akkor ezen két pont és a két merőleges két talppontja egy derékszögű négyszög négy szögpontja.

11. Mekkora valamely pontnak távolsága adott síktól, ha a pontnak távolsága egy a síkban fekvő ponttól a, és e pont távolsága a merőleges talppontjától b? $a = 11{\cdot}38$, $b = 4{\cdot}62$.

12. Valamely egyenlőoldalú háromszög középpontjában a háromszög síkjára merőlegesen áll egy egyenes, melynek hossza b; ezen merőleges felső végpontjának a távolsága a háromszög egyik szögpontjától c; mekkora a háromszög területe?

13. Keressük azon pontoknak a mértani helyét, melyek két adott ponttó egyenlő távolságra vannak.

14. Mi azon pontok mértani helye, amelyek három adott ponttól egyenlő távolságra vannak?

15. Mi oly pontok mértani helye, melyeknek két adott ponttól való távolságaik négyzetei közt állandó különbség (m^2) van?

16. Mekkora valamely pontnak a távolsága a síktól, ha ugyanazon pontból a síkhoz húzott más egyenes a merőlegessel α szöget alkot és a méter hosszú? $\alpha = 63^0\,15'$, $a = 240$ m.

17. Egy pontból valamely síkra egy merőleges és egy ferde egyenest huzunk, melyeknek aránya $a:b$; mekkora szöget alkotnak egymással? $a:b = 3059:8944$.

Az egyenes vetülete. 18. Valamely 12 m. hosszú rúd hajlásszöge a síkhoz $\alpha = 30^0$; mily nagy a rúd vetületének a hossza? mekkora, ha $\alpha = 36^0\,25'$?

19. Mily nagy a 102 m. egyenes hajlásszöge a síkhoz, ha a vetülete *a)* fele az egyenes hosszúságának, *b)* egyenlő végpontjának a síktól való távolságával?

20. Egy ferde egyenes és vetületének az aránya $a:b$; mekkora az egyenes hajlásszöge? $a:b = 4007:3114$.

21. Valamely pont távolsága egy síktól a; a pontból a síkhoz húzott ferde egyenes hajlásszöge φ; mekkora ezen egyenes? $a = 64{\cdot}92$. $\varphi = 62^0\,39'$.

22. Adott külső pont távolsága a síkban fekvő két másik ponttól a és b; a két távolság vetületeinek aránya $m:n$; mekkora az első pont távolsága a síktól? $a = 143$, $b = 157$, $m:n = 11:17$.

23. Az $AO = 15{\cdot}6\ m$ egyenes merőlegesen áll az O középpontú és $r = 4{\cdot}8\ m$ sugarú kör síkjára; mily messze van A pont a kör kerületének minden pontjától?

24. Két térbeli pontnak a síktól való távolsága $a = 3{\cdot}7$ és $b = 5{\cdot}8\ m$, a pontokból a síkra vont merőlegesek talppontjainak távolsága $c = 4{\cdot}2\ m$; mily nagy a térbeli pontok távolsága?

25. Valamely síktól a távolságban levő pontból a síkra két ferde egyenest húzunk, melyeknek hosszai úgy aránylanak, mint $b:c$; az egyiknek hajlásszöge a másik hajlásszögének a kétszerese. Mekkorák a ferde egyenesek? $a = 16$, $b:c = 17:30$.

26. Egy pontból valamely síkra húzott két egyenes hossza a és b, vetületeiknek aránya $m:n$; mekkorák az egyenesek hajlásszögei? $a = \sqrt{2}_1\ b = 1$ $m:n = \sqrt{3}:1$.

27. Az ABC háromszög oldalai $AB = 40\ m$, $BC = 16\ m$, $AC = 25\ m$; mily nagy a háromszög síkjához ferdén hajló A szögpontból kiinduló egyenes projekciójának a háromszög síkjában fekvő része, feltéve, hogy az egyenes AB és AC oldalokkal egyenlő szögeket zár be?

28. Valamely egyenes hajlásszöge egy síkhoz 45^0; a síkban az egyenes talppontján át egyenest húzunk, mely a térbeli egyenes vetületével szintén 45^0-nyi szöget alkot. Mekkora szöget alkot az a két egyenes?

29. Egy háromszög hajlásszöge a síkhoz 45^0; mily nagy vetületének a területe, ha ismeretes a háromszög két oldala és a bezárt szög? $a = 27\ m$, $b = 43\ m$, $\gamma = 58^0\,26'\,10''$.

30. Valamely háromszög vetülete oly egyenlőoldalú háromszög, melynek területe $\sqrt{50}$; mily nagy a térbeli háromszög területe, ha a síkhoz való hajlásszöge 45^0?

31. Mily nagy a t területű háromszögnek a síkhoz való hajlásszöge, ha vetülete oly egyenlőoldalú háromszög, melynek oldala b? $t = 116\,m^2$, $b = 12\,m$.

32. Egy egyenlőszárú háromszög α szög alatt hajlik egy síkhoz; alapja b párhuzamos a síkkal; mekkora a háromszög egyik szára, ha vetületének a területe t? $\alpha = 30^0\,40'\,50''$, $b = 14\,m$, $t = 360\,m^2$?

33. Mily szög alatt hajlik a sokszög a síkhoz, ha vetülete félakkora, mint maga a sokszög?

A sík és a síkkal párhuzamos egyenesek. 34. Ha két párhuzamos egyenes vonal egyike valamely síklappal párhuzamos, a másik is az.

35. Ha valamely síkra merőlegest állítunk, és erre valamelyik pontjában ismét merőlegest húzunk, az utóbbi párhuzamos a síkkal.

36. Ha a síklappal párhuzamos egyenes egyik pontjából merőlegest húzunk a síkra, akkor az merőleges az első egyenesre is.

37. Ha valamely egyenes vonal két összehajló síklap mindegyikével párhuzamos, akkor a síkok közös élével is párhuzamos.

38. Mi azon egyeneseknek mértani helye, amelyek adott ponton mennek át és adott síkkal párhuzamosak?

39. AB egyenes párhuzamos egy síkkal. A pontból egyenes indul a síkhoz, melynek hossza c és hajlásszöge α; egy a B pontból húzott egyenes hossza a; mekkora ennek a hajlásszöge? $c = 63{\cdot}92$, $a = 54{\cdot}47$, $\alpha = 51^0\,40'$.

Két egymást metsző sík. 40. A két sík lapszögét és melléklapszögét felező síkok merőlegesek egymásra.

41. A lapszöget felező sík mindegyik pontja egyenlő távolságban van a lapszöget alkotó síkoktól.

42. Legyen a sík egyik pontjából egy másik síkra bocsátott merőleges fele az ugyanazon pontból a két sík metsző vonalára bocsátott merőlegesnek; mekkora a két sík hajlásszöge?

43. Határozzuk meg a két adott síklaptól egyenlő távol eső pontok mértani helyét: *a)* ha a síkok párhuzamosak, *b)* ha metszik egymást.

44. Keressük azon pontok mértani helyét, melyek két adott síklaptól a, illetőleg b távolságra vannak.

45. Keressük azon pontok mértani helyét, melyeknek két adott síklaptól való távolságaik meghatározott arányban állanak egymáshoz.

46. Mekkora *a)* egy háromszög, *b)* egy sokszög projekciójának a területe, ha a háromszög, illetőleg a sokszög területe t, és síkjának a hajlása az adott síkhoz α?

Merőleges síkok. 47. A síkban fekvő egyenesen át a síkra csak egy merőleges síkot fektethetünk.

48. Ha valamely behajló lapszög élének egyik pontjában mind a készárlapra merőlegest állítunk, úgy, hogy mind a kettőt a lapszöghöz képest vagy befelé, vagy kifelé húzzuk, az ezen egyenes vonalak által bezárt szög a lapszöget $2R$-re egészíti ki.

49. Két egymásra merőlegesen álló sík közt levő egyenes vetületei e két síkon a és b; az a vetület a két sík közös élével α szöget alkot. Mekkora az egyenesnek a két sík által határolt része és mekkora szögeket alkot a két síkkal?

II. fejezet. A testszögről.

A háromélű testszög. 50. Ha valamely háromélű testszög három lapszögét felezzük, a felező síkok ugyanazon egyenes vonalban találkoznak, és az egyenesnek mindegyik pontja a testszög három oldallapjától egyenlő távolságra esik.

51. Ha valamely háromélű testszög három élszögét felezzük és a felező vonalak mentében az illető oldallapokra merőleges síkokat állítunk, ezek azon egyenes vonalban találkoznak, amelynek minden pontja a testszög három élétől egyenlő távolságra esik.

52. Minden háromélű testszögben két lapszög összege és a harmadik lapszög közt fennálló különbség kisebb, mint $2R$.

53. Ha a térnek valamely pontján keresztül egy adott háromélű testszög élével párhuzamos és egyező irányú három egyenes vonalat húzunk, ezek az adottal egybevágó testszöget alkotnak.

54. Valamely egyenlőszárú háromélű testszög a csúcs-testszögével egybevágó.

55. Ha valamely testszög lapjait egy síkkal átmetszük, azután a testszög csúcsából e síkra merőleges egyenest húzunk és ezt talppontján túl annyival meghosszabbítjuk, hogy a túlsó rész egyenlő legyen az innensővel, és végre ha a meghosszabbított rész végpontját a testszög éleinek metszőpontjaival (a hol t. i. az élek ama síklappal találkoznak) összekötjük, ez összekötő vonalak az adottal szimmetrikus testszöget alkotnak.

56. Ha valamely háromélű testszög belsejében a csúcson át egyenest húzunk, akkor ezen egyenes és a három él által alkotott szögek összege kisebb, mint az élszögek összege.

57. Valamely háromél két élszöge ismeretes; hogy aránylanak az átellenes lapszögek *sinusai?*

58. Valamely háromélből ismeretes a három élszög a, b, c; mekkorák a lapszögek? $a = 25^0\,13'\,12''$, $b = 37^0\,14'\,19''$, $c = 58^0\,31'\,51''$.

59. Ismerjük a háromél lapszögeit, α, β, γ-t; mekkorák az élszögek? $\alpha = 127^0\,22'\,34''$, $\beta = 51^0\,18'\,13''$, $\gamma = 72^0\,26'\,40''$.

60. A háromél egy élszöge és a szomszédos két lapszög ismeretes; határozzuk meg a testszög többi alkotórészét $a = 93^0\,44'\,45''$, $\beta = 26^0\,42'\,52''$, $\gamma = 78^0\,43'\,29{\cdot}9''$.

61. Ismeretes a háromél egy lapszöge és a szomszédos két élszög; határozzuk meg a háromél többi alkotórészét. $\alpha = 102^0\,55'\,3''$, $b = 42^0\,18'\,17''$ $c = 26^0\,11'\,15''$.

III. fejezet. A szögletes testek tulajdonságairól.

A gúla. 62. Minden gúlában két oldalél úgy aránylik egymáshoz, mint megfordítva hajlásszögeinek a sinusai.

63. Minden gúlában az oldallapok területeinek az összege nagyobb, mint az alap területe.

64. Minden háromoldalú gúlában a hat lapszögnek az összege nagyobb négy, de kisebb hat derékszögnél.

65. Szabályos-háromoldalú gúla magasságából és alapéléből számítsuk ki az oldalélt.

66. Szabályos-négyoldalú gúla magasságából és oldaléléből számítsuk ki az alapélt.

67. Háromoldalú piramis oldallapjai egyenlőszárú, egybevágó derékszögű háromszögek; az alapél a; mekkora a gúla magassága, oldallapjának és oldalélének a hajlásszöge?

68. Négyoldalú piramisnak oldallapjai egyenlőoldalú háromszögek; mekkora a piramis magassága, oldallapjának és oldalélének a hajlásszöge, ha az oldallap oldala ismeretes?

69. Valamely gúlának alapja egyenlőoldalú háromszög, oldallapjai egyenlőszárú egybevágó háromszögek, melyek mindegyike n-szer nagyobb, mint az alap; mekkora az oldallap hajlásszöge az alaphoz? Legyen $n = \frac{2}{3}$.

70. Ha valamely csonka gúlát az alappal párhuzamosan, a két alaptól egyenlő távolságban metszünk, az átmetszési idom területe annyi, mint a két alap-terület számtani és mértani közepének a félösszege.

71. Egyenes csonka gúlának mind a két alapja négyzet, ezek oldalai a és b; a négy egybevágó oldallap összege akkora, mint a két alaplap összege. Mekkora a csonka gúla magassága?

72. A csúcstól mekkora távolságban kell valamely piramist az alappal párhuzamosan metszeni, hogy az átmetszési idom az alapnak *a)* fele, *b)* harmada legyen?

73. Ha két egyenlő alapú és egyenlő magasságú gúlát egyenlő távolságban és az alapokkal párhuzamosan metszünk, az átmetszési idomok egyenlők

A hasáb. 74. Minden n-oldalú hasábban az oldallapok hajlásszögeinek összege $(2\,n-4)\,R$.

75. Minden n-oldalú hasábban az alaplapok és az oldallapok alkotta lapszögek összege $2nR$.

76. Minden parallelepipedonban a lapszögek összege $12R$.

77. Minden derékszögű parallelepipedonban az átló négyzete annyi, mint az egy csúcsban találkozó három él négyzetének az összege.

78. Szabályos, háromoldalú prizmát oly síkkal metszünk, mely egy alapélen megy át és az alaphoz 45^0-nyi szög alatt hajlik; mekkora a metszési idom területe, ha az alap területe $t = \sqrt{50}$?

79. Egyenes, szabályos háromoldalú prizmában az oldalél akkora, mint az alapba írt kör sugara. Hogy aránylik az oldallapok összege az alaplapok összegéhez?

80. Valamely romboëder éle: a, lapjának két szöge úgy aránylik, mint 1 : 2; határozzuk meg az átló hosszát.

81. Ferde, háromoldalú hasábból ismeretes a három alapél: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, az oldalél $CD = d$ meg a $DCA = \beta$ és $DCB = \alpha$ szögek. Határozzuk meg az A, B és D pontokon átmenő síkmetszetnek a területét. $a = 55$, $b = 48$, $c = 25$, $d = 187{\cdot}76$, $\alpha = \beta = 33^0\,20'\,37{\cdot}5''$.

A szögletes testek általában. 82. Minden szögletes testben az élszögek összege kisebb, mint annyiszor $4R$, ahány csúcs van.

83. A polyeder felszínén levő szögek összege annyiszor $4R$, amennyi a csúcsoknak kettővel kisebbített száma.

84. Minden szögletes test csúcsai, valamint lapjai számának a háromszorosa nem lehet kisebb, mint éleinek hattal kisebbített száma.

85. A polyeder csúcsai számának a kétszerese *a)* vagy akkora, vagy kisebb, mint lapjai számának a nyolccal kisebbitett négyszerese; *b)* vagy akkora, vagy nagyobb, mint lapjainak néggyel nagyobbított száma.

86. A szögletes test lapjai számának a kétszerese egyenlő, vagy kisebb, mint a 8-cal kisebbített csúcsok számának a négyszerese.

87. A polyeder felszinén levő szögek összege annyi, vagy több derékszög, mint amennyi a lapok számának a kétszerese.

A szabályos testek. 88. A szabályos hatlap lapjainak a középpontjai egy szabályos nyolclap csúcspontjai.

89. A szabályos oktaedron lapjainak a középpontjai egy szabályos hatlapnak a csúcsai.

90. A szabályos tetraedron éleinek felezőpontjai egy szabályos oktaedron csúcspontjai.

91. A szabályos tetraedron határlapjainak középpontjai egy második szabályos tetraedron csúcspontjai.

92. A szabályos tetraedron éléből határozzuk meg a magasságát.

93. A szabályos oktaedron éléből számítsuk ki a két átellenes csúcsot összekötő egyenest.

94. A kocka éléből határozzuk meg az átlóját.

95. Határozzuk meg a szabályos négy- és nyolclap két-két egymást metsző lapjának a hajlásszögét.

96. A szabályos tetraedron három magassága egyetlen egy pontban találkozik; ezen pont mindegyik magasságot 1 : 3 arány szerint osztja, úgy hogy a hosszabbik szelet a csúcs felé esik.

97. Határozzuk meg azt a szöget, melyet egy szabályos tetraedron magassága az éllel alkot.

IV. fejezet. A gömbölyű testek tulajdonságairól.

A kúp. 98. Minden piramisba, melynek alapjába kör írható, oly kúpot szerkeszthetünk, melynek görbe felületét a piramis minden oldallapja érinti.

99. Ha két egyenlő alapú és egyenlő magasságú kúpot az alapoktól egyenlő távolra azokkal párhuzamosan metszünk, az átmetszési idomok egybevágó körök.

100. Ha a kúpot, melynek alapsugara r, ez alaphoz párhuzamosan oly síkkal metszük, mely a kúp magasságát $m:n$ arány szerint osztja, mekkora a metszet területe?

101. Egy ferde kúpnak legnagyobb (S) és legkisebb (s) oldalából és a tengelyből (a) határozzuk meg az alapsugarat. $S = 52$, $s = 39$, $a = 42{\cdot}426$.

102. Határozzuk meg egy ferde kúpnak legnagyobb és legkisebb oldalából és az alapsugárból a tengelyt.

103. Egyenes kúpba piramist irunk, melynek alapja négyzet; mekkorák az oldallapok, ha ismeretes a kúp alapsugara r, és magassága h? $r = 7$, $h = 6$.

104. Ugyanaz a körülírt szabályos háromoldalú piramisra nézve.

105. Valamely egyenes kúp tengelymetszetének a csúcsnál levő szöge α, magassága m; határozzuk meg a kúp alapsugarát és oldalát.

106. A ferde kúp tengelye a, hajlásszöge az alaphoz α, az alapsugara r; számítsuk ki a magasságot, a leghosszabb és a legrövidebb oldalvonalat. $a = 10$, $r = 5$, $\alpha = 60^0$.

A henger. 107. Egyenlő alapú és magasságú hengerek, melyek tengelyeinek a hajlásszögei egyenlők, egybevágók.

108. A ferde henger tengelymetszetei közt az a legkisebb, mely a tengely hajlásszögének a szárain megy át, és az a legnagyobb, mely a hajlásszög száraira merőlegesen álló átmérőn megy át.

109. Mekkora az egyenes hengerbe írt szabályos négyoldalú prizma oldallapja, ha a henger magassága és alapsugara ismeretes?

110. Hogy aránylik valamely egyenes henger alapsugara a magassághoz, ha tengelymetszete egyenlő az alappal?

111. Hogy aránylik az egyenlőoldalú egyenes henger tengelymetszete az alaphoz?

112. Egy ferde henger tengelye a, ennek a hajlásszöge az alaphoz α, az alapsugara r; határozzuk meg a merőleges tengelymetszet területét (mely a tengelyen és a magasságon megy át). $a = 3{\cdot}4201$, $\alpha = 32^0\ 12'\ 6''$, $r = 1{\cdot}57$.

113. Valamely egyenes henger sugara r; mindegyik alapján egyenes kúp áll, melynek csúcsa a másik alap középpontja; mekkora azon kör kerülete, melyben a két kúplap egymást metszi?

A gömb. 114. Mindazon gömbi körök közt, melyek síkjai egy, a gömb belsején levő ponton vonulnak át, az a legkisebb, melynek ez a pont középpontja.

115. Milyen kölcsönös helyzettel bírhat két gömb? Mikor érintkeznek kivülről, mikor belülről, és mikor metszik egymást? Érintkezés esetében hová esik az érintési pont?

116. Két egymást metsző gömblap átmetszési idoma mindig kör.

117. Egy gömb sugarából és egy metszősíknak a gömb középpontjától való távolságából számítsuk ki a metszési kör sugarát. $r = 3{\cdot}49$, $d = 1{\cdot}8$; vagy $r = 125$, $d = 117$.

118. Ismeretesek két gömbi kör sugarai ρ_1, és ρ_2, a középponttól való távolságaik aránya $m : n$; határozzuk meg a gömb sugarát. $\rho_1 = 7$, $\rho_2 = 15$, $m : n = 6 : 5$.

119. Egyenes szabályos háromoldalú prizma köré gömb van írva; a prizma oldallapja egyenlő az alaplappal; mekkora a gömb sugara, ha a prizma alapéle $a = 8$ *dm*?

120. Egy félgömb nagy köre alapja egy egyenes kúpnak, melynek magassága egyenlő a kör átmérőjével; görbe lapjaik egy kis körben metszik egymást; mekkora ezen kör és mekkora a távolsága az alaptól, ha ennek sugara ismeretes? $r = 25$.

121. Egy egyenes kúpnak alapsugara (r) és oldalának hajlásszöge az alaphoz (α) ismeretes; mekkora a körülírt és a beírt gömb sugara? $r = 200$, $\alpha = 54^0\ 16'$.

122. A ferde kúp tengelye a, ennek a hajlásszöge az alaphoz α és az alap sugara r; mekkora a kúp köré írt gömb sugara? $a = 8{\cdot}9$, $r = 4\frac{64}{89}$, $\alpha = 7^0\,29'\,12{\cdot}5''$.

123. Mi azon pontok mértani helye, melyek adott ponttól adott távolságra vannak?

124. Mi ama gömbök középpontjainak mértani helye, melyek három nem egy egyenesben fekvő ponton mennek át?

125. Mi azon gömbök középpontjainak a mértani helye, melyek adott síkot adott pontban érintenek?

126. Mi azon gömbök középpontjainak a mértani helye, melyek adott sugarúak és adott síkot érintenek?

127. Ugyanez, ha adott gömböt érintenek?

128. Keressük azon gömbök középpontjainak mértani helyét, melyek adott gömböt adott pontban érintenek.

129. Mi azon gömbök középpontjainak a mértani helye, melyek adott sugarúak és két adott ponton mennek át?

130. Mi azon egyeneseknek a mértani helye, melyek *a)* párhuzamosak, *b)* egy ponton mennek át és adott gömböt érintenek?

Gömbháromszög. 131. Minden gömbháromszögben a szögeket felező főkörök egyetlen egy pontban találkoznak; ezen pontból az oldalakra merőlegesen húzott főkörök ívei egyenlők.

132. A gömbháromszög oldalaira a felező pontokban merőlegesen húzott főkörök egyetlen egy pontban találkoznak; az ezen pontból a háromszög csúcspontjaihoz húzott főkörök ívei egyenlők.

133. Határozzuk meg a gömbháromszög három szögpontja által meghatározott síkháromszög területét a gömb sugarából és a gömbháromszög három oldalából (fokmértékben kifejezve).

134. Minden gömbháromszögben a külső szög kisebb a szemközt fekvő két belső szög összegénél és nagyobb azok különbségénél.

135. Minden gömbháromszög köré lehet kört irni. Ezen körnek gömbi középpontjából a háromszög szögpontjához húzott gömbi sugár a két oldallal két szöget képez, melyek mindegyike fél akkora, mint a mekkora a különbség a háromszög két szögének az összege és a harmadik szög közt.

A gömbbe és köréje írt testek. 136. A szabályos tetraedron éléből határozzuk meg a beírt és körülírt gömb sugarát.

137. A szabályos oktaedron éléből határozzuk meg a beírt és körülírt gömb sugarát.

138. Határozzuk meg a kocka éléből a beírt és körülírt gömb sugarát. Ugyszintén a kocka átlójából.

139. Ismeretes a szabályos ikozaedron éle; mekkora a beírt és körülírt gömb sugara?

140. Számítsuk ki a szabályos soklapnak az élét *a)* a beírt, *b)* a körülírt gömb sugarából.

V. fejezet. A testek hasonlóságáról.

A testek hasonlósága. 141. Két háromoldalú piramis hasonló: *a)* ha a megfelelő élek arányosak, *b)* ha a megfelelő oldallapok hasonlók, *c)* ha a megfelelő lapszögek egyenlők, *d)* ha két testszög egybevágó és ezeknek megfelelő élei arányosak.

142. Ha valamely gúlát az alappal párhuzamos sík által metszünk, az elmetszett gúla az adotthoz hasonló.

143. Ha két gúlában a csúcsnál levő testszögek egybevágók, vagy szimmetrikusok és három megfelelő oldalél páronként arányos, akkor a gúlák hasonlók.

144. Két kúp, vagy két henger hasonló, ha tengelyeik és az alapjaik átmérői arányosak és a tengelyek az alapsíkokkal egyenlő hajlásszögeket alkotnak.

145. Ha két gömbben több párhuzamos sugárpárt keresünk vagy megegyező, vagy ellenkező irányban és a megfelelő sugarak végpontjait egyenesekkel összekapcsoljuk, ezek a centrális vonalat egy pontban, vagy a külső, vagy a belső hasonlósági pontban metszik.

146. Ha két gömb hasonlósági pontjából kiinduló egyenes az egyik gömb szelője, vagy érintője, akkor a másiknak is szelője, vagy érintője.

147. Ha a hasonlósági ponton keresztül menő sík az egyik gömböt metszi vagy érinti, akkor a másik gömböt is metszi vagy érinti.

VI. fejezet. A testek felszíne és köbtartalma.

A hasáb felszíne és köbtartalma. 148. Egy derékszögű parallelepipedon egy pontban összefutó élei 5, 9, 12; mily nagy a test felszíne és köbtartalma?

149. Mennyi a négyzetalakú átlós metszetű egyenes parallelepipedon felszíne és köbtartalma, ha a metszet területe $t = 16$ m² és az alapélek aránya $a : b = 3 : 4$?

150. A derékszögű parallelepipedon köbtartalma 5·856 m³, éleinek aránya 3 : 4 : 5; mily hosszúak az élek?

151. A derékszögű parallelepipedon alapjának területe 48 cm², oldalfelszíne 768 cm², egyik átlója 26 cm; keressük a köbtartalmat.

152. Egy derékszögű parallelepipedon alapjának átlója 52 m. s az egyik alapélhez 22° 37′ 11″-nyi szög alatt hajlik; mily nagy a köbtartalom, ha egyik oldalának átlója 101 m. és ez az egyik oldaléllel 11° 12′ 19″-nyi szöget alkot?

153. Valaki a m. hosszú, b m. széles és c m. magas falat akar felépíteni; hány tégla szükséges ehhez, ha mindegyik a_1 m. széles, b_1 m. hosszú és c_1 m. vastag? $a = 12$, $b = 0·3$, $c = 2·1$, $a_1 = 0·3$, $b_1 = 0·15$, $c_1 = 0·07$.

154. Mily nagyok a derékszögű parallelepipedon éleinek mértani haladványt alkotó mértékszámai, ha térfogata 59·899 m³, felszíne 133·02 m²?

155. A tengeren úszik egy 2·4 m. hosszú oldalokkal bíró négyzet-alapú hasábot alkotó jégtömb s a tenger vizéből 6 m. magasra emelkedik ki. Mily nagy a jégtömb súlya, tudva, hogy egy liter tengerviz 1·026 kg-ot és egy dm³ jég 0·8 kg-ot nyom?

156. Számítsuk ki a kocka köbtartalmát *a)* a felszínéből $f = 8{\cdot}64$, *b)* az átlójából $d = 20$, *c)* az átlós metszet területéből $t = 0{\cdot}509117$.

157. Egy kocka köbtartalma k; *a)* mekkora a felszíne? $k = 8$. *b)* mekkora az átlója, ha $k = 192{\cdot}45$?

158. Keressük oly kocka élét, melynek köbtartalma kétszer akkora, mint egy adott kockáé; az utóbbi éle legyen a (Deloszi probléma).

159. Mekkorák két kocka élei, ha köbtartalmaik úgy aránylanak, mint $a^3 : b^3$, és ha ezek összesen akkorák, mint oly kocka, melynek térfogata k? $a : b = 5 : 3$ $k = 4{\cdot}104$.

160. Valamely kocka éle a méterrel hosszabb, mint egy másiké; a két köbtartalom különbsége b m³; mekkorák az élek?

161. Egy háromoldalú oszlop felszíne $518{\cdot}2$ dm², magassága 22 m; míly nagy az oszlop alapéle és térfogata?

162. Mekkora egy egyenes, szabályos hatoldalú prizma köbtartalma, ha alapéle a és magassága b? $a = 0{\cdot}4$, $b = 2\sqrt{3}$.

163. Számítsuk ki egy szabályos nyolcoldalú prizma köbtartalmát, ha alapéle a és oldaléle b. $a = 3{\cdot}4$, $b = 8{\cdot}02$.

164. Valamely prizma súlya $175{\cdot}8$ k, anyagának egy cm³-je $0{\cdot}3$ kg-ot nyom, magassága 3 dm. Mekkora az alapja?

165. Míly súlyos az egyenes, szabályos hatoldalú prizma alakú bazalt-tömb, ha alapjának egy oldala $0{\cdot}24$ m, magassága $2{\cdot}46$ m, a bazalt fajsúlya $2{\cdot}85$?

166. Mekkora az egyenes hasáb felszíne és köbtartalma, ha annak alapja egyenlőszárú háromszög, melynek szára $8{\cdot}6$ dm hosszú és melynek egyenlő szögei $43^0 40' 15''$ nagyságúak, a hasáb magassága pedig 20 dm?

167. Egy prizma alapja 6 m² területű egyenlőszárú háromszög, melynek magassága akkora, mint alapjának fele; míly nagy a test térfogata, ha összes felszíne 21 m²?

168. Mekkora azon háromoldalú hasáb térfogata, melyben az alap két szöge $\alpha = 52^0 16'$ és $\beta = 87^0 20'$, ha az alap $r = 5{\cdot}8$ m-nyi sugarú körbe van írva és a prizma oldaléle $d = 9$ m, az alap felé $71^0 18' 73''$-nyi szög alatt hajlik?

169. Határozzuk meg azon háromoldalú ferde hasáb térfogatát, melynél az alap egyenlőoldalú háromszög; egy alapél hossza 8 dm, egy oldalél hossza 15 dm. és az oldalélek az alappal $48^0 16'$-nyi szöget alkotnak.

170. Egy háromoldalú hasáb alapélei $a = 2{\cdot}18$ m, $b = 1{\cdot}70$ m, a-nak átellenes szöge $\alpha = 58^0 23' 41''$, köbtartalma $k = 26{\cdot}75$ m³. Mekkora a magassága?

171. Egy ferde parallelepipedon egyik csúcsában $a = 4$, $b = 5$, $c = 9$ élek találkoznak. Az élek szögei: $(a\,b) = 35^0 40'$, $(a\,c) = 42^0 15$, $(b\,c) = 51^0 16'$. Mekkora a térfogat?

A gúla felszíne és köbtartalma. 172. Négyzet alapú egyenes piramis alapéle $4{\cdot}5$ cm, magassága 9 cm; mennyi a felszíne és köbtartalma?

173. Egyenes, négyzetalapú piramis alapéle $5{\cdot}6$ m, oldaléle $8{\cdot}3$ m; mekkora a felszíne és köbtartalma?

174. Szabályos ötoldalú piramis alap- és oldaléle 75 cm; mennyi a felszíne és köbtartalma?

175. Szabályos nyolcoldalú gúla alapéle $1{\cdot}5$, oldaléle 6 m; mennyi a gúla köbtartalma?

176. Egy egyenes gúla alapja egyenlőoldalú háromszög, melynek oldala $a = 2·54\sqrt{6}$, oldalélei egymásra merőlegesek; mennyi a felszíne és köbtartalma?

177. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle $a = 2·56$ m, oldaléle az alappal $\alpha = 72^0 28'$-nyi szöget alkot. Mekkora a gúla köbtartalma?

178. Hány kg-ot nyom egy öntött vasból készült szabályos ötoldalú piramis, ha az alapél $a = 1·56$ m, az oldalél hajlásszöge $\alpha = 72^0 45' 32''$, az öntött vas fajsúlya 7·21?

179. Egy szabályos nyolcoldalú gúla alapéle $a = 4$ dm, az alap- és oldalélek által alkotott szög $\beta = 45^0$. Mekkora a test felszíne és köbtartalma?

180. Egy egyenes gúla magassága $m = 37·65$ m, alapja pedig egy $r = 3·15$ m sugarú körbe írt szabályos nyolcszög; míly nagy a gúla köbtartalma?

181. Egy templomtorony teteje egyenes, szabályos nyolcoldalú piramis, melynek egy alapéle $1^2/_3$ m., a piramis magassága $6^2/_3$ m. Mibe kerül a tetőnek rézzel való burkoltatása, ha egy m² burkolat 30 K-ba kerül?

182. Mekkora egy egyenes, szabályos 24 oldalú piramis köbtartalma; ha alapéle $a = 1·8757$, oldallapjának hajlásszöge $\alpha = 87^0 11'$?

183. A négyzetes egyenes piramis köbtartalma 70·4 m³, magassága 3·3 m; mennyi a felszíne?

184. Egy egyenes piramis köbtartalma 5622 cm³, alapja négyzet, melynek területe 1024 m²; oldalélének hajlásszöge $58^0 20' 30''$; mennyi a magasság és az oldalfelszín?

185. A szabályos négyoldalú gúla oldaléle 101 m; az oldalél hajlása az alaplaphoz $73^0 34' 43·7''$; a gúla térfogata 25344 m³; mekkorák az alapélek?

186. Szabályos huszonnégyoldalú piramis felszíne és oldallapjának a hajlásszöge ismeretes; mekkora a köbtartalma?

187. Egy egyenes, homokkőből faragott gúla súlya 4620 kg, magassága 2·4 dm, alapja négyzet, melynek oldala 7 dm-rel hosszabb, mint az oldalél. Míly hosszúak az alapélek és az oldalélek, és mekkora a test oldalfelszíne? (A homokkő fajsúlya 2·5.)

188. Öntött vasból készült piramis súlya 1012·2 kg, alapja négyzet, melynek oldala 45 cm. Míly magas a piramis? (Az öntött vas fajsúlya $s = 7·5$.)

A csonka gúla felszíne és köbtartalma. 189. Egy szabályos hatoldalú csonka gúla alapélei 3·7 és 2·4 m hosszúak, magassága akkora, mint az alsó alap átlója; mennyi a felszíne és köbtartalma?

190. Egy szabályos ötoldalú csonka piramis alapélei 1·2 és 2·5 m hosszúak, magassága 5 m; mennyi a felszíne és köbtartalma?

191. Egy háromoldalú csonka piramis három alapéle $a = 10$, $b = 4·25$, $c = 10·25$, egyik felső alapéle $a_1 = 2$, az oldalél $O = 28$, ennek hajlásszöge $\alpha = 63^0 14'$; mekkora a köbtartalma?

192. Egy 12 m magasságú csonka gúla térfogata 916 m³, az egyik alapterülete 25 m²; mekkora a másik alapterülete?

193. Egy csonka, négyzetalapú egyenes gránitpiramisnak súlya $P = 113888$ k, magassága $m = 25$ dm, alsó éle 16 dm.; mekkora a piramis felső éle, ha a gránit fajsúlya $s = 2·6$?

194. Ismeretes egy négyzetalapú csonka gúla köbtartalma, $k = 74$ dm³; magassága $m = 6$ dm és alapjainak különbsége $d = 7$ dm²? Mekkorák alapjainak élei?

195. Egy szabályos ötoldalú csonka gúla m magasságának felezőpontján át az alaphoz párhuzamos síkot fektetünk; milyen arányú részekre bontja ez fel a csonka gúlát?

Néhány szabályos test felszíne és köbtartalma. 196. Számítsuk ki az öt szabályos test köbtartalmát, ha ismeretesek az élek.

197. Szabályos tetraedron és oktaedron felszíne egyenlő; hogy aránylanak köbtartalmaik?

198. Szabályos tetraedron éle a; mekkora oly kocka felszíne, melynek köbtartalma akkora, mint a tetraedroné? $a = 8{\cdot}3268$.

199. Számítsuk ki a szabályos tetraedron köbtartalmát: *a)* annak magasságából, $h = 8$, *b)* annak felszínéből, $f = 2\sqrt{3}$.

200. Számítsuk ki a szabályos tetraedron élét, ha ismeretes: *a)* a felszíne, *b)* a köbtartalma.

201. Számítsuk ki a szabályos oktaedron élét, ha ismeretes: *a)* a felszíne, *b)* a köbtartalma.

201*a*. Határozzuk meg a szabályos oktaedron köbtartalmát: *a)* a két átellenes csúcs távolságából, *b)* a felszínéből.

202. Ismeretes egy kocka éle; mekkora azon tetraedron térfogata, melynek élei a kockalapok átlói?

203. Számítsuk ki a szabályos tetraedron (oktaedron) felszínét annak köbtartalmából.

204. Egy kocka éle a; mekkora azon szabályos oktaedron köbtartalma, melynek csúcsai a kockalapok középpontjai?

205. Szabályos oktaedron és tetraedron egyenlő felszínüek, hogy aránylanak köbtartalmaik?

206. Hogy aránylanak a gömbbe és köréje írt szabályos tetraedron köbtartalmai?

207. Valamely gömbbe írt szabályos oktaedron köbtartalma k; mekkora az ugyanabba a gömbbe írt szabályos tetraedron köbtartalma? $k = 1000$.

208. Egy r sugarú félgömbbe szerkesszünk kockát, ebbe egy gömböt és e gömbbe egy szabályos tetraedront. Számítsuk ki az utolsónak a felszínét és köbtartalmát. $r = 9$.

209. Egy kockának az éle a. E körül gömböt irunk, e körül szabályos tetraedont, e körül megint egy gömböt és e gömb körül szabályos oktaedront; mekkora ezen oktaedron köbtartalma? $a = \frac{2}{3}$.

A henger felszíne és köbtartalma. 210. Egy egyenes henger alapjának sugara 3·5 m, magassága 15 m; mennyi a felszíne és térfogata?

211. Mennyi a hengeres oszlop térfogata és palástja, ha átmérője 30 cm, magassága 2·8 m?

212. Mennyi az öntött vas henger súlya, ha magassága 3·5 m, kerülete 31·41 mm, fajsúlya 7·2?

213. Mily nagyok az egy liter űrtartalmú henger méretei, ha magassága kétszer akkora, mint átmérője?

214. Valamely kút átmérője 1·6 m; hány l. vizet tartalmaz, ha a víz mélysége 3·2 m?

215 Egy ferde henger 30 cm hosszú tengelye 57^0 28′ 40″ szöget alkot az alapsíkkal, alapsugara 5 m; mily nagy a henger köbtartalma?

216. Az egyenes henger magassága $m = 18$ dm, az alapkör 4·5 dm hosszú húrjával szemben fekvő középponti szög 32^0 26′ 10″; mennyi a henger térfogata?

217. Mily nagy a ferde henger térfogata, ha 36 dm hosszú tengelye az alappal 32^0 47′ 49″ szöget zár be és a merőleges tengelymetszet területe 354·5 dm²?

218. Valamely henger palástja lefejtve négyzet, melynek átlója 10 m; számítsuk ki a henger térfogatát.

219. Mekkora egy egyenes henger térfogata, ha ismeretes a palástja (P) és a felszíne (F)? $P = 1000$, $F = 1025·1327$.

220. Egy egyenes henger alapkörében a 100^0-nyi középponti szög íve 15·7075 dm; mekkora a henger köbtartalma, ha magassága 5·6 dm?

221. Mily nagy azon henger felszíne és térfogata, melynek palástja a 314·1 m² területű alapkörből 125^0 30′ szöggel kivágott szektor területével egyenlő?

222. Mekkora az egyenes henger felszíne és köbtartalma, melyben a tengelymetszet 6·25 dm² és az átló az alappal 50^0 30′ 20″-nyi szöget alkot?

223. A henger tengelye 15 m és az alappal 60^0 18′ 50″ szöget alkot, a henger magassága akkora, mint alapkörének kerülete; mekkora a egyenlő térfogatú kocka egy éle?

224. Egyenes henger térfogatából (k) és alapsugarából (r) számítsuk ki a magasságát. $k = 5025·6$, $r = 8$.

225. A folyadék-mértékek hengeralakúak, magasságuk azonban kétszer akkora, mint átmérőjük. Számítsuk ki az egy- és kétliteres mérték magasságát.

226. A 25 l-es hengeralakú edény 20 cm mély; mennyi az átmérője?

227. A 80 dm²-es derékszögű négyszögalakú bádogból csövet akarunk készíteni; mennyi lesz a cső átmérője és magassága, ha a bádog magassága alapjának $^5/_8$ része?

228. Mekkora azon henger átmérője, melynek magassága 10 és térfogata a 2·5 m élű kockáéval egyenlő?

229. Az egyenes henger köbtartalma 9424·5 m², alap-átmérőjének és magasságának aránya 2 : 3; mennyi a felszíne?

230. A 200 l űrtartalmú hengeralakú edény magassága háromszor akkora, mint az alapkör sugara; mily nagy a sugár magasság és a palást?

231. Egy henger palástja 25 m², magassága akkora, mint átmérője; mekkora a térfogata?

232. Az egyenlőoldalú henger köbtartalma 785·25; mekkora a felszíne és alapkörének sugara?

233. Egy forrás, mely óránként 82 hl vizet ad, hengeralakú medencébe folyik, melynek átmérője 7·5 m; mily magasságnyira telik meg a medence 4 óra alatt?

234. A 100 m. hosszú rézfonal súlya 7·26 kg; mennyi az átmérője? A réz fajsúlya 8·8.

235. A 0·36 m sugarú hengeralakú edénybe 30 kg 13·95 fajsúlyú higanyt, 490 q. 0·79 fajsúlyú borszeszt öntünk; mennyi lesz a folyadékoszlop magassága?

236. Mily nagy a folyadék fajsúlya, ha a belémártott 0·05 m. sugarú, 0·2 magasságú, 7·788 fajsúlyú vashenger benne 9 kg-mot nyom?

237. Egy 0·3 m átmérőjű, 3·5 m hosszú hengergerendából négyzetes, lehetőleg nagy gerendát kell vágni; mennyi lesz az utóbbi térfogata és mennyi a hulladék?

238. Egy egyenlőoldalú henger térforgata 785·25 m^3; mekkora a belőle faragható szabályos nyolcoldalú prizma alap- és oldaléle?

239. A 4·6 dm átmérőjű, 5 dm magasságú, 7·2 fajsúlyú hengerből szabályos nyolcoldalú oszlopot kell vágni; mekkora a súlya?

240. Háromoldalú prizmába hengert irunk; mekkora a henger térfogata, ha a prizma térfogata k és alapjának három oldala a, b, c? $k = 241{\cdot}144$, $a = 44$, $b = 39$, $c = 17$.

241. Mekkora a prizma köré írt henger köbtartalma, ha a prizma köbtartalma K és alapjának két szöge α és β? $K = 0{\cdot}65959$, $\alpha = 69^0\,13'\,12''$, $\beta = 80^0\,11'\,28''$.

242. Az r sugarú egyenes hengerbe szabályos négyoldalú hasábot irtunk, a hasábba egy hengert, a hengerbe hasábot stb. a tengelyig; mekkora a hengerek összege és mekkora a hasábok összege?

243. Egyenes, szabályos háromoldalú hasábba hengert irtunk, a hengerbe ismét szabályos háromoldalú hasábot, ebbe megint hengert stb.; mekkora a palástok összege és mekkora a hengerek összege?

244. Azon egyenes hengerek között, melyek tengelymetszeteinek kerületei egyenlők ($2a$), az a legnagyobb, melynek magassága egyenlő az alap sugarával.

245. Egyenlő felszínű egyenes hengerek között az egyenlőoldalú a legnagyobb és viszont.

246. Egyenlő térfogatú hengerek között melyik az, melynek palástja és egyik alapjának az összege a legkisebb?

Üres henger. 247. Határozzuk meg a hengeralakú csőnek a térfogatát, ha ismeretesek a sugarak R és r és a magasság m. $R = 12$, $r = 8$, $m = 3{\cdot}1$.

248. Milyen súlyos a hengeralakú vasedény, ha magassága 0·9 m. fenekének átmérője 0·7 m és falának vastagsága 0·09 m, ha a vas fajsúlya 7·42?

249. A parafából készült hengerbe, melynek alapköre 36·77 dm sugarú, hengeralakú nyílást kell fúrni, melyet ha ólommal töltünk ki, a henger magasságának $\frac{1}{2}$-ig merül alá a vízben. Milyen sugarúnak kell lennie a nyílásnak? A parafa fajsúlya 0·24, az ólomé 11·33.

250. Egy rézcső hossza $a = 1{\cdot}2$ m, súlya $p = 90$ kg; külső átmérője $d = 0{\cdot}75$ m; mily vastag a fala, ha fajsúlya 9?

251. Egy hengeralakú torony belső sugara 1·5 m, falvastagsága 0·5 m; mily magas a torony, ha falazata 54·9675 m^3?

252. Mily vastag azon öntött vas (fajsúly 7·5) hengeres oszlopnak a fala, melynek kerülete 90 cm, magassága 3·6 m, súlya 650 kg?

A kúp felszíne és köbtartalma. 253. Egyenes kúp alapkörének a sugara 1·56, magassága 0·25; mekkora a felszíne és köbtartalma?

254. Az egyenes kúp alapjának sugara 3·1 m., oldala 4·8; mennyi a felszíne és köbtartalma?

255. Valamely derékszögű háromszög befogói 3 cm. és 4 cm; mennyi a $\triangle$-nek az átfogó körül történő forgásából származott test felszíne és köbtartalma?

256. Valamely derékszögű háromszög két befogója 2·31 és 5·2 m. Ezen háromszög átfogója, mint tengely körül forog. Mekkora az így keletkezett kettős kúp felszíne és köbtartalma?

257. Adott kúp palástját (térfogatát) az alappal párhuzamos síkkal $a:b$ arányban kell osztani; míly távol lesz a metsző sík a csúcstól? $a:b=1:2$.

258. Egyenlőoldalú kúp magassága 0·7; mekkora a felszíne és köbtartalma?

259. Egyenes kúp tengelymetszete 2·0748 m², oldalvonala 2·05 m; mekkora a kúp térfogata?

260. Egyenes kúp oldala $a\sqrt{2}$ és 45° szög alatt hajlik az alaphoz; mekkora a kúp felszíne és köbtartalma?

261. A 12 cm sugarú körhöz tartozó 240° középponti szöggel bíró körszektor valamely kúp palástját alkotja; míly nagy a kúp térfogata?

262. Egy kúp palástja lefejtve félkört alkot, melynek sugara a; mekkora a kúp felszíne és köbtartalma?

263. Az egyenlőoldalú kúp alapkörének egy szektora 12·566 m² területű, középponti szöge 57° 36′; mekkora a térfogat?

264. Mily magasságban kell az egyenes kúpot az alapsíkkal párhuzamosan metszenünk, hogy *a)* palástját, *b)* köbtartalmát felezzük?

265. Egy egyenes kúp alapjában a 60°-nyi középponti szöghöz tartozó szegmentum területe 8·576 dm², a kúp magassága kétszerese az alapsugárnak; mekkora a palást és a térfogat?

266. Egy kúp oldalvonala 10 m, annak a tengelyhez való hajlása 36° 52′ 11″; mennyi a kúp felszíne és köbtartalma?

267. Az egyenes kúp sugara 20 cm, a tengelymetszet szöge a csúcsnál 87° 14′ 20″; mennyi a kúp térfogata?

268. Az egyenes kúp $a=90$ cm-es oldala $\alpha=53^0\,7'\,49''$ alatt hajlik az alaphoz; mennyi a kúp térfogata?

269. Adott kör fölött két egyenes kúp emelkedik, melyeknek oldalai $\alpha=78^0\,50'$ és $\beta=25^0\,40'$-nyi szögeket alkotnak az alapkörrel; mily nagy e két palást közt levő tér felszíne és köbtartalma? $r=5$.

270. Ferde kúp sugara $r=255$ cm, tengelye $a=356{\cdot}74$ cm, ennek hajlása az alaphoz $\alpha=59^0\,41'\,52''$; mily nagy a kúp köbtartalma?

271. Ugyanaz, ha $r=85$ m, $a=118{\cdot}91$ m, $\alpha=68^0\,30'$.

272. Egy ferde kúp merőleges tengelymetszetének területe $t=\frac{15}{4}\sqrt{2}$ dm², a csúcsnál fekvő szöge $\gamma=45^0$, az ezen szöget alkotó oldalak összege $a+b=8$ dm; mekkora a kúp köbtartalma?

273. Mekkora a ferde kúp köbtartalma, ha ismeretes a legnagyobb oldala S, ennek a hajlásszöge α, és a legkisebb oldala s? $S=58$ m, $s=32$ m, $\alpha=65^0\,15'$.

274. Egy egyenes kúp a vizen úszik, a csúccsal lefelé; mennyire merül a víz alá, ha magassága $m = 2\cdot5$ és fajsúlya $0\cdot729$?

275. Egy kör fölött két egyenes kúp áll, a csúcsok távolsága a; mekkora a két palást közt levő tér, ha a tengelymetszetben a csúcsnál fekvő szögek α, illetőleg β? $a = 3\cdot2$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 90^0$?

276. Valamely kúp köbtartalma $k = 12\cdot564$ dm³; magassága akkora, mint az alapkör sugarának másfélszerese; mekkora a palást?

277. Egy egyenes kúp palástja $P = 0\cdot78525$, alapterülete $t = 0\cdot78525$; mily nagy a köbtartalma?

278. Keressük a $2413\cdot8$ m² területü körből $125^0\,20'\,15''$ szöggel kivágott szektor mint palásttól fedett kúp felszínét és köbtartalmát

279. Valamely egyenes kúp térfogata $k = 3\cdot3326$ m³, a tengelymetszet területe 70 m², ennek szöge a csúcsnál $\alpha = 51^0\,43'\,32''$; mily nagy a kúp felszíne?

280. Egyenes kúp köbtartalma $k = 8$ cm³, az alap átmérője úgy aránylik a magassághoz, mint $5:6$; mekkora a palástja?

281. Az egyenes kúp alapterülete $a = 324$ cm², köbtartalma $k = 1580$ cm³; mekkora azon szög, melyet a tengely az oldalvonallal bezár?

282. Az egyenes kúp felülete $= 2\cdot8269$ m², palástja $p = 2\cdot04165$ m²; mekkora a kúp alapja és térfogata?

283. Mekkora azon körszektor középponti szöge, mely oly kúpnak a palástja, melynek köbtartalma $k = 72240$ és magassága $m = 5$?

284. Egy kúp köbtartalma k, lefejtett palástja körszektort alkot, melynek középponti szöge 36^0; mekkora az alap átmérője? $k = 144040$.

285. Az ólomból készült egyenes kúp súlya $P = 936\cdot86$ kg, tengelymetszetének a csúcsnál levő szöge $\alpha = 64^0\,14'\,20''$; mekkora a kúp felszíne, ha az ólom fajsúlya $11\cdot4$?

286. A kúp súlya $12\cdot5$ kg, fajsúlya $3\cdot2$, magassága 30 cm; mennyi a palástja és alapsugara?

287. Az egyenlőoldalú kúp alapkörének sugara $r = 3$ m; mennyi a beleírható szabályos négyoldalú gúla felszíne és térfogata?

288. Milyen az arány az egyenlőoldalú kúp és a beleírható kocka térfogata között?

289. Szabályos hatoldalú hasábra, melynek alapéle a és magassága m, vele egyenlő magasságú kúpot állítunk, melynek alapja a hatszögbe írt kör. Minő arány van *a)* a két test palástja, *b)* egész felületük, *c)* köbtartalmuk közt és mekkorák ezek: ha $a = 4\cdot5$ dm, $m = 8\cdot9$ dm?

290. Valamely gömbbe egyenes kúpot írunk, melynek tengelymetszetében a csúcsnál fekvő szög $\alpha = 34^0\,16'\,38''$. Mekkora ezen kúp palástja és térfogata, ha a gömb sugara $r = 25$?

291. Egyenes szabályos négyoldalú gúla alapéle a, oldaléle egyenlő az alapéllel. E gúlába kúpot írunk, ebbe megint az előbbihez hasonló gúlát s így tovább végtelenig. Mekkora a kúpok palástjainak az összege? Mekkora a gúlák térfogatainak az összege és mekkora a kúpok térfogatainak az összege?

292. Egy egyenes kúp körül háromoldalú piramist írtunk, melynek alapja egyenlőszárú háromszög, melyben az alapon fekvő szög α, a piramis köbtartalma k; mekkora a kúp köbtartalma? $\alpha = 68^0\,20'$, $k = 695\cdot67$.

293. Bizonyítsuk be, hogy: az egyenlő térfogatú egyenes kúpok közt az a legkisebb felszínű, melynek magassága az alap átmérőjével egyenlő.

294. Írjuk az adott egyenes kúpba *a)* a legnagyobb felületű, *b)* a legnagyobb térfogatú hengert.

295. Egyenlő felületű kúpok közt az a legnagyobb, melynek oldala az alapsugár háromszorosa.

Csonka kúp felszíne és köbtartalma. 296. Számítsuk ki az egyenes csonka kúp köbtartalmát k-t, ha ismeretesek az alapsugarak R, r és a magasság m. *a)* $R = 12$, $r = 7$, $m = 1{\cdot}7$. *b)* $R = 0{\cdot}9$, $r = 0{\cdot}09$, $m = 0{\cdot}02$.

297. Mekkora azon egyenes csonka kúp palástja, melynél a tengelymetszet területe t, és az oldalvonal kétszer akkora, mint a magasság?

298. Az egyenes csonka kúp alapkerületei P és p, oldala s; mekkora a palástja? $P = 25$, $p = 17$, $s = 12$.

299. Valamely csonka kúp két alapkörének sugarai 1·25 és 0·6 m, palástja 29·045 m^2; mekkora a test magassága?

300. Valamely csonka kúp két alapkörének sugarai 4 és 2 m, felszíne 107·89 m^2; mekkora a csonka kúp magassága?

301. Valamely csonka kúp két alapkörének sugara $R = 3{\cdot}5$, $r = 2{\cdot}9$ dm, magassága $m = 6$ dm; számítsuk ki a palástját.

302. Valamely egyenes csonka kúp alapjának sugarai 12 m és 7 m, magassága 12 m; mekkora az oldalmagassága, felülete és térfogata?

303. Valamely csonka kúp alakú űr felső kerülete 102 és alsó kerülete 84 cm, magassága 72 cm; hány liter víz fér bele?

304. Az egyenes csonka kúp alsó alapjának átmérője 60 m, a felső alap átmérője 48 m, oldalmagassága 37 m; mily nagy a csonka kúp palástja és köbtartalma?

305. Egyenes csonka kúpnak alapsugarai 17 és 3 dm, az oldalvonal 45^0 alatt hajlik az alaphoz; mekkora a csonka kúp felszíne és köbtartalma?

306. Egy kertben öt egyenlő csonka kúp alakú halmot kell késziteni, úgy, hogy az alsó alap sugara 5·2 m, a felsőé 2·2 m, és az oldala 5 m. legyen; hány köbméter föld kell e halmok elkészítéséhez?

307. Egy 3 m magasságú egyenes csonka kúp felső körének átmérője az oldalvonallal egyenlő, tengelymetszetének kerülete 15 m; mennyi a felszíne és térfogata?

308. Számítsuk ki azon csonka kúp köbtartalmát, melynek felső alapja 3 m^2, az alsóé négyszer akkora s az alsó alap középpontjának távolsága a felső alap szélétől mindenütt egyenlő a felső átmérővel.

309. Az egyenes csonka kúp oldalának hajlása az alaphoz $63^0 48'$, a felső alap sugara 12 dm, az alsóé 20 dm; mekkora a felszíne és köbtartalma?

310. Határozzuk meg azon csonka kúp felületét és köbtartalmát, melynek oldalvonala $o = 17$, annak hajlása az alaphoz $\alpha = 69^0$; az alap sugara $R = 19$.

311. Mily nagy valamely egyenes csonka kúp palástja és köbtartalma, ha a két alap területének különbsége 8 dm^2; a két alap területének aránya 5 : 3 és az oldalvonal hajlása az alaphoz $\alpha = 54^0 24'$?

312. Mekkora azon csonka kúp köbtartalma, melynek alsó alapja 11 cm sugarú, felső alapja 10 cm. sugarú a leghosszabb alkotó az alaphoz $49^0 5$ $20{\cdot}8''$ és a legrövidebb 90^0 alatt hajlik?

313. Mekkora a csonka kúp térfogata, ha palástjának területe $t = 20{\cdot}256$ m², magassága $m = 6$ m, oldalvonala $o = 10$ m?

314. Egy csonka kúp palástját úgy kaptuk, hogy egy 3·141 cm² területű és 16° 40′ középponti szögű körszektorból sugarának felével húzott koncentrikus kör segítségével egy darabot levágtunk; mennyi azon csonka kúp térfogata?

315. Valamely egyenes csonka kúp palástja $P = 128{\cdot}6468$ dm², az oldalvonal hajlása az alaphoz $\alpha = 59^0\ 29'\ 23''$, az alsó és felső alap sugarainak különbsége 33 cm; számítsuk ki a térfogatot.

316. Mekkora szöget alkotnak az egyenes csonka kúp oldalai az alsó alappal, ha ismeretes a köbtartalom k és a két alapkerület P és p? $k = 347{\cdot}162$, $P = 50$, $p = 30$.

317. Csonka kúp köbtartalma k, alsó alapjának sugara R, magassága m; számítsuk ki a felső alap sugarát. $R = 5$ dm, $m = 25$ dm, $k = 1021$ dm³.

318. A csonka kúp alakú edénybe 1·82 fajsúlyú folyadékot öntünk; mennyi annak a súlya, ha az edény magassága 0·2 m, az alapkörök sugarai 0·2 és 0·15 m?

319. Az egyenes csonka kúp köbtartalma 981·3573 cm³, magassága 8·5 cm, oldala 70° 33′ 36″ alatt hajlik az alaphoz; mekkorák az alapsugarak?

320. A kúp magassága 10, alapjának sugara 5 m; mily magasságban kell a kúpot az alappal párhuzamosan metszeni, hogy a nyert csonka kúp térfogata 20 m³ legyen?

321. A csonka kúp köbtartalma k, leghosszabb oldala S, a legkisebb s és a két alapsugár különbsége d; mekkorák az alapsugarak? $k = 8{\cdot}8404$, $S = 1{\cdot}7$, $s = 1$, $d = 0{\cdot}45$.

322. Az egyenes kúp felszíne f, palástjának és alapjának az aránya 4 : 1. A kúpot az alappal párhuzamosan metszettük úgy, hogy az átmetszési kör az alapnak negyedrésze; mekkora a csonka kúp köbtartalma?

A gömb felszíne. 323. Mekkora a gömb felszíne, ha sugara *a)* 1·2, *b)* $19\frac{125}{132}$, *c)* 16·449?

324. A gömb felszínéből számítsuk ki a sugarat. *a)* $f = 50{\cdot}265$, *b)* $f = 254{\cdot}47$.

325. Mekkora az a élű kockába írt gömb felszíne? $a = 0{\cdot}8$. Mekkora a körülirt gömb felszíne? $a = 10{\cdot}80$.

326. Mennyibe kerül a 22·6 cm. sugarú golyó aranyoztatása, ha 100 cm² 60 fillérbe kerül?

327. Földünket tökéletes gömbnek tekintvén, számítsuk ki az egyenlítő kör kerületéből (5400 földr. mérföld, 1 földr. mfd. = 7·420415 km.) a Föld átmérőjét és felszínét.

328. Mennyi r sugarú alap és m magasság mellett az egyenes kúpba írt gömb felszíne? $r = 3{\cdot}69$ m, $m = 8$ m

329. Milyen az arány a közös alapon álló félgömb és kúppalást területe közt, ha a kúp magassága akkora, mint az alapkör átmérője?

330. Mekkora a szabályos hatszög egyik nagy átmérője körül való forgása által keletkezett test felszíne, ha ismeretes a beírt gömb felszíne f? $f = 11\sqrt{3}$.

331. Az egyenes kúpba írt gömb felszíne kétharmada a kúp palástjának; mekkora a gömb sugara, ha ismeretes a kúp alapsugara?

332. A gömb felszíne 1000 cm^2; mennyi a beléje szerkesztett egyenes kúp térfogata, ha tengelymetszetének szöge 45^0?

Gömbsüveg és gömböv felszíne. 333. Valamely gömböt középpontjától $d = 1{\cdot}5$ m. távolságban síkkal átszelünk; mekkora a kisebbik gömbsüveg felszíne, ha a gömbi kör sugara $\rho = 3{\cdot}6$ m?

334. Mily nagy a 2 m. sugarú gömbnek a 25 m távolságban levő fényponttól megvilágított felülete?

335. A gömbsüveg alapsugara ρ, az alap távolsága a középponttól d; mekkora a süveg felszíne?

336. Mily messzire és mekkora területet látunk a Föld felszínéből, ha m magasságra emelkedünk?

337. Mily magasra kell emelkednünk, hogy a Föld felszínéből t területet láthassunk? $t = 182200$ km^2 és a Föld sugara $r = 6370{\cdot}3$ km.

338. Mekkora területűek a Föld övei, ha a Földet gömbnek vesszük, melynek sugara $R = 6370{\cdot}288$ km. (A térítő körök távolsága az egyenlítőtől, úgy a sarki köröké a sarktól: $\varphi = 23^0\ 27'\ 20''$).

339. Számítsuk ki a gömböv felszínét, ha két alapkörének sugarai ρ_1 és ρ_2 és a gömb sugara r adva vannak. $\rho_1 = 33$, $\rho_2 = 25$, $r = 65$.

340. Közös alapon áll egy félgömb és egy egyenes kúp, a kúp magassága a félgömb sugarának a kétszerese; mily arányban osztja a gömblap a kúplap palástját?

341. Egy félgömböt, melynek sugara r, az alappal párhuzamosan metszünk, úgy, hogy az öv és a süveg viszonya $2:3$; mekkora azon egyenlőoldalú henger térfogata, melynek felszíne akkora, mint a süvegé?

342. Egy gömböv alsó körének sugara ρ; lehet-e olyan magas az öv, hogy egész felszíne egyenlő legyen az egész gömb felszínével? Minő magasnak kell lennie, hogy e felszín a gömb felszínének $\frac{1}{4}$ része legyen?

A gömbháromszög felszíne. 343. Számítsuk ki a gömbháromszög felszínét, ha ismeretes a gömb sugara és a gömbháromszög három szöge. *a)* $r = 1$, $\alpha = 20^0\ 9'\ 30''$, $\beta = 55^0\ 53'\ 32''$, $\gamma = 114^0\ 20'\ 14''$. *b)* $r = 2$, $\alpha = 73^0\ 12'\ 8''$, $\beta = 85^0\ 3'\ 14''$, $\gamma = 32^0\ 9'\ 16''$.

344. Ismerjük a gömbháromszög felszínét és szögeit; határozzuk meg a gömb felszínét. $F = 9362$ m^2, $\alpha = 91^0\ 12'\ 17''$, $\beta = 120^0\ 9'\ 41''$, $\gamma = 100^0\ 42'\ 2''$.

345. Egy szabályos háromoldalú piramis csúcsából, mint középpontból, r sugarú gömböt szerkesztettünk; mekkora a gömbfölületnek a piramisban fekvő része, ha a piramis magassága m és alapéle a? $r = 25$ cm, $m = 53$ cm, $a = 47$ cm.

346. Egy 10 m. sugarú gömb fölületén elterülő 356 m^2-nyi gömbháromszög két szöge $56^0\ 8'\ 20''$ és $87^0\ 15'\ 40''$. Keressük a harmadik szöget.

347. Keressük azon piramis alakú test köbtartalmát, melynek alapja az 5 m sugárú gömb felületén $\alpha = 39^0\ 15'$, $\beta = 75^0\ 30'\ 25''$, $\gamma = 96^0\ 45'\ 15''$ szögeket magában foglaló gömbháromszög és melynek magassága a gömb sugara.

348. Számítsuk ki azon gömb sugarát, melynek fölületén az $\alpha = 56^0$, $\beta = 72^0$, $\gamma = 92^0$ szögeket bezáró háromszög területe 132 m^2.

A gömb köbtartalma. 349. Mennyi a gömb köbtartalma, ha ismeretes a sugara? *a)* $r = 1{\cdot}2$, *b)* $r = 0{\cdot}08$, *c)* $= 7{\cdot}816$, $d = 12{\cdot}2233$.

350. Mekkora a gömb sugara, ha ismeretes a köbtartalma k? $k =$ *a)* 523·6, *b)* 904·78, *c)* 1436·77.

351. Számítsuk ki a gömb térfogatát, ha ismeretes a felszíne f. *a)* $f = 314{\cdot}16$, *b)* $f = 12{\cdot}564$.

352. Mennyi a 12 cm külső sugarú és 1 cm falvastagságú üres golyó köbtartalma?

353. Mekkora a gömb felszíne, ha térfogata k? $k =$ *a)* 1229·44, *b)* 64 m^3.

354. A 7·2 fajsúlyú 12 kg-os öntött vasgolyót 0·6 mm vastag arany réteggel kivánjuk bevonni. Mennyi az e célra szükséges arany súlya, ha fajsúlya 19·26?

355. Mennyi a 0·6 fajsúlyú 4 kg-os fagolyó felszíne és térfogata?

356. A 40 cm. átmérőjü 7·2 fajsúlyú üres vasgolyó félig merül el a vízben. Mennyi a golyó falvastagsága?

357. Hány 5 cm sugarú gömb önthető 20 kg ólomból? Az ólom fajsúlya 11·38.

358. Mennyi a 7·2 fajsúlyú, 37·5 kg. súlyú, 4 cm falvastagságú üres vasgolyó átmérője?

359. A vaspléh négyzetdeciméterjének súlya $\frac{1}{12}$ kg. Mekkorának kell a belőle készített üres gömbnek lennie, hogy a vízben úszszék?

360. Határozzuk meg az a élü kockába és köréje írt gömb térfogatát.

361. Számítsuk ki az a élü szabályos tetraedronba és köréje írt gömb felszínét és térfogatát.

362. Ugyanaz a szabályos oktaedronra nézve.

363. Számítsuk ki azon egyenes kúp felszínét, melynek köbtartalma oly gömb köbtartalmával egyenlő, melynek felülete 413 m^2, ha a kúp magassága egyenlő a gömb átmérőjével.

364. A 2 dm átmérőjü hengeralakú edényben 8 dm magasságban víz van. Mennyire emelkedik a víz, ha az edénybe 1·5 dm átmérőjü gömböt merítünk?

365. Egyenlő oldalú háromszög köré kört írtunk; ezen idom a háromszög magassága körül forog. Hogy aránylanak az ezáltal keletkezett gömb és kúp köbtartalmai? Hogyan, ha a kör a háromszögbe van írva?

366. Egy csúcsával lefelé fordított egyenlőoldalú kúpban m magasságig van víz, melybe egy r sugarú gömb egészen elmerül. Mennyivel emelkedik a víz felszíne?

367. Egy kocka éle a; ebbe gömböt írtunk, a gömbbe kockát, ebbe ismét gömböt stb. Mekkora a gömbök összege és a kockák összege?

368. Ugyanaz, ha a test egy szabályos tetraedron.

369. Egyenlőoldalú hengerbe gömböt írtunk, ebbe egyenlőoldalú hengert, ebbe ismét gömböt, stb. Mekkora a gömbök összege és a hengerek összege?

370. Mily nagy azon gömb sugara és köbtartalma, melynek felszíne oly végtelen sok gömb felszínének összegével egyenlő, melyek közül az első sugara 1 dm és minden következőé ötszörte kisebb az előtte állónál?

371. Egy gömb köbtartalma k; ebbe egyenes kúpot írtunk, melynek tengelymetszetében a csúcsnál levő szög α; mekkora e kúp köbtartalma? $k = 0{\cdot}113076$, $\alpha = 60^0$.

A gömb részeinek köbtartalma. 372. Egy egyenes kúp alapja fölött gömbszegmentum áll, melynek középpontja a kúp csúcsa. Mekkora ezen gömbszektor köbtartalma, ha a kúp alapsugara ρ és magassága m? $\rho = 5$, $m = 12$.

373. Keressük az r sugarú körszektornak egyik sugara körül való forgásából származó gömbszektor térfogatát, ha a szektor középponti szöge α. $r = 5$, $\alpha = 45^0$, vagy $r = 5$, $\alpha = 60^0$.

374. Mily nagy a gömbszektor térfogata, ha tengelymetszetének középponti szöge $68^0\ 36'\ 40''$, a gömb sugara 21 cm?

375. A gömbszektor tengely metszetének középponti szöge $123^0\ 51'\ 20''$, palástja 13·5387; mekkora a szektor térfogata?

376. Mekkora a gömbszegmentum köbtartalma, ha ismeretes a magassága m és a gömb sugara r? a) $r = 12$, $m = 9$ b) $r = 4{\cdot}17892$, $m = 9$; c) $r = 6{\cdot}98498$, $m = 20$.

377. A gömbszegmentum köbtartalmából k és magasságából m határozzuk meg a gömb sugarát. $k = 126{\cdot}535$, $m = 3{\cdot}2$.

378. Ismerjük a gömbszegmentum magasságát m-et és alapjának a sugarát ρ-t; mekkora a köbtartalma? $m = 5$, $\rho = 1{\cdot}3611$.

379. Mekkora a gömbszegmentum térfogata, ha ismeretes a magassága m és a gömb felszíne f? $m = 1{\cdot}5$, $f = 139{\cdot}294$.

380. Valamely gömb sugara 3·5 dm. Ha ezt a gömböt két párhuzamos sík által úgy metszük, hogy ezáltal a gömb felszíne három egyenlő részre oszlik, mekkora térfogatú lesz a szegmentum?

381. Mily nagy a 7·8 fajsúlyú 4·5 sugarú vasgömb higany alá merülő térfogat-része, ha a higany fajsúlja 13·6?

382. Egy fából készült golyó, melynek átmérője $d = 10$ m, 4 fokú desztillált vízben annyira merül alá, hogy a kiálló rész magassága $m = 2$ m. Mennyi az illető fanem fajsúlya?

383. Mekkora a szegmentum köbtartalma, ha a hozzátartozó szektor tengely-metszetében a középponti szög $\alpha = 141^0 3'\ 36''$ és a gömb sugara $r = 3{\cdot}18236$ m?

384. Mekkora a gömbkorong köbtartalma, ha az alapsugarak ρ_1 és ρ_2 és a magasság m? $\rho_1 = 56$, $\rho_2 = 25$, $m = 23$.

385. Határozzuk meg a gömbréteg köbtartalmát, ha ismeretes a gömb sugara r, a réteg magassága m és nagyobbik alapjának a távolsága a gömb középpontjától d. $r = 0{\cdot}91695$, $m = 0{\cdot}2$, $d = 0{\cdot}5$.

386. Mekkora a gömbréteg térfogata, ha adva van a gömb sugara r és a réteg két alapsugara ρ_1 és ρ_2? $r = 25$, $\rho_1 = 24$, $\rho_2 = 15$.

387. Mily nagy a 25 cm sugarú gömbön a középponttól 3 és 15 cm távolságban ugyanazon oldalon fekvő párhuzamos körök által határolt réteg palástja és térfogata?

388. Egyenes henger köré gömböt írtunk. A henger magassága $2\frac{2}{3}$-szor akkora, mint alapsugara. Hogy aránylik a hengeralapok által határolt gömbréteg a szegmentumhoz?

389. Egy gömbrétegbe csonka kúpot írtunk, melynek köbtartalma $k = 298{\cdot}95$ m², oldalának hajlásszöge $\alpha = 53^0\,7'\,48''$, magassága $m = 4$. Mekkora a réteg köbtartalma?

Vegyes feladatok. 390. Keressük a háromoldalú piramis köbtartalmát, ha alapjának egy oldala a, a rajta fekvő két szög β, γ; a piramis magassága az alapba írt kör sugarának a háromszorosa. $a = 32{\cdot}65$, $\beta = 40^0\,15'$, $\gamma = 50^0\,10'\,30''$.

391. Mekkora azon szabályos nyolcoldalú gúla alakú toronytető magassága, melynek alapéle $1\frac{2}{3}$ m, beburkoltatására pedig ugyanannyi rézlemez szükséges, mint egy félgömbalakú kupola számára, melynek sugara $3\frac{1}{3}$ m?

392. Hány darab 30 cm hosszú, 15 cm széles és 10 cm vastag tégla szükséges a 10 m magas, szabályos nyolcoldalú kémény felépítéséhez, ha a szemben fekvő csúcsok távolsága alant 4 m, fent 1 m, és ha a köralakú nyílás átmérője alant 1 m, fent 0·5 m?

393. Valamely háromoldalú hasáb oldaléle $d = 7$ dm, és $\delta = 60^0$ alatt hajlik az alaphoz. Az alap az $r = 3$ dm sugarú körbe írt háromszög, melynek szögei $\alpha = 50^0\,7'$, $\beta = 70^0\,13'$. Mekkora a hasáb köbtartalma?

394. Egy háromszögben $a = 101$ m, $b = 21$ m, $\alpha = 43^0\,36'\,10''$; számítsuk ki azon gúla köbtartalmát, melynek alapja ezen háromszög, magassága pedig az ezen háromszögbe írt kör sugarának ötszöröse.

395. Valamely henger 6·4 m hosszú tengelye az alappal $\alpha = 27^0\,18'\,44''$-nyi szöget alkot; a magassága annyi, mint az alapkör sugara. Mekkora a hengerrel egyenlő köbtartalmú egyenlőoldalú kúp sugara?

396. Egy egyenlőoldalú henger oldalvonalának hosszát méterekben ezen egyenlet gyöke adja: $\sqrt{2x+2} + \sqrt{7+6x} = \sqrt{7x+2}$. Irjunk e hengerbe egy gömböt és egy kúpot, számítsuk ki e három test felszínét és köbtartalmát, és mutassuk meg, hogy felszíneik, illetve köbtartalmaik hogy aránylanak?

397. Egy hengerben, melynek alapsugara r, bizonyos magasságig víz van. Mennyivel fog ez emelkedni, ha egy szabályos tetraëdront teszünk bele, melynek éle a, és mely egészen alámerül? $a = 5$, $r = 4$.

398. Az egyenes kúp két alkotója α szöget alkot, az alkotók e tengellyel β szöget alkotnak és az alapnak az alkotók végpontjaihoz húzott sugarai γ szöget fognak be. Keressük e három szög közötti összefüggést.

399. Valamely kúp alapjának a sugarát azon végtelen mértani haladványnak az összege adja, melynek első tagja 30, hányadosa $\frac{1}{4}$; felszíne akkora, mint egy oly henger palástja, melynek magassága félakkora, s alapja négyszer akkora, mint a kúpé. Mekkora a kúp magassága?

400. Míly nagy azon egyenes csonka kúp köbtartalma, melynél az alapok területeinek különbsége 8 dm², kerületeinek aránya 5 : 3 és az oldal az alsó alappal oly hajlásszöget alkot, mely ezen egyenletnek: $\frac{4}{3} \sec\alpha + 6\,tg\,\alpha = cotg\,\alpha$ gyöke.

401. Míly nagy azon test felszíne és köbtartalma, mely úgy származik, hogy egy egyenlőszárú háromszöget alapja körül forgatunk, ha a háromszög alapját ezen egyenlet: $(x+8)(2x-3) + x^2 = (x - 47(x+2) + 82x$ nagyobbik, egyenlő szárát pedig ugyanazon egyenlet kisebb gyöke adja?

402. Az egyenes kúp alapja köré írt háromszög oldalai 3, 4, 5 m; a tengelymetszet köré írt kör sugara 2 m; mennyi e kúp felszíne és köbtartalma?

403. Egy egyenes csonka kúpból vágjuk ki a lehető legnagyobb szabályos négyoldalú csonka piramist; mekkora ennek a köbtartalma, ha a csonka kúp magassága és alapsugarai ismeretesek?

404. Határozzuk meg a ferde kúp köbtartalmát, ha ismeretes merőleges tengelymetszetének a csúcsnál fekvő szöge β, az e szöget felező egyenes a, és az alap átmérője.

405. Egy henger tengelyének a hajlásszöge α, magassága akkora, mint alapjának kerülete, és köbtartalma oly kúp köbtartalmával egyenlő, melynek magassága egyenlő a henger tengelyével és melynek alapsugara r. Mekkora a tengely? $\alpha = 68^0\,34'\,36''$, $r = 8$.

406. Mennyi a vízen úszó oly kúpalakú jégtömeg súlya, melynek a víz színén úszó kerülete 25·12 m és kiálló részének oldala 5 m, ha a jég fajsúlyát 0·9-nek, a vizét pedig 1-nek vesszük?

407. Valamely szeszgyárban 40922 dm^3 köbtartalmú csonka kúpalakú gyűjtőedényre van szükség. A sugarak méreteit deciméterekben a következő egyenlet gyökei képviselik: $x\,(160-3\,x) = 1647 + \frac{3}{2}\,(45-x)^2$. Mily mélynek kell az edénynek lennie, és hány fok alatt kell oldalának az alapjához hajolnia?

408. Egy gömbbe írt csonka kúp oldala s, magassága m, és palástja akkora, mint a két alap összege. Mekkora a gömb felszíne? $s = 37, m = 12$.

409. Valamely 10 dm sugarú gömbön egy gömbháromszög oldalai $a = 45^0\,28'\,35''$, $b = 69^0\,42'\,20''$, $c = 70^0\,40'\,25''$; mekkora a gömbháromszög csúcsait összekötő egyenesek által alkotott síkháromszög területe, körülírt körének sugara, és mekkora azon piramis köbtartalma, melynek alapja a háromszög, csúcsa a gömb középpontja?

VII. fejezet. Gömbháromszög-mértan.

Derékszögű gömbháromszögek megfejtése. 410. Fejtsük meg a derékszögű gömbháromszöget, ha ismeretes:

1. Az átfogó (a) és egy befogó (b) vagy (c). $a = 54^0\,20'$, $b = 36^0\,27'$, vagy $a = 54^0\,20'$, $c = 43^0\,32'\,31''$.

2. Az átfogó (a) és egy szög (β) vagy (γ). *c)* $a = 87'\,13'\,13''$, $\beta = 65^0\,55'\,55'$ *b)* $a = 80^0\,6'\,5''$, $\gamma = 88^0\,45'\,23''$.

3. A befogó és az átellenes szög. *a)* $b = 36^0\,27'$, $\beta = 46^0\,49'\,17''$; *b)* $c = 33^0\,12'\,40''$, $\gamma = 88^0\,45'\,23''$.

4. A befogó és a mellette fekvő szög. *a)* $c = 43^0\,32'\,31''$, $\beta = 46^0\,49'\,17''$; *b)* $b = 65^0\,46'\,53''$, $\gamma = 83^0\,48'\,11''$.

5. A két befogó. *a)* $b = 33^0\,12'\,40''$, $c = 87^0\,43'\,50$; *b)* $b = 65^0\,46'\,53''$, $c = 83^0\,12'\,38''$.

6. A két szög. *a)* $\beta = 46^0\,49'\,17''$, $\gamma = 57^0\,59'\,17''$, *b)* $\beta = 30^0\,13'\,56''$, $\gamma = 88^0\,45'\,23''$.

411. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű gömbháromszögben:

a) $\sin^2 b + \sin^2 c - \sin^2 \alpha = \sin^2 b \sin^2 c$; *b)* $\operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \gamma = \cos b \cos c$; *c)* $\sin^2 b \cos^2 c = \sin (a-b) \sin (a+b)$.

412. A derékszögű gömbháromszög befogói $b = 65^0\,24'$, $c = 64^0\,16'$; mily nagy a szférikus fölösleg?

A ferdeszögű gömbháromszög megfejtése. 413. Fejtsük meg a ferdeszögű gömbháromszöget a következő adatok alapján:

1. $a = 67^0\ 12'$, $b = 50^0$, $c = 52^0\ 55'\ 26''$.
2. $\alpha = 112^0\ 48'$, $\beta = 60^0\ 25'\ 11''$, $\gamma = 109^0\ 46'\ 19''$.
3. $a = 69^0\ 25'\ 11''$, $b = 56^0\ 50'\ 51''$, $\gamma = 54^0\ 54'\ 42''$.
4. $\alpha = 63^0\ 15'\ 12''$, $\beta = 135^0\ 33'\ 39''$, $c = 120^0\ 55'\ 35''$.
5. $a = 133^0\ 0'\ 18''$, $b = 122^0\ 0'\ 43''$, $\alpha = 143^0\ 33'\ 0''$.
6. $\alpha = 67^0\ 12'$, $\beta = 88^0\ 12'\ 20''$, $a = 50^0\ 2'\ 1''$.
7. $a = 125^0\ 5'\ 18''$, $b = 56^0\ 11'\ 66''$, $c = 123^0\ 21'\ 13''$.
8. $\beta = 55^0\ 11'\ 56''$, $\gamma = 59^0\ 56'\ 10''$, $a = 67^0\ 12'$.
9. $b = 56^0\ 11'\ 56''$, $c = 32^0\ 12'\ 13''$, $\gamma = 39^0\ 52'\ 4''$.
10. $\alpha = 143^0\ 33'\ 0''$, $\beta = 136^0\ 27'\ 29''$, $a = 133^0\ 0'\ 18''$.

414. Valamely gömbháromszög három adott oldalából (a, b, c) határozzuk meg az egyik (A) szögpontból az átellenes (a) oldalra merőlegesen húzott főívnek hosszát (p-t).

$$sin\, p = sin\, c\; sin\, \beta = \frac{2}{sin\, a} \cdot \sqrt{sin\, s .\, sin\,(s-a)\, sin\,(s-b) .\, sin\,(s-c)}.$$

415. Valamely gömbháromszög három adott oldalából határozzuk meg azon főív hosszát (k), amely a háromszög egyik szögpontját (A-t) az átellenes oldal (a) felező pontjával összeköti; szóval keressük a gömbi középvonalat k-t.

$$cos\, k = \frac{cos\, b - cos\, c}{2\, cos\, \frac{1}{2} a} = \frac{cos\, \frac{1}{2}(b+c) .\, cos\, \frac{1}{2}(b-c)}{cos\, \frac{1}{2} a}$$

416. A gömbháromszög valamelyik szögét felező főív az átellenes oldalt akkép szeli, hogy a két szelet sinusai a szomszédos oldalok sinusaival egyenlő arányúak. (Vesd össze a síkmértan 38. §. 6. tételével.)

417. Mily nagy az 5 m sugarú gömbön az $a = 25^0\ 13'\ 12''$, $b = 37^0\ 14'\ 9''$, $c = 58^0\ 31'\ 51''$ oldalok által adott gömbháromszög területe?

418. Mily nagy az 5 m sugarú gömbön az $\alpha = 25^0\ 13'\ 12''$, $\beta = 51^0\ 13'\ 11''$, $\gamma = 72^0\ 26'\ 40''$ által adott gömbháromszög területe?

419. Fejtsük meg a gömbháromszöget, ha ismeretes $c = 104^0\ 16'\ 20''$, $a + b = 262^0\ 20'\ 18''$, $\gamma = 90^0$.

VIII. fejezet. A gömbháromszögmértan nehány alkalmazása.

Alkalmazás a sztereometriára. 420. Határozzuk meg valamely ferdeszögű parallelepipedonnak három a, b, c összeérő éléből és három γ, β, α szögéből, melyeket az élek alkotnak, a köbtartalmat.

421. A henger tengelymetszete, melynek a a tengelye, az r sugarú alaphoz α szög alatt hajlik, az alapsíkot oly egyenesben metszi, mely a tengely vetületével β szöget alkot; mi a tengelymetszet vetülete?

422. A háromoldalú piramisból ismeretes a csúcsból kiinduló három él és az ezeken nyugvó három lapszög; mennyi a köbtartalom?

423. Határozzuk meg a háromoldalú gúla valamely csúcsában találkozó három élből és az ezektől alkotott szögekből a gúla köbtartalmát.

424. Szabályos-tízoldalú piramisnak a csúcsnál lévő lapszögéből határozzuk meg az oldallapok hajlását az alaphoz.

425. Valamely síkon álló egyenes a síkhoz $\alpha = 10^0$ alatt hajlik; ezen egyenes talppontján átmenő és a síkban fekvő egyenes az elsőnek a projekciójával $\beta = 35^0$ szöget alkot. Mekkora szöget alkot ezen egyenes az első egyenessel?

426. Szabályos hatoldalú piramis oldalai 10 m hosszúak és $\alpha = 72^0$ alatt hajlanak az alaphoz. Határozzuk meg az oldallapok hajlását.

Két geografiai hely távolsága. 427. Ismeretes két város földrajzi szélessége és hosszúsága (Greenwichtől); határozzuk meg távolságukat:

Arad --- ---	46⁰ 9′ 30″	21⁰ 19′ 24″	Szeged --- --- ---	46⁰ 15′ 15″	20⁰ 8′ 30″
Budapest ---	47⁰ 29′ 36″	19⁰ 3′ 48″	Temesvár --- ---	45⁰ 45′ 36″	21⁰ 15′ 18″
Debrecen ---	47⁰ 51′ 40″	21⁰ 37′ 7″	Ungvár --- --- ---	48⁰ 30′ 30″	22⁰ 19′ 12″
Eger --- ---	47⁰ 53′ 29″	20⁰ 22′ 42″	Veszprém --- ---	47⁰ 5′ 8″	19⁰ 8′ 8″
Fiume --- ---	45⁰ 19′ 39″	14⁰ 26′ 33″	Bécs --- --- ---	48⁰ 12′ 37″	16⁰ 22′ 41″
Győr --- ---	47⁰ 41′ 15″	17⁰ 38′ 18″	Berlin --- --- ---	52⁰ 30′ 30″	12⁰ 23′ 17″
Kalocsa ---	41⁰ 31′ 42″	18⁰ 58′ 54″	Konstantinápoly	41⁰ 0′ 30″	28⁰ 58′ 18″
Kassa --- ---	48⁰ 42′ 30″	21⁰ 15′ 48″	Lipcse --- --- ---	51⁰ 20′ 26″	12⁰ 23′ 30″
Kolozsvár ---	46⁰ 44′ 8″	23⁰ 35′ 43″	London (Greenwich) .	51⁰ 28′ 18″	0⁰ 0′ 0″
Lőcse --- ---	49⁰ 0′ 45″	20⁰ 39′ 5″	München --- ---	48⁰ 8′ 48″	11⁰ 36′ 30″
Nagyvárad ---	47⁰ 2′ 50″	21⁰ 56′ 2″	New-York --- ---	40⁰ 45′ 24″	73⁰ 58′ 24″
Pécs --- ---	46⁰ 4′ 30″	18⁰ 14′ 0″	Páris --- --- ---	48⁰ 50′ 12″	2⁰ 20′ 12″
Pozsony ---	48⁰ 8′ 48″	17⁰ 6′ 30″	Pétervár --- ---	59⁰ 56′ 30″	30⁰ 17′ 48″
Sopron --- ---	47⁰ 41′ 12″	16⁰ 35′ 42″	Róma --- --- ---	41⁰ 53′ 54″	20⁰ 28′ 40″
Sz.-Fehérvár	47⁰ 11′ 54″	18⁰ 22′ 28″	Washington ---	38⁰ 53′ 34″	282⁰ 58′ 10″

428. A Föld két pontja ugyanazon szélességi körön fekszik: közös földr. szélességük φ, hosszúságaik λ_1 és λ_2; mily nagy a legrövidebb távolságuk és mily nagy a távolságuk a szélességi körön? $\varphi = 45^0$, $\lambda_2 = 90^0$, $\lambda_1 = 45^0$.

429. A Föld két pontjának szélessége φ_1 és φ_2, legrövidebb távolságuk d; mennyi hosszúságuk különbsége?

430. A greenwichi csillagvizsgáló intézetnek hosszúsága (Páristól) $2^0 20' 23''$, szélessége $51^0 28' 38''$ és New-Yorktól 794 földr. mérföldnyire van. Ha New-York szélessége $40^0 45' 24''$, mekkora a hosszúsága?

ANALITIKAI SÍKMÉRTAN.

Kilencedik fejezet.

Az algebra alkalmazása a mértanra.

43. §. Előleges észrevételek.

Az *elemző vagy analitikai mértan* jellemző tulajdonsága az, hogy a térmennyiségek viszonyainak fejtegetésére az algebrát alkalmazza.

Viéte (francia matematikus a 16. század második felében) volt az első, aki az algebrát mértani föladatok megfejtésére alkalmazta. Ő t. i. a térmennyiségeket betűszámokkal fejezte ki és a feladat ismeretes és ismeretlen mennyiségei közt lévő viszonyokat egyenletbe foglalta, amelyből az ismeretlen mennyiség értéke kiszámítható volt. Ez úton számos mértani föladat nagyon könnyen fejthető meg, ami különben az algebra segítsége nélkül nem csekély nehézségeket okozna.

Még nagyobbszerű és gyümölcsözőbb volt Descartes René (élt 1596—1650-ig) gondolata; ő az algebrát a görbe vonalak elméletére alkalmazta (1637) és ezeket, mint meghatározott tulajdonságú pontok mértani helyét, *egyenlettel* fejezvén ki, ez utóbbiból a görbe vonal összes tulajdonságait leszármaztatta.

Descartes ezen módszerét *elemző* vagy *analitikai mértan*nak nevezik. Később élő matematikusok e módszert a görbe lapokra és a kétszer görbült vonalakra is alkalmazták; ennek következtében az elemző mértan két részre oszlik, az egyik a két-, a másik a háromméretű térmennyiségeket tárgyalja: Analitikai sík- és térmértan. Mi csakis az előbbivel fogunk foglalkozni.

Lássuk előbb Viéte módszerének alkalmazását *határozott* mértani föladatok megfejtésére:

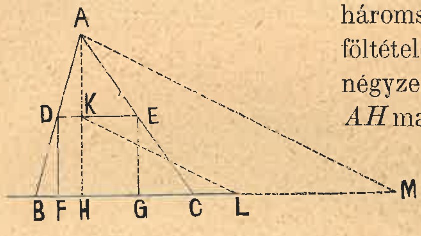
Tudvalevő, hogy a térmennyiségek, nevezetesen a vonalak, területek és testek, *számokkal* fejezhetők ki. E számok az illető térmennyiségnek a hasonló nembeli egységhez való arányát szabják meg, és általánosság kedvéért betűszámokkal helyettesíttetnek. Kétséget nem szenvedhet, hogy az utóbbiakra az algebra törvényei

9*

alkalmazhatók, amint hogy e törvényeket már eddigelé is több izben, különösen a háromszög-mértanban, valóban alkalmaztuk is. Mindenek előtt lássuk az algebra alkalmazását valamely könnyebbféle mértani feladatra.

Adott háromszögbe szerkesszünk szabályos négyszöget akkép, hogy az utóbbinak egyik oldala a háromszög alapvonalára essék.

85. ábra.



Legyen ABC (85. ábra) az adott háromszög. A föladatot megfejtettnek föltételezvén, legyen $FDEG$ a keresett négyzet. A háromszög BC oldalát a-val, AH magasságát m-mel, a négyzet ismeretlen oldalhosszát x-szel jelöljük. Azonnal szembetünik, hogy $ADE \triangle \backsim ABC \triangle$-hez, tehát:

$$x : a = (m - x) : m,$$

következőleg:

$$mx = am - ax, \text{ vagy:}$$

$$(a + m)\, x = am \text{ és:}$$

$$x = \frac{am}{a+m}.$$

x tehát nem egyéb, mint az $a + m$, a, és m-nek megfelelő negyedik arányos vonal. Hogy e negyedik arányost magában a háromszögben megtalálhassuk, hosszabbítsuk meg BC alapvonalat és mérjük fel $HL = a$, továbbá $LM = m$ darabot, húzzuk meg AM egyenest és L ponton keresztül LK párhuzamost, mely AH magasságot K pontban szeli. E szerkesztésben:

$$HM : AH = HL : HK, \text{ vagy:}$$

$$(a + m) : m = a : HK, \text{ és ebből:}$$

$$HK = \frac{am}{a+m},$$

tehát $HK = x$, vagyis a keresett oldal.

Látni e példából, hogy valamely mértani feladat algebrai megfejtésénél három dolgot kell szemmel tartanunk:

1. Miután a feladatban előforduló térmennyiségeket betükkel megjelöltük, mégpedig az algebrában szokásos eljárás szerint az *ismert* mennyiségeket a, b, c, . . . az *ismeretleneket* x, y, z-vel, az adott és keresett mennyiségek közt létező térviszonyokat egyenletekbe foglaljuk, azaz a mértani feladatot algebrai nyelven kifejezzük.

2. Ezen egyenletekből az ismeretlen mennyiségeket az algebra törvényei szerint kiszámítjuk. Végre:

3. A talált eredményeket mértanilag ábrázoljuk, vagyis az ismeretlen mennyiségeket vonalzó és körző segítségével *megszerkesztjük.*

Az 1. pontra nézve általános szabályokat megállapítani nem lehet, mert az *itélő* tehetség dolga, hogy a mértani tételek sorozatából a feladat megfejtésére alkalmasakat kiszemelje. E művelet a mértan alapos ismeretét föltételezi s ezenkívül gyakorlottságot és ügyességet kiván.

A 2. pontra az algebra segítségével könnyen megfelelhetünk. A 3. pontra nézve a következő §-ok adnak felvilágosítást.

44. §. Az egynemű algebrai kifejezésekről.

Mielött az algebrai kifejezések mértani ábrázolását tárgyalnók, az egyenletek egynemüségéről kell röviden szólanunk.

Valamely algebrai kifejezést, vagy egyenletet akkor mondunk *egynemű*nek, ha a betük kitevőinek összege minden tagban egyenlő. Ezen összeget a kifejezés *méreté*nek (dimenzio) nevezzük. Megjegyzendö, hogy a méret meghatározásánál az együtthatókat (koefficiens) nem vesszük számba. Eszerint $4ab$ kétméretü kifejezés. Hasonló áll a szögmértani számokra nézve is, melyek, mint elvont számok, a kifejezés méretét nem módosítják.

Tört kifejezéseknél a méretet úgy határozzuk meg, hogy a számláló méretéből a nevezőét kívonjuk. Igy $\frac{3\,ab^2}{4\,cd}$ egyméretü kifejezés. Hatványmennyiségeknél az alap méretét a hatványkitevővel megszorozzuk; gyökmennyiségeknél pedig a gyökjel alatti mennyiség méretét a gyökkitevővel elosztjuk.

Igy pl. $\left(\frac{ab}{c}\right)^2$ kétméretü, $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ egyméretü kifejezés, mert az utóbbi esetben a gyökjel alatti tagok mindegyike kétméretü és a gyökkitevő is kétméretü, tehát a méretek hányadosa $= 1$.

A méret fogalma, mint már a név is mutatja, mértani felfogáson alapszik, melynélfogva a vonalnak *egy*, a lapnak *két*, a testnek *három* kiterjedése vagyis mérete lévén, a vonalhosszat pl. a-val, a területet ab-vel, a köbtartalmat abc tényezőkkel fejezzük ki.

Ezek szerint, ha $a, b, c \ldots x$ betük vonalhosszakat jelentenek, a következő egyenletek: $x = \frac{ab}{c} + d$, és $x = \frac{a}{2} +$

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}$ egynemüek, mert mind a két oldaluk egyenlő méretü. Ellenben $ax+s=3\sqrt{v.x}$ nem egynemü.

Különben az utóbbi egyenlet egynemüvé válik azon esetben, ha a és x vonalakat, s területet és v térfogatot jelentenek.

Az egynemüség törvénye. Ha valamely mértani feladatban minden előforduló vonalat egy-egy betüvel megjelölünk, a megfejtő egyenletnek szükségkép egynemünek kell lennie, amint ezt már az elemi mértan tantételeiből folyó egyenletek is eléggé igazolják. (Példák). De ezen egynemüség azonnal megszünik, mihelyt az adott vonalak valamelyikét egységül választjuk; mert ekkor a megfelelő betü mint tényező és osztó elmarad az egyenletből.

Igy pl. ha $x=\frac{abc}{m^2}$ egyenletben m-et egységül vesszük, tehát $m=1$, akkor $x=abc$ már nem egynemü.

Az ekkép megzavart egynemüséget azonban könnyen helyre állíthatjuk; evégből t. i. a hosszegységet valamely betüvel λ-val megjelöljük és azt minden tagba a kellő hatványban tényező- vagy osztókép visszahelyezzük.

Igy pl. $x=ab$ egyenlet, mint mértani kifejezés, képtelennek látszik, mert a bal oldal 1-, a jobb oldal 2-méretü; az előbbi tehát vonalat, az utóbbi meg területet jelent. Ámde a látszólagos képtelenség azonnal megszünik, mihelyt ama egyenletben x, a, b helyett $\frac{x}{\lambda}$, $\frac{a}{\lambda}$, $\frac{b}{\lambda}$-t irunk, ahol λ a hosszúság egységet jelenti; ekkor t. i.

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{ab}{\lambda^2}, \text{ vagy: } x=\frac{ab}{\lambda}.$$

Hasonlóképen, ha valamely mértani föladat ily egyenletre vezetett:

$$x=\frac{a-b^2}{cm}$$

föltehetjük, hogy az adott vonalak valamelyike egységül szolgált. Ez utóbbit λ-val jelölve, x, a, b, c, m helyébe $\frac{x}{\lambda}$, $\frac{a}{\lambda}$, $\frac{b}{\lambda}$, $\frac{c}{\lambda}$, $\frac{m}{\lambda}$ helyettesítése után lesz:

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{\frac{a}{\lambda}-\frac{b^2}{\lambda^2}}{\frac{c}{\lambda}\cdot\frac{m}{\lambda}}=\frac{a\lambda-b^2}{cm},$$

vagy: $x=\frac{a\lambda^2-b^2\lambda}{cm}$ és ez már egynemü.

45. §. Az első- és másodfokú egyenletek mértani szerkesztése.

Itt csak az *első- és másodfokú határozott* egyenletek mértani alakítását tárgyaljuk és ezek közül is csak az *egynemüeket* vesszük tekintetbe, mert a különnemüek úgyis egynemüekké változtathatók.

I. Minden egynemü elsőfokú egyenlet a következő három fő képlet egyikére vezethető vissza:

$x = a + b \ldots (1)$ $\quad x = a - b \ldots (2)$ $\quad x = \frac{ab}{c} \ldots (3)$

1. $a + b$ mértanilag két egyenes vonal összegét jelenti; az (1) képletet tehát ugy ábrázoljuk, hogy valamely határozatlan hosszúságú egyenes vonalra a és b egyeneseket egymás mellé kimérjük.

2. $a - b$ mértanilag két egyenes vonal különbségét jelenti; ennélfogva a (2) képletet így szerkesztjük: valamely határozatlan hosszúságú egyenesre bizonyos ponttól az egyik irányban kimérjük a egyenest, ennek végsö pontjától pedig ellenkező irányban b-t. Ha $a > b$-nél, $a - b$ ugyanazon irányba esik, mint a, ellenben, ha $a < b$-nél, akkor $a - b$ az a-hoz képest ellenkező irányba esik.

3. A (3) képletben $c : b = a : x$, ahol x a többi 3 egyenes 4-ik arányosa s így szerkesztése a síkmértanból ismeretes.

Példák. 1. Szerkesszük meg e kifejezést: $x = \frac{ab}{c-d}$

Előbb szerkesszük meg $c - d = l$ egyenest, akkor $x = \frac{ab}{l}$ és ezen kifejezés a (3) képlettel megegyező alakú.

2. példa. $\quad x = \frac{abc + def - ghi}{kl}$

E kifejezést így is írhatjuk:

$$x = \frac{abc}{kl} + \frac{def}{kl} - \frac{ghi}{kl}.$$

Ámde $\frac{abc}{kl} = \frac{ab}{k} \cdot \frac{c}{l}$, keressük tehát $\frac{ab}{k} = m$ egyenes vonalat, ezután pedig $\frac{mc}{l} = A$ egyenest; szintúgy $\frac{def}{kl} = B$-t, és $\frac{ghi}{kl} = C$-t, végre:

$$x = (A + B) - C \text{ egyenest.}$$

3. példa. $\quad x = \frac{abc}{de + fg}.$

A nevezőt ily alakban írhatjuk:

$$de + fg = d\left(e + \frac{fg}{d}\right).$$

Keressük tehát előbb $\frac{fg}{d} = k$ egyenes vonalat, ezután $e + k = l$-et; végre $\frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{l} = x$-et úgy, mint föntebb.

4. példa. $\quad x = \frac{a^2b - adc}{de + fg}.$

Itt ismét $de + fg = d\left(e + \frac{fg}{d}\right) = d(e + k) = dl$, tehát:

$$x = \frac{a^2b - adc}{dl} = \frac{a^2b}{dl} - \frac{adc}{dl}.$$

Azonban $\frac{a^2b}{dl}$, vagyis $\frac{ab}{d} \cdot \frac{a}{l}$ és $\frac{adc}{dl}$ vagyis $\frac{ac}{l}$ kifejezések alakítása az első példából ismeretes; legyen tehát $\frac{a^2b}{dl} = m$, és $\frac{ac}{l} = n$ ezek következtében: $x = m - n$, és e különbséget a (2) pont szerint szerkesztjük.

II. *A)* Minden tiszta másodfoku egyenlet a következő alakok egyikére vezet:

$$x = \sqrt{ab}\ (1), x = \sqrt{a^2 + b^2}\ (2), x = \sqrt{a^2 - b^2}.\ (3)$$

Az (1) egyenletben x mértani középarányos a és b egyenesek közt. A középarányos szerkesztése pedig a síkmértanból ismeretes.

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$ mértanilag oly derékszögü háromszög átfogóját jelenti, melynek befogói a és b.

Végre $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ valamely derékszögü háromszög egyik befogóját jelenti, melynek átfogója: a, másik befogója: b. Ezen háromszögek alakítása a síkmértanból ismeretes.

Példák. Szerkesszük e kifejezést:

$x = \sqrt{a^2 + bc}$. Előbb keressük $\sqrt{bc} = m$ egyenest, ekkor $bc = m^2$, tehát $x = \sqrt{a^2 + m^2}$, mi a föntebbi (2) alakkal megegyezik.

2. $x = \sqrt{\frac{a^2 b}{c}}$. Itt $x = \sqrt{\frac{a^2}{c} b}$, keressük tehát $\frac{a^2}{c}$ vagyis $\frac{a \cdot a}{c} = l$ egyenes vonalat, azután $x = \sqrt{bl}$-et az (1) képlet alapján.

3. $x = \sqrt{\frac{a^2b - c^2d}{f + g}}$. Előbb keressük $f + g = k$ egyenest, ezután $\sqrt{\frac{a^2b}{k}} = l$ és $\sqrt{\frac{c^2 d}{k}} = m$ egyenes vonalakat, végül $x = \sqrt{l^2 - m^2}$ befogót.

II. *B)* A vegyes másodfokú egyenlet általános alakja ez:

$$x^2 \pm ax = \pm c.$$

Minthogy a baloldal, mint két méretü kifejezés, területet jelent, az egyenlet mértanilag csak úgy állhat meg, ha a jobb oldal (c) is — a jeltől eltekintve — területet képvisel. Legyen tehát b^2 a c-vel egyenlő területü négyzet, ekkor a föntebbi egyenlet így alakul:

$$x^2 \pm ax = \pm b^2.$$

Ezen egynemü egyenlet négy külön egyenletet foglal magában, nevezetesen:

$$x^2 + ax = b^2 \quad (1) \qquad x^2 - ax = b^2 \quad (2)$$
$$x^2 + ax = -b^2 \quad (3) \qquad x^2 - ax = -b^2 \quad (4)$$

Mielőtt e négy egyenlet szerkesztéséhez hozzáfognánk, vegyük fontolóra, hogy ha az (1) egyenletben $+ x$ helyébe $- x$-et teszünk, a (2) egyenletet kapjuk; következőleg mind a két egyenlet mértani szerkesztése azonos, mert gyökeik számértékre nézve egyezők és csak előjelre nézve különböznek egymástól. Hasonlóképen áll ez a (3) és (4) egyenletről. Ezért csak a (2) és (4) egyenletet fogjuk tárgyalni.

Ezekből:

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}, \text{illetőleg } x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2};$$

ez alakok már a föntebbiek alapján is előállíthatók; evégből először:

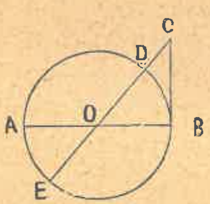
$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}a)^2 + b^2} = m, \text{ és } \sqrt{(\tfrac{1}{2}a)^2 - b^2} = n, \text{ ezután:}$$

$x = \frac{1}{2}a \pm m$, és $x = \frac{1}{2}a \pm n$ kifejezéseket ábrázoljuk.

Azonban jóval egyszerübb és csinosabb a következő mértani szerkesztés, mely egyszerre mind a két gyököt szolgáltatja.

A (2) egyenlet ($x^2 - ax = b^2$) ily alakban is irható: $x(x - a) = b^2$, azaz mértanilag értelmezve x és $(x - a)$ oly egyenes vonalak, melyeknek különbségük a, középarányosuk b.

86. ábra.



Most, ha $AB = a$ egyenes vonalon (86. ábra) mint átmérőn kört alakítunk, továbbá $BC = b$ érintőt és C ponton keresztül COE szelőt vonjuk, CE és CD x-nek két gyökét képviseli. Mert e szerkesztésben a síkmértan szerint:

$$CE : CB = CB : CD,$$

vagy: $CE : b = b : (CE - a)$, (α)

másképp: $(CD + a) : b = b : CD$. (β)

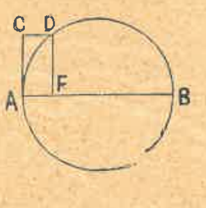
Az (α) aránylatból: $DE(CE - a) = b^2$,

(β)-ból: $CD(CD + a) = b^2$,

ezekből kitünik, hogy CE és CD vonalhosszak $x^2 - ax = b^2$ egyenletnek valóban megfelelnek.

A (4) egyenletet ($x^2 - ax = -b^2$) így is írhatjuk: $x(a - x) = b^2$, azaz x és $(a - x)$ olyan két egyenes, melyeknek összegük $= a$, szorzatuk pedig $= b^2$.

87. ábra.



Ennélfogva, ha $AB = a$ átmérővel kört alakitunk (87. ábra), továbbá A pontban $AC = b$ merőlegest vonjuk, és CD-t $\parallel$ AB-vel, DF-et $\perp$ AB-re húzzuk, AF és BF a (4) egyenletnek két gyökét képviselik. Mert az alakításnál fogva:

$$AF : DF = DF : BF,$$

$$AF : b = b : (a - AF), \qquad (\alpha)$$

másképp:
$$(a - BF) : b = b : BF. \qquad (\beta)$$

Az (α) aránylatból: $AF(a - AF) = b^2$,

(β) « $BF(a - BF) = b^2$;

tehát ugy AF mint BF a szóban forgó (4) egyenletnek megfelel.

Egyébiránt megjegyzendő, hogy azon esetre, ha AC vagyis $b > \frac{1}{2}$ a-nál CD nem metszi a kört, következőleg a négy egyenlet meg sem alakítható, ekkor csakugyan az egyenlet gyökei képzetesek.

46. §. Az algebra alkalmazása néhány mértani feladat megfejtésére.

1. *Osszuk AB egyenest folytonos aránypár szerint.* (Lásd a síkmértanban az aranymetszést.)

Legyen C a keresett osztópont (88. ábra); AB-t röviden a-val, AC szeletet x-szel jelölvén:

$$a : x = x : (a - x) \text{ ebből:}$$

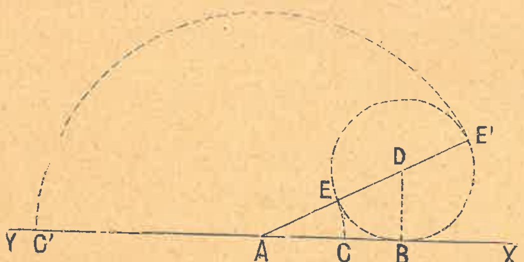
$$x^2 = a^2 - ax, \text{ és:}$$

$$x^2 + ax = a^2.$$

Megfejtvén e másodfoku egyenletet:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}, \qquad (1$$

88. ábra.



x-nek tehát két értéke van; az első pozitiv és kisebb a-nál, a másik ellenben negativ és nagyobb a-nál. Az utóbbi érték nem felel meg a föladat követelésének.

Hogy az első értéket mértanilag ábrázolhassuk, vegyük fontolóra, hogy $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$ oly derékszögü háromszög átfogóját képviseli, melynek egyik befogója: a, másik befogója: $\frac{1}{2}$ a. Ennélfogva ha az adott AB egyenes B pontjában BD merőlegest megszerkesztjük s ezt $\frac{1}{2}a$-val egyenlővé tesszük, AD a föntebbi gyökmennyiséget ábrázolja. Ebből azonban még $\frac{1}{2}$ a kivonandó. Ezért D pontból BD sugárral kört alakítunk, mely AD-t E pontban szeli, lesz:

$$AE = AD - ED = AD - BD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2}, \text{ tehát } x = AE.$$

Végül AE-t átvisszük AB-re, lesz $AC = AE$. Ezzel a feladatot megfejtettük. Látnivaló, hogy a szerkesztés a síkmértanban előadottal tökéletesen megegyezik.

Az imént hallgatag föltételeztük, hogy a keresett C pont A és B pontok *közé* esik. Ámde ha a feladatot akkép módosítjuk, hogy C' pont nem A és B között, hanem A-tól balra, tehát AB egyenes meghosszabbításán keresendő, és hogy AC távolság mértani középarányos legyen az adott AB és a meghosszabbított BC' között: akkor, ha AC'-t ismét x-szel jelöljük:

$$a : x = x : (a + x), \text{ következőleg } x^2 = a(a + x), \text{ és:}$$

$$x = \tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 + a^2}; \qquad (2)$$

x-nek itt is két értéke van, azonban a második ismét negativ, következőleg hasznavehetetlen. Az első értéket AE' egyenes képviseli, és ez a föntebb szerkesztett AD átfogónak a körig való meghosszabbításából ered. Ugyanis:

$$AE' = AD + DE' = \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 + a^2} + \tfrac{1}{2} a.$$

Ha tehát AE'-et AB meghosszabbítására átviszszük, a keresett C' pontot találjuk.

Szembetünő, hogy a (2)-vel jelölt pozitiv eredmény számértékre nézve tökéletesen megegyezik az (1) alatti negativ eredménnyel; szintúgy az (1) számú pozitiv érték a (2) számú negativval. Eszerint az előbbi feladat algebrai megfejtése az utóbbiét is magában foglalja, ha t. i. tekintetbe vesszük, hogy x pozitiv értékét A ponttól jobbra, negativ értékét pedig ugyanattól balra, tehát ellenkező irányban kell kimérni.

Mind a két föladat egybefoglalva így hangzik: Adva van A és B pont, keressünk AB egyenes vonalon egy oly harmadik pontot, melynek A-tól való távolsága mértani középarányos AB egyenes hossza és ugyanazon pontnak B-től való távolsága között.

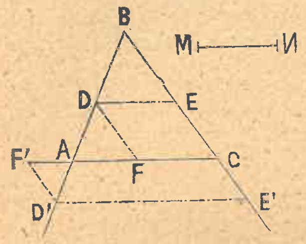
Kitünik ebből, hogy az algebra adta negativ érték a feladatot általánosabbá teszi, önként elhárítván a megszorító feltételt, melyre eleinte szükségünk volt, hogy a feladatot egyenletben kifejezhessük.

Látnivaló továbbá, hogy: *ha valamely mértani feladat algebrai megfejtésénél az ismeretlen mennyiség egy adott ponttól meghatározott irányban kimérendő távolságot jelent, ily esetben az ismeretlennek negativ jelű értékét ugyanezen egyenes vonal ellenkező irányú ágán kell keresnünk.*

2. *Húzzunk valamely adott háromszögben az egyik oldalhoz meghatározott hosszúságú párhuzamos egyenest.*

Legyen ABC az adott háromszög (89. ábra), $MN = d$ a kiszabott hosszúság és DE a keresett párhuzamos.

89. ábra.



ABC és DBE háromszögek hasonlóságánál fogva:

$$AB : AC = DB : DE,$$

vagy, ha AB és AC oldalt c- és b-vel, az ismeretlen AD hosszúságot x-szel jelöljük:

$$c : b = (c - x) : d, \text{ és ebből:}$$

$$x = \frac{c\,(b - d)}{b}$$

azaz x egyenes a b, c és $b - d$ vonalhosszak negyedik arányosa. A szerkesztést illetőleg CF-et egyenlőnek vesszük d-vel és F pontból BC-vel párhuzamost vonunk, ez AB-t a keresett D pontban metszi. Ugyanis:

$$AF : AC = AD : AB, \text{ vagy:}$$

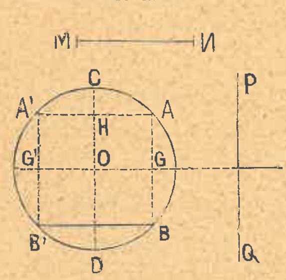
$$(b - d) : b = AD : c \text{ tehát:}$$

$$AD = \frac{c\,(b - d)}{b} = x.$$

Ha most D pontból AC-vel párhuzamost vonunk, a feladatot megfejtettük. Míg $d < b$-nél, x értéke pozitiv, azaz D pont A és B között fekszik, amint eredetileg föltételeztük volt. Ellenben, ha $d > b$-nél, x értéke negativ, azaz a keresett D pont AB oldal meghosszabbításába esik; ez esetben x hosszúságot A-tól nem B felé, hanem ellenkező irányban kell kimérni.

3. *Húzzunk adott körben adott egyenes vonallal (PQ-val) párhuzamosan meghatározott (p) hosszúságú húrt.*

90. ábra.



Tegyük föl, hogy AB (90. ábra) a keresett húr, azaz $AB \parallel PQ$ és $AB = MN = p$.

O középpontból PQ-ra OG merőlegest húzván, ez AB húrt G pontban felezi. Ugyanezen OG-nek hossza által AB húrnak helyzete is meg van határozva.

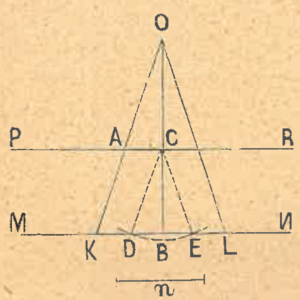
Legyen $OG = x$, a kör sugara $= r$, továbbá vonjuk OA sugarat, ekkor Pythagoras tétele szerint:

$$\overline{OG}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AG}^6, \text{ vagy } x = \pm\sqrt{r^2 - (\tfrac{1}{2}p)^2}$$

Most, ha O ponton keresztül PQ-val $\parallel$ átmérőt (CD-t) húzunk s erre ugyancsak O-tól $\frac{1}{2}$ p-t, vagyis OH-t kimérjük, és H végponton keresztül AA'-et $\perp$ CO-ra, végre AB-et és $A'B'$-t $\parallel$ PQ-val vonjuk, OG és OG' x értékét ábrázolják, és úgy AB, mint $A'B'$ húr a föladat követeléseinek megfelel.

4. *Legyen MN és PR két párhuzamos egyenes és ezek távolsága p, húzzunk valamely adott O ponton keresztül oly egyenes vonalat, melynek a párhuzamosak közé foglalt szelete meghatározott (n) hosszúságú.*

91. ábra.



Tegyük fel, hogy OK (91. ábra) a keresett egyenes, melynek AK része $= n$. Ha O-ból OB merőlegest vonjuk, két hasonló háromszög keletkezik, t. i. $OCA \triangle \sim OBK \triangle$.

Következőleg $OB : CB = OK : AK$, vagy ha az ismeretes OB távolságot d-vel jelöljük, $d : p = OK : n$, tehát:

$$OK = \frac{dn}{p}.$$

Továbbá OBK derékszögü háromszögből, ha KB-t x-szel jelöljük,

$$x = \pm\sqrt{\overline{OK}^2 - \overline{OB}^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{dn}{p}\right)^2 - d^2},$$

vagy:

$$x = \pm\frac{d}{p}\sqrt{n^2 - p^2}.$$

Minthogy x-nek két értéke van, a feladat kétféle módon fejthető meg.

A gyökmennyiség oly derékszögü háromszög befogóját képviseli, melynek átfogója $= n$, másik befogója $= p$. Szerkesszünk tehát C-ből, mint középpontból, n-hosszúságú sugárral körívet, mely MN egyenest D és E pontban metszi; húzzuk meg CD és CE, majd ezekkel párhuzamosan OK és OL egyeneseket; az utóbbiak a kivánt egyenes vonalak. Az ismeretlen mennyiség két értékét ugyanis BK és BL ábrázolják, mert a szerkesztésnél fogva:

$$BD = \sqrt{n^2 - p^2}, \text{ és } BD : BK = BC : BO.$$

vagy, ha az értéket helyettesítjük:

$$\sqrt{n^2 - p^2} : BK = p : d, \text{ és ebből:}$$

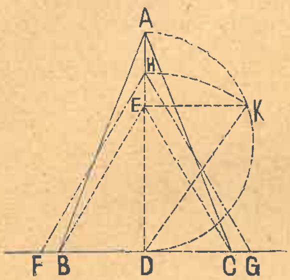
$$BK = \frac{d}{p}\sqrt{n^2 - p^2} = x.$$

Minthogy x-nek, mint négyzet-gyök mennyiségnek, két egyenlő, de ellenkező jelü értéke van, tehát — BL a keresett egyenes vonal második értéke. Mikor nem fejthető meg a feladat?

5. *Adott egyenlőszárú háromszög egyenlőoldalúvá alakítandó át.*

Legyen ABC (92. ábra) az adott háromszög és ebben $AB = AC$; továbbá BEC az ugyanazon BC alapra rajzolt egyenlő oldalú háromszög, melynek E szögpontja, ismeretes oknál fogva, AD magassági vonalba esik; végre FGH a keresett egyenlőoldalú háromszög. Hogy ez utóbbit meghatározhassuk, H pont fekvését kell megállapítanunk. Rövidség kedvéért legyen $AD = m$, $ED = n$ és az ismeretlen $HD = x$. Minthogy $BDE \triangle \backsim FDH$ $\triangle$-höz, tehát $BDE\triangle : FDH\triangle = n^2 : x^2$; ámde: $FDH\triangle = BDA\triangle$, következőleg:

92. ábra.



$$BDE\triangle : BDA = n^2 : x^2. \qquad (1)$$

Másrészt azonban:

$$BDE\triangle : BDA\triangle = n : m. \qquad (2)$$

az (1) és (2) aránypárt egybevetve:

$$n^2 : x^2 = n : m,$$

és ebből:

$$x = \sqrt{mn}.$$

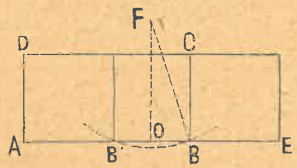
A szerkesztés is igen egyszerű; t. i. AD egyenesen félkört alakítunk és E pontból AD-re EK merőlegest vonjuk; ekkor:

$$\overline{DK} = \sqrt{AD.DE} = \sqrt{mn} = x.$$

Legyen most $DH = DK$-val és vonjuk $HF \parallel EB$ és $HG \parallel EC$ egyeneseket. FGH a kivánt háromszög.

6. *Szerkesszünk meghatározott területű (a^2) és kerületű (k) derékszögű négyszöget.*

93. ábra.



Legyen $ABCD$ (93. ábra) a szerkesztendő derékszögű négyszög, melynek területét a^2-tel, kerületét k-val jelöljük. Hosszabbítsuk meg a négyszög AB oldalát és tegyük BE-t egyenlővé a négyszög szomszédos BC oldalával; ekkor $AE = \frac{1}{2}k$. Ezen AE vonalon B pontot akkép kell meghatároznunk, hogy $AB \,.\, BE = a^2$ legyen. Most, ha AB-t x-szel jelöljük, $BE = \frac{1}{2}k - x$, tehát:

$$x\left(\tfrac{1}{2}k - x\right) = a^2 \text{ és ebből } x = \tfrac{1}{4}k + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}k\right)^2 - a^2}.$$

E gyökmennyiség oly derékszögü háromszög befogója, melynek átfogója: $\frac{1}{4}k$, másik befogója: a. Ennélfogva AE egyenes felező pontján O-ban merőlegest szerkesztünk s erre $a = OF$ hosszúságot mérjük; továbbá F pontból OA sugárral körívet húzunk, mely AE-t B és B' pontban metszi. E szerkesztésnél fogva:

$$OB = OB' = \sqrt{(\tfrac{1}{4}k)^2 - a^2},$$

következőleg:

$$x = AO \pm OB \text{ és } (\tfrac{1}{2}k - x) = AO \pm OB;$$

tehát AB és BE, vagy a mi egyre megy $AB'BE'$, a keresett négyszög oldalai. — Mikor nem fejthető meg a feladat?

Tizedik fejezet.

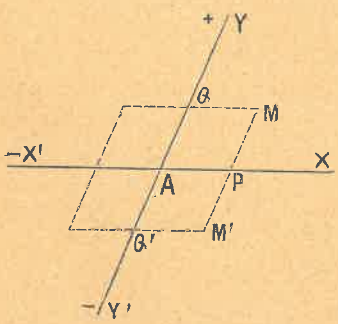
A pontról.

47. §. A pont helyének meghatározása valamely síkban.

a) **Párhuzamos koordinátákkal.**

Valamely sík egyes pontjainak helyét különféleképen határozhatjuk meg. A legegyszerübb módok egyike a párhuzamos koordinátákkal való meghatározás. Ez abban áll, hogy a kérdéses pontot két — egymást átmetsző — egyenes vonalra vonatkoztatjuk. Legyenek XX' és YY' (94. ábra) ez egyenesek, melyek egymást A pontban metszik; továbbá M azon pont, melynek helyét, azaz AX- és AY-hoz való fekvését meghatározni kivánjuk. Ha M ponton keresztül XX' és YY' egyenesekhez MP, illetőleg MQ párhuzamosakat vonjuk, ezek M pont fekvését teljesen meghatározzák. Mert, ha MQ hosszát A-tól kezdve AX egyenesre, továbbá MP hosszát AY-ra átvisszük és az ekkép talált P és Q pontokon keresztül AY és AX-hez párhuzamosakat vonunk, ezek egymást M pontban és csakis M pontban metszhetik át, mert két egyenes vonal csak egy pontban találkozhatik.

94. ábra.



MQ és MP, vagy ami ugyanannyi, AP és AQ távolságokat M pont *koordinátái*nak, AX és AY egyeneseket pedig, melyekre M pontot vonatkoztattuk, koordináta *tengelyek*nek nevezzük. Az egyik tengelyt X, a másikat Y betüvel szokás jelölni, ennek megfelelöleg az elsöt X-tengelynek, az utóbbit Y-tengelynek nevezzük. Továbbá MQ vagyis AP koordináta mértékszámát x-szel, MP-ét y-nal jelöljük és megfelelöleg az elöbbit x-koordinátának, vagy *abscissza*nak, az utóbbit y-koordinátának, vagy *ordinátá*nak szoktuk nevezni. Mind a két koordinátát a tengelyek metszö pontjától, A-tól számítjuk. Ezt a pontot ezért a koordináták *kezdő* (origo) pontjának nevezzük.

A két tengelyt együttesen *koordináta rendszer*nek nevezzük. Ez lehet derék- vagy ferdeszögü, amint a tengelyek derék- vagy ferdeszögben metszik egymást.

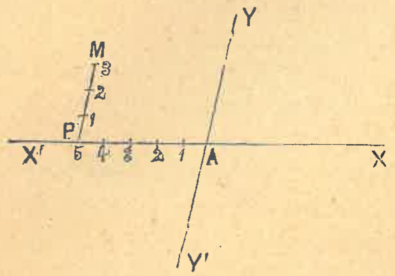
A két tengely a síkot négy részre, azaz *negyedekre* osztja. Látjuk továbbá, hogy nemcsak az XAY, hanem a többi három negyedben is található egy-egy pont, amelynek koordinátái a fönt említett M pontéival számértékre nézve tökéletesen megegyeznek; ezért a koordinátáknak nemcsak számértékét, hanem irányát is tekintetbe kell vennünk. A két ellenkezö irányt, tudomás szerint, $+$ és $-$ elöjellel fejezzük ki. Nevezetesen az X-tengely azon részét, mely a kezdö ponttól jobbra terjed, $+$ jellel, az ellenkezö irányút $-$ jellel jelöljük; hasonlóképen az Y-tengelynek az XX' fölött fekvö részét $+$, az ellenkezö irányú részt pedig $-$ jellel jelöljük. Az Y-tengely jobb oldalán az X-tengely fölött fekvő negyedet (XAY-t) első negyednek, az Y-tengely baloldalán fekvö felsö negyedet, vagyis $X'AY$-t második negyednek, az X-tengely alatt fekvö baloldali negyedet ($X'AY'$-t) harmadik, a jobb oldalit (XAY'-t) pedig negyedik negyednek mondjuk.

Ezen elv szerint az első negyedben fekvö pontok x és y koordinátái pozitivok, a harmadik negyedbe tartozó pontoknak mind a két koordinátája negativ. A második negyedben fekvö pontok x koordinátái negativok, y-jai ellenben pozitivok, végre a negyedik negyedbe tartozó pontok x koordinátái $+$, y-jaik pedig $-$ jelüek.

Ha tehát egy pont koordinátái valamely megállapitott tengelyrendszerre vonatkozólag adva vannak, e pont fekvését a föntebbiek szerint könnyen meghatározhatjuk.

Igy ha pld. valamely pont koordinátái XAY rendszerre vonatkozólag (95. ábra): $x = -5$, és $y = +3$, akkor a kezdő ponttól az X-tengely negativ ágára 5 hosszegységet mérünk, ezután P végponton keresztül a $+$ Y-tengely-

95. ábra.



lyel párhuzamost vonunk, s erre 3 egységet mérünk ki. Az ekkép talált M pont a keresett pont.

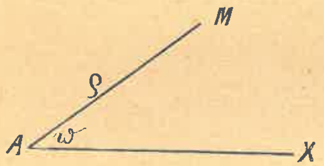
Továbbá az X-tengely bármelyik pontjának y-ja $= 0$. Hasonlóképen az Y-tengely minden pontjának x-koordinátája $= 0$. A kezdőpont koordinátái tehát $x = 0, y = 0$.

b) **Sarkkoordinátákkal.**

A sík valamely pontjának fekvését meghatározó módszerek között nevezetes még a sarkrendszer, amely gyakran igen célszerűen alkalmazható. Lényege a következő:

Húzzunk a meghatározandó pont síkjában egyenes vonalat: AX-et (96. ábra), ezen tüzzünk ki egy állandó pontot: A-t, és kössük ezt össze a kérdéses M ponttal AM egyenessel. Ennek hossza és XAM szög M pont helyét a síkban teljesen meghatározzák; mert ha A ponton keresztül oly egyenest húzunk, mely AX-szel a kiszabott XAM szöget alkotja és ezen egyenes vonalra AM hosszúságot kimérjük, a keresett M pontot megtaláljuk.

96. ábra.



Az állandó AX egyenest *sarktengely*nek, A pontot *sark*nak (polus) nevezzük. A kérdéses M pontnak a sarktól való távolsága a *vezérsugár* (radius vector) nevet viseli; ezt ρ-val fogjuk jelölni, azaz $AM = \rho$. A sarktengely és vezérsugár alkotta szöget *sarkszög*nek nevezzük és ω-val jelöljük. A vezérsugár és az annak megfelelő sarkszög közös néven a *sark-koordináták.*

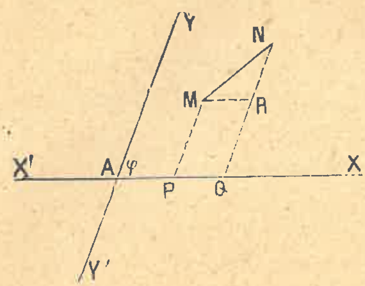
A sarkszöget illetőleg megjegyzendő, hogy azt a sarktengelytől mindig egyazon irányban 0^0-tól ∞-ig számítjuk.

48. §. Két adott pont kölcsönös távolságának meghatározása.

Két pont megadott koordinátáiból e pontok egymástól való távolsága is kiszámítható.

Legyen XAY (97. ábra) a koordináta-rendszer, melynek ismeretes hajlásszögét φ-vel jelöljük; M pont adott koordinátái: $x_1 = PA, y_1 = MP$; N pontéi: $x_2 = AQ, y_2 = NQ$.

97. ábra.



Hogy e pontok távolságát meghatározhassuk, kapcsoljuk össze azokat MN egyenes vonallal, melynek hosszát d-vel jelöljük; továbbá húzzuk meg M ponton keresztül MR-et párhuzamosan AX-szel; és alkalmazzuk MRN ferdeszögü háromszögre Carnot tételét; lesz:

$$\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{NR}^2 - 2\overline{MR}.\,\overline{NR}.\cos(MRN).$$

Minthogy azonban:

$$MR = PQ = AQ - AP = x_2 - x_1,$$
$$NR = NQ - QR = NQ - MP = y_2 - y_1$$

és: $\qquad MRN\sphericalangle = 180^0 - \varphi\ (mert\ NQ \parallel AY)$;

tehát: $\quad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi$

és $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi}$. $\qquad$ (1)

Ha a tengelyrendszer derékszögü, vagyis $\varphi = 90^0$, $\cos\varphi = 0$, tehát:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2)$$

Ez tehát két pont távolságnak képlete derékszögü koordináta rendszerre vonatkozólag. Azon esetben, ha az egyik pont a kezdőponttal egybeesik, vagyis $x_1 = 0$, és $y_1 = 0$, az (1) alatti képlet ily alakot ölt:

$$d = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + 2x_2\,y_2 \cos\omega} \qquad (3)$$

a (2)-ból pedig lesz:

$$d = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \qquad (4)$$

A föntebbi képletekben a gyökmennyiség elé $+$ vagy $-$ irható; eme kettős előjel úgy magyarázandó, hogy a két pont távolságát vagy M-től N-ig, vagy pedig ellenkező irányban N-től M-ig vehetjük.

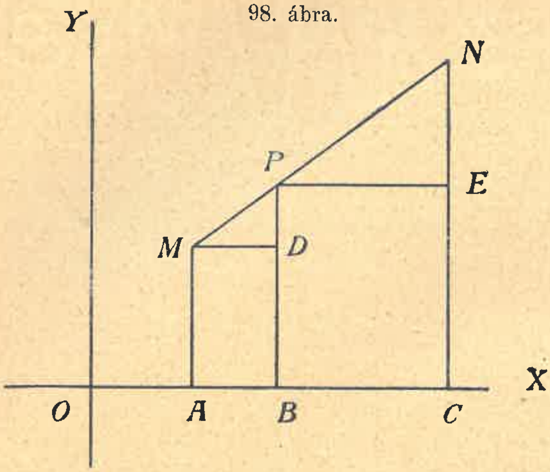
Ha a két pont sarkkoordinátáit ρ_1, ω_1 és ρ_2, ω_2-vel jelöljük, a távolságot a következő képletből számítjuk ki:

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\omega_2 - \omega_1)}. \qquad (5)$$

A föntebbi képletek nemcsak az első negyedbe tartozó pontokra, hanem általában bármily fekvésü pontokra nézve érvényesek.

Feladat. Valamely MN egyenes két végpontjának koordinátái $(x_1\,y_1)$ és $(x_2\,y_2)$; határozzuk meg az egyenest $m:n$ arányban osztó P pont $(x\,y)$ koordinátáit. (98. ábra.)

98. ábra.



Legyen MA, PB és NC merőleges az X-tengelyre; továbbá $MD \perp BP$, $PE \perp CN$. Akkor $NPE \triangle \backsim MDP \triangle$ és így:

$MP:NP = m:n \ldots\ldots\ldots \alpha$

$MP:NP = MD:PE \ldots\ldots \beta$

$MP:NP = DP:EN \ldots\ldots \gamma$

α) és β) aránypárokból:

$m:n = MD:PE = AB:BC$
$= (x - x_1):(x_2 - x_1)$,

és: $x = \dfrac{mx_1 + nx_2}{m+n}$.

Hasonló eljárás szerint α) és γ) egyenletekből:

$$y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}.$$

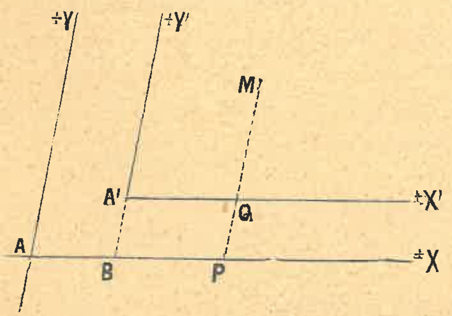
Ha $m = n$, vagyis P az MN egyenes felező pontja, akkor:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

49. §. A koordináták átalakításáról.

A koordináta-rendszer változtával a sík egyes pontjainak koordinátái is megváltoznak. Az analitikai mértan fejtegetéseiben gyakran igen kivánatos az eredetileg fölvett rendszerről más, előnyösebb helyzetü rendszerre áttérni. Evégből tudnunk kell, mikép lehet valamely pontnak bizonyos rendszerre vonatkozó koordinátáit ugyane pontnak más rendszerre vonatkoztatott koordinátái által meghatározni, mit röviden a koordináták *átalakításának* nevezünk. Ezen átalakítás természetesen csak akkor vihető véghez, ha az új rendszernek helyzete az eredetihez képest ismeretes.

99. ábra.



Mi csak az egyszerűbb és gyakrabban előforduló átalakításokra szorítkozunk. Ezek a következők:

A) *A koordinátáknak más, az előbbivel párhuzamos rendszerre való átalakítása.*

Legyen XAY (99. ábra) az eredeti koordináta-rendszer, melyre vonatkozólag a síklap valamelyik M pontjának koordinátáit x, y betükkel jelöljük: $AP = x$, és $MP = y$. Az új rendszer kezdö pontja legyen A', tengelyei $A'X'$ és $A'Y'$ az előbbi rendszer megfelelő tengelyeivel párhuzamosak.

Az új rendszer helyzetét kezdő pontjának (A') koordinátái határozzák meg, ezeket a és b-vel jelöljük meg, azaz $AB = a$ és $A'B = b$. M pont koordinátái az új rendszerben $x' = A'Q$ és $y' = MQ$.

Feladatunk abban áll, hogy M pont eredeti (x, y) koordinátáit az új rendszerbeli $(x' y')$ koordinátákkal és a, b mennyiségekkel kifejezzük. Nyilvánvaló, hogy:

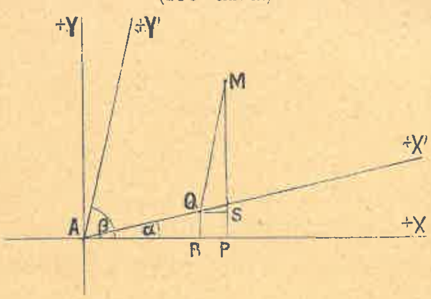
$$AP = AB + BP \text{ és } MP = MQ + QP, \text{ vagy:}$$

$$x = a + x', \quad y = b + y'. \qquad \text{I.}$$

E képletek derék- és ferdeszögü párhuzamos rendszerekre egyaránt alkalmazhatók.

B) *Derékszögü rendszernek ferdeszögü rendszerré való átalakítása.*

(100. ábra.)



Legyen XAY (100. ábra) az eredeti derékszögü rendszer, melyre vonatkozólag M pont koordinátáit ismét x, y-nal jelöljük, vagyis $AP = x$ és $MP = y$. Az új rendszer tengelyei AX' és AY' ugyanazon A kezdőpontból indulnak ki; ezekre vonatkozólag M pont koordinátái: $AQ = x'$ és $MQ = y'$. Az új rendszer helyzetét azon két szög által határozhatjuk meg, amelyeket AX' és AY' tengelyek a régi AX tengellyel befognak. Rövidség okáért legyen $XAX' \measuredangle = \alpha$ és $XAY' \measuredangle = \beta$.

Feladatunk ismét az, hogy M pont régi koordinátáit $(x, y$-t) az új x', y' által és α, β szögek függvényei által kifejezzük. Evégett vonjuk QR-et párhuzamosan AY-nal és QS-et $\|$ AX-szel. Látnivaló, hogy:

$$AP = AR + RP \text{ és } MP = MS + SP.$$

Ámde AQR derékszögü háromszögben:

$$AR = AQ \,.\, cos\,\alpha \text{ és } QR = SP = AQ \,.\, sin\,\alpha,$$

vagy: $AR = x' cos\,\alpha$ és $SP = x' sin\,\alpha$.

Hasonlóképen MQS derékszögü háromszögben, melynek MQS szöge $= \beta$:

$$QS = RP = MQ\, cos\,\beta \text{ és } MS = MQ\, sin\,\beta,$$

vagy: $RP = y' cos\,\beta$ és $MS = y' sin\,\beta$.

Helyettesítve a talált értékeket,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta. \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

E képletek alkalmazásakor ne feledjük, hogy α és β szögek mindig az eredeti X-tengely pozitiv ágától a régi Y-tengely pozitiv ága felé számítandók.

Azon esetre, ha az új rendszer is derékszögű, az utóbbi (II.) képletek annyiban változnak meg, hogy ekkor $\beta = 90^0 + \alpha$, tehát $\sin \beta = \cos \alpha$ és $\cos \beta = -\sin \alpha$, következőleg:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{II. } a)$$

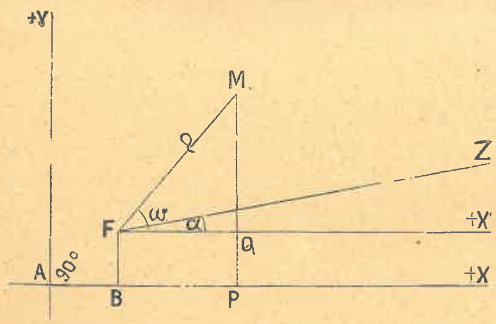
E képletek alapján egyik derékszögű rendszerről olyan másik derékszögűre térhetünk át, melynek $+ X'$-tengelye a régi $+ X$-tengellyel α szöget zár be.

Az I. és II. számú képleteket *egybevetve* is alkalmazzuk olyankor, ha derékszögű rendszerről oly ferdeszögűre kell áttérni, melynek *más* kezdőpontja van. Elsőben t. i. a derékszögű rendszerről párhuzamos új rendszerre térünk át, ezt azután ferdeszögűre változtatjuk. Ez egyszerre megtörténhetik a következő egybevetett képletek alapján:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha + y' \cos\beta. \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

C) *A derékszögű rendszernek sarkrendszerré való átalakítása és viszont.*

101. ábra.



Legyen XAY (101. ábra) az eredeti derékszögű rendszer, F a sarkrendszer sarkpontja, FZ a tengelye. A síklap M pontjának derékszögű koordinátái: $AP = x$ és $MP = y$, sarkrendszerbeli koordinátái: $FM = \rho$, $ZFM \sphericalangle = \omega$. F sarkponton keresztül húzzunk AX tengellyel párhuzamost, azaz $FX' \parallel AX$. Az új sarkrendszer helyzetét a sarkpont derékszögű koordinátái $AB = a$, $FB = b$ és $X'FZ = \alpha$ szög határozzák meg.

Nyilvánvaló, hogy:

$$x = AP = AB + BP = a + FQ.$$
$$y = MP = MQ + QP = b + MQ.$$

FQ és MQ hosszúságokat MFQ háromszögből határozzuk meg. T. i.:

$$FQ = FM. \cos QFM \text{ és } MQ = FM. \sin QFM.$$

Azonban $QFM \measuredangle = \alpha + \omega$, tehát:

$FQ = \rho \cos(\alpha + \omega)$ és $MQ = \rho \sin(\alpha + \omega)$ következőleg:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \rho \cos(\alpha + \omega) \\ y &= b + \rho \sin(\alpha + \omega) \end{aligned}\right\} \text{IV.}$$

Azon esetre, ha a sarktengely az X-tengellyel párhuzamos, $\alpha = 0$ és:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \rho \cos \omega. \\ y &= b + \rho \sin \omega. \end{aligned}\right\} \text{IV. } a)$$

És ha még ezenkivül a sarkpont az eredeti rendszer kezdő pontjával egybeesik, tehát $a = b = 0$, akkor:

$$\left.\begin{aligned} y &= \rho \cos \omega. \\ x &= \rho \sin \omega. \end{aligned}\right\} \text{IV. } b)$$

Midőn megfordítva a sarkrendszerről oly derékszögü rendszerre kell áttérni, melynek X-tengelye a sarktengellyel, kezdőpontja a sarkponttal egybeesik, az utóbbi (IV. b) egyenletekből ρ-t és ω-t x és y függvényekép kell kifejeznünk. Evégből az említett egyenleteket négyzetre emeljük és összegezzük; lesz:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega) = \rho^2,$$

tehát:

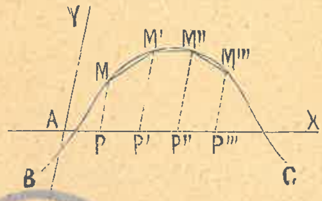
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ugyanazon egyenletekből osztás utján ered: $tg\ \omega = \frac{y}{x}$, amint ez az ábrából közvetlenül is kiolvasható.

50. §. A vonalak egyenletei. A két változót tartalmazó egyenletek mértani jelentése. A vonalak osztályozása.

Tudjuk már, miképen lehet a pont helyét a síklapon meghatározni; vizsgáljuk meg most BMC görbe vonalat (102. ábra), a melynek minden pontját XAY tengelyrendszerre vonatkoztatjuk. Látnivaló, hogy minden x-koordinátának meghatározott hosszúságú y-koordináta felel meg. Igy AP abscisszának MP ordináta, AP' abscisszának $M'P'$ ordináta stb. Viszont MP ordinátához AP abscissza stb. tartozik. Világos ebből, hogy a görbevonal bármely pontjának koordinátái kölcsönös összefüggésben vannak, azaz matematikai nyelven szólva: az egyik a másiknak *függvénye* (funkcio-ja). Ha e függvény *állandó*, azaz ha az abscissza és ordináta közti összefüggés a görbe vonal

102. ábra.



minden pontjára nézve változatlan, akkor ez állandó összefüggést kifejező egyenletet *Descartes* szerint az illető görbe vonal *egyenletének* nevezzük. *Valamely vonal egyenlete tehát azon állandó összefüggés kifejezése, amely e vonal minden egyes pontjának összetartozó koordinátáira nézve áll.* Ez összefüggés pedig csak úgy lehet állandó, ha a vonal szabályszerüleg, azaz *törvény* szerint alakult, amelynek alapján azt akárhányszor újra előállíthatjuk úgy, amint eredetileg adva volt. Valamely vonal egyenlete tehát csak akkor állapítható meg, ha a vonal szerkesztésének törvénye, vagy keletkezésének módja ismeretes.

Így pl. tudjuk, hogy a körvonalnak az a tulajdonsága, hogy minden pontjának a távolsága a középponttól állandó, azaz egyenlő a sugárral. Ha tehát a körvonal bármelyik pontjának a koordinátáit x, y-nal, középpontjának a koordinátáit α, β-val, és a sugarat r-rel jelöljük, ekkor ez egyenlet:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r, \text{ vagy :}$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2, \ldots (1)$$

az előbb említett tulajdonságot fejezi ki; ezen egyenlet tehát a körvonal minden pontjára nézve érvényes, s így a körvonalat képviseli és a kör egyenletének nevezhető. (Hogyan változik a körnek ezen egyenlete, ha a középpont valamelyik tengelyben van, és ha a kezdőpontban van?)

De valamint minden szabályszerü vonal egy egyenlet által képviselhető, úgy viszont *minden egyenletnek, mely két változót* (*x*-et és *y*-t) *foglal magában, bizonyos vonal felel meg.* E vonalat az egyenlet *mértani helyének* nevezzük. Ugyanis, ha a szóban forgó határozatlan egyenletet a két ismeretlen mennyiség egyikére, pl. y-ra vonatkozólag megfejtjük, az y értékét kifejező képlet az ismert mennyiségeken kívül még a másik x ismeretlent is magában foglalja; y értéke tehát mindaddig ismeretlen marad, míg az x-ét meg nem állapítjuk. De ha x-nek meghatározott értéket adunk, akkor y értéke, illetőleg értékei is meghatározvák. Mégpedig x minden értékének egy, két, három stb. y felel meg aszerint, amint a kérdéses egyenlet y-ra vonatkozólag első-, másod- vagy harmad- stb. fokú. Továbbá: x értékének változtával általában y-nak megfelelő értéke vagy értékei is változni fognak. Ennélfogva, ha x és y két összevaló értékét a sík valamelyik pontjának koordinátáiként tekintjük: az említett egyenletnek nem egy, hanem számtalan pont felel meg, amelyeket sorra úgy találunk meg, ha az abscisszául vett x-nek értékét fokozatosan változtatván, a megfelelő y-okat az egyenletből kiszámítjuk és a fölvett koordináta rendszerre áttesszük. A talált pontokat egyenes vonalakkal összekötvén, tört vonal származik ugyan, de ez annál kevésbbé különbözik bizonyos görbe vonaltól, minél fokozatosabban változtattuk x-nek értékét. Ha tehát x-et $-\infty$-től $+\infty$-ig *folytonosan* növesztjük, a tört vonalból olyan tulajdonságú görbe vonal válik, hogy minden egyes pontjának koordináta párja (x, y) a többször említett egyenletnek megfelel. Ezek szerint *a két ismeretlen mennyiséget tartalmazó egyenlet egyenes, vagy görbe vonalat jelent.*

Így az $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$, vagy kifejtve $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+$ $+(\alpha^2+\beta^2-r^2)=o$ ... (2) egyenlet kört jelent. És minden ilyen alakú másodfokú egyenlet kört fog jelenteni. Az ilyenféle egyenlet általános alakja:

$$x^2+y^2+ax+by+c=o.$$

Ha az x^2+ax és y^2+bx-et teljes négyzetté kiegészítjük azáltal, hogy az egyenlet mindkét oldalához $\frac{a^2}{4}$ és $\frac{b^2}{4}$-et hozzáadjuk, ezt az egyenletet nyerjük:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c.$$

De ezen egyenlet teljesen megegyezik az (1) egyenlettel, ha $\alpha=-\frac{a}{2}$, $\beta=-\frac{b}{2}$ számokat a középpont koordinátáinak és $r^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$ értéket a kör sugarának tekintjük. A kör tehát könnyen szerkeszthető.

A vonal adott egyenletéből a megfelelő vonal tulajdonságait is fel lehet keresni. Így megállapítjuk pl. azt, vajjon a vonal végtelenül elnyúlik, vagy, hogy határolt-e? Végtelenbe fog terjedni, ha pl. x-nek mind nagyobb értékeket adva, y értéke is végtelenül növekedik. Vagy megállapíthatjuk azt is, vajjon vannak-e e vonalnak olyan pontjai, melyek a koordináta-tengelyekben feküsznek? Ezt úgy tudjuk meg, hogy akár x, akár y helyébe o-t helyettesítünk, és a megfelelő y-t vagy x-et keressük. Ha ezek az értékek reálisok, akkor állíthatjuk, hogy a vonalnak vannak ilyen pontjai.

Minthogy az egyenletek kétfélék, t. i. algebraiak és *túllépők* (transcendens): a vonalak is megfelelőleg két csoportra oszthatók, u. m. *algebrai* és *túllépő* (transcendens) vonalakra.

Az előbbieket ismét első-, másod-, harmad-, ...n-ed rendűekre osztjuk aszerint, amint megfelelő egyenletük a változó koordinátákra nézve első-, másod-, harmad-, ...n-ed fokú.

Ezen osztályozásnak csak úgy van értelme, ha a vonal egyenletének foka az illető koordináta rendszertől teljesen független, máskülönben annak változtával a rá vonatkoztatott vonal egyenletének foka is megváltoznék. És csakugyan a megelőző §-ban kifejtett szerkesztési képletek mind *elsőfokúak*; ha tehát valamely vonal egyenletében x és y helyébe az idézett §-ban foglalt értékeket tesszük, az egyenlet foka ezen helyettesítés folytán nem változhatik, azaz a vonal egyenletének foka nem a rendszertől, hanem csak a vonal sajátságaitól függ.

A görbe vonalak közül itt csak a *másodrendűekről* szólunk, vagyis azokról, melyeknek megfelelő egyenletük másodfokú.

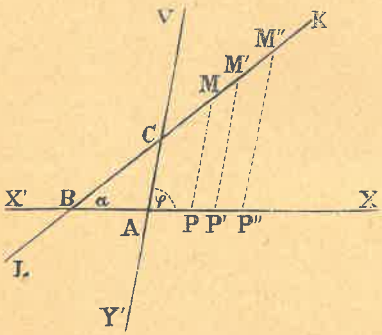
Tizenegyedik fejezet.

Az elsőrendű vonalak.

51. §. Az egyenes vonal egyenlete.

Keressük KL egyenes vonal egyenletét. Hogy e föladatot általánosan megfejthessük, a nevezett vonalat XAY (103. ábra) ferdeszögü tengely-rendszerre vonatkoztatjuk, melynek tengelyei KL-et B, illetőleg C pontban szelik. Rövidség kedvéért legyen $XAY\sphericalangle = \varphi$, $XBK\sphericalangle$, vagyis az, melyet KL a pozitiv X-tengelylyel alkot $= \alpha$-val, továbbá az X-tengely AB szeletét m-mel és az Y-tengely AC szeletét l-lel jelöljük. KL egyenes M pontjának koordinátái: $AP = x$, $MP = y$, M' pontéi: $AP' = x'$, $M'P' = y'$ stb.

103. ábra.



Első pillanatra szembetünik, hogy $BMP\,\triangle \backsim BM'P'\,\triangle \backsim BM''P''$ stb.; ennélfogva:

$$\frac{MP}{BP} = \frac{M'P'}{BP'} = \frac{M''P''}{BP''} = \ldots \text{ vagyis:}$$

$$\frac{y}{m+x} = \frac{y'}{m+x'} = \frac{y''}{m+x''} = \ldots$$

Szóval az egyenes vonal bármely pontjának ordinátája és m-mel megtoldott abscisszája közt állandó értékü arány van.

Ezen állandó arány értékét $ABC\,\triangle$-ből meghatározhatjuk; ugyanis $ABC\,\triangle \backsim PBM\,\triangle$, tehát:

$$\frac{MP}{BP} = \frac{AC}{AB} \text{ vagyis:}$$

$$\frac{y}{m+x} = \frac{l}{m}. \qquad 1)$$

És ez az adott egyenes egyenlete, mert e kifejezés nemcsak M pontra, hanem KL egyenes bármely pontjára nézve érvényes.

Fejtsük meg az egyenletet y-ra vonatkozólag, lesz:

$$y = \frac{l}{m}x + l; \qquad 2)$$

minthogy $ABC\triangle$-ben a sinus tételnél fogva:

$$\frac{l}{m} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

az egyenes vonal egyenlete így is írható:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}x + l.$$

Ha x állandó együtthatóját, melyet *irányhatározó*nak nevezünk, röviden k-val jelöljük, azaz:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} = k,$$

az egyenes egyenlete ily alakú:

$$y = kx + l. \qquad 3)$$

Itt k és l *állandó*, x és y ellenben *változó* mennyiségeket elentenek. Ugyanis x és y a pontonként változó koordinátákat, k és l pedig azon állandó mennyiségeket képviselik, melyek az egyenes vonal fekvését határozzák meg.

Ha a koordináta rendszer derékszögü, vagyis $\varphi = 90^0$, $\sin(\varphi - \alpha) = \cos\alpha$, továbbá:

$$k = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^0 - \alpha)} = tg\,\alpha,$$

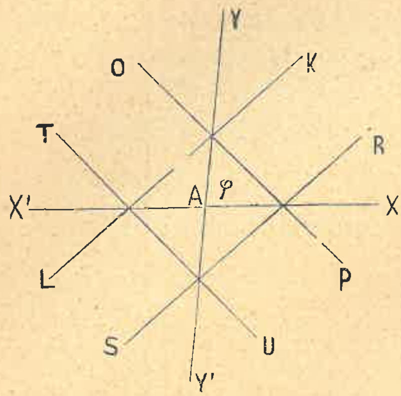
és az egyenes egyenlete:

$$y = tg\,\alpha . x + l. \qquad 4)$$

Az említett KL egyenes a $+Y$-tengelyt φ-nél kisebb szög alatt metszi, és az Y-tengelynek pozitiv részét szeli át. Ámde az egyenlet *alakja* akkor sem változik, ha α szög (mindig a pozitiv X-tengelytől számítva) nagyobb φ-nél (lásd OP egyenest a 104. ábrában), vagy ha az egyenes az Y-tengely negativ ágát metszi (mint például RS, vagy TU ugyanott).

Erről könnyen meggyőződhetünk, ha OP, RS stb. egyenesek egyenleteit a fönt előadott mód szerint tényleg kifejtjük. Az új egyenletek t. i. *alakra nézve* tökéletesen megegyeznek a föntebbiekkel, csupán k és l-nek előjele tér el az előbbitől.

104. ábra.



Nevezetesen, ha α szög $<$ φ-nél, akkor k pozitiv, ellenben, ha $\alpha > \varphi$-nél, akkor k negativ jelü. Ami l-et illeti, ez pozitiv vagy negativ aszerint, amint a kérdéses egyenes az Y-tengely $+$ vagy $-$ részét metszi.

Ha tehát k és l betük az állandóknak csak számértékeit jelentik, akkor a különböző helyzetü egyenes vonalaknak ily alakú egyenletek felelnek meg:

KL egyenes vonal egyenlete: $y = kx + l$.
OP « « « $y = -kx + l$.
RS « « « $y = kx - l$.
TU « « « $y = -kx - l$.

Továbbá, ha az egyenes egyenletét ($y = kx + l$) l-lel osztjuk és az x-es tagot az egyenlet bal oldalára helyezzük:

$$\frac{y}{l} - \frac{kx}{l} = 1;$$

ám a föntebbiek szerint:

$$\frac{l}{m} = k, \text{ következőleg } \frac{k}{l} = \frac{1}{m};$$

tehát az egyenes egyenlete ily alakban is írható:

$$\frac{y}{l} + \frac{x}{-m} = 1.$$

Ez alak azon oknál fogva nevezetes, mert a tengelyrendszer hajlás-szögétől teljesen független.

Mindezekből látnivaló, hogy *az egyenes vonal egyenlete mind a két koordinátát illetőleg elsőfokú;* ezért az egyenes vonalakat *elsőrendü* vonalaknak nevezzük.

Viszont *minden elsőfokú egyenlet, mely két változót foglal magában, egyenes vonalat képvisel,* mert az ily elsőfokú egyenlet általános alakja ez:

$$Ay + Bx + C = o \qquad 5)$$

ebben A, B, C bármily értékü és jelü, reális és állandó számokat jelenthetnek.

Most, ha az egyenlet minden tagját A-val osztjuk, lesz:

$$y + \frac{B}{A} x + \frac{C}{A} = o \text{ és } y = \frac{B}{A} x - \frac{C}{A}, \text{ vagy röviden:}$$

$$y = kx + l, \textit{ hol } -\frac{B}{A} = k \text{ és } -\frac{C}{A} = l.$$

Azonban bármi legyen k-nak és l-nek értéke és előjele, annyi kétségtelen, hogy k oly szögnek a tangenséül tekinthető, melyet valamely egyenes a derékszögü koordináta rendszer $+X$-tengelyével befog, l pedig az Y-tengely elvágott szeletét jelentheti; következőleg a föntebbi egyenlet (5) csakugyan egyenes vonalat jelent.

52. §. Az egyenes egyenletének taglalása.

1. Minthogy az egyenes egyenlete: $y = kx + l$ két állandó mennyiséget foglal magában, az egyenes fekvésének meghatározására két feltétel szükséges. Ez teljesen egyezik az elemi mértan ama ismeretes tételével, melynek értelmében az egyenes fekvését két pontja határozza meg.

Magától értetődik, hogy az említett állandók (k, l) mindaddig határozatlanok, míg az illető egyenes vonal fekvése nincs megállapítva.

2. Ha $l = o$, az egyenes a kezdőponton megy keresztül és egyenlete ily alaku: $y = kx$. Itt csakugyan $x = o$-nak $y = o$ felel meg és ezek a kezdőpont koordinátái. Ez egyenletben már csak egy határozatlan mennyiség van, k; ennélfogva a megfelelő egyenes helyzetének meghatározására csak *egy* föltétel szükséges.

3. Mikor az egyenes az X-tengellyel egybeesik, $\alpha = o$ és $l = o$ tehát:

$$k = \frac{sin\ \alpha}{sin\ (\varphi - \alpha)} = o,$$

és így az X-tengely egyenlete: $y = o$; ez különben is világos, mert az X-tengely minden pontjának ordinátája $= o$. E tulajdonság azonban csak az X-tengelyt illeti meg.

4. Ha az egyenes vonal az X-tengellyel párhuzamos, $\alpha = o$, tehát $k = o$, és $y = l$, vagyis az egyenes minden pontjának ordinátája $= l$, ez a párhuzamosság természetes következménye.

5. Az egyenes 3) egyenletében:

$$k = \frac{sin\,\alpha}{sin\,(\varphi - \alpha)} = \frac{l}{m},$$

tehát $l = km$, és $y = kx + km$;

ennek következtében az egyenes egyenlete így is irható:

$$x = \frac{y}{k} - m. \qquad 6)$$

6. Ha az egyenes az Y-tengellyel egybeesik, $\alpha = \varphi$ és $m = o$; tehát:

$$k = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \varphi)} = \frac{\sin\varphi}{o} = \infty;$$

következéskép az Y-tengely egyenlete: $x = \frac{y}{\infty} = o$, ez már magában is világos, mert az Y-tengely minden pontjának abscisszája $= o$.

7. Végre, ha az egyenes az Y-tengellyel párhuzamos, vagyis $\alpha = \varphi$:

$$k = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \varphi)} = \infty,$$

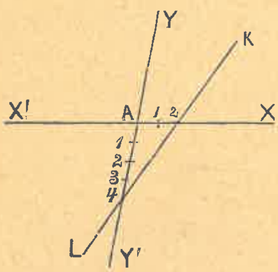
következőkép: $x = -m$, és ez oly egyenes vonal egyenlete, mely az Y-tengellyel párhuzamosan haladva az X-tengelyt $-m$ távolságban metszi.

53. §. Az egyenes szerkesztése.

Az imént előadottak alapján bármely adott egyenes vonalhoz a megfelelő egyenletet fölkereshetjük; most viszont megkisértjük a megadott egyenlet alapján a hozzá tartozó egyenest *megszerkeszteni.*

Az egyenes vonal helyzetét két pont határozza meg; föladatunk tehát abban áll, hogy az egyenes két pontjának koordinátáit meghatározzuk. Legcélszerübb az egyenes ama két pontját meghatározni, ahol a két tengelyt metszi. E pontok koordinátáit így találjuk meg:

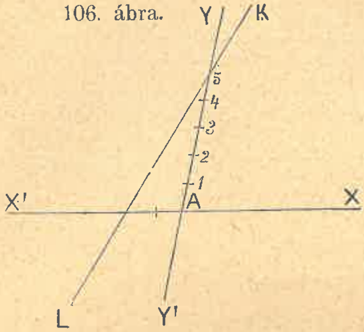
105. ábra.



Legyen pl. $y = 2x - 4$ az adott egyenlet XAY rendszerre vonatkozólag. (105. ábra). A keresett egyenes és az X-tengely közös metsző pontjának ordinátája $y = o$, és ha a föntebbi egyenletben y-t o-nak vesszük, megkapjuk a hozzá tartozó abscisszát, ez t. i. $x = +2$. Hasonlókép határozzuk meg az YY' tengelyen az egyenes metszőpontját is. Erre vonatkozólag: $x = o$ és $y = -4$. Ha tehát a kezdőponttól AY tengelyre 2 hosszegységet, a negativ Y-tengelyre 4 egységet kimérünk és a két végpontot összekapcsoljuk: az adott egyenletnek megfelelő egyenest nyerjük.

Legkönnyebb a szerkesztés azon esetben, ha az egyenes vonal egyenlete ily alakban van adva:

106. ábra.



$$\frac{y}{l} + \frac{x}{-m} = 1$$

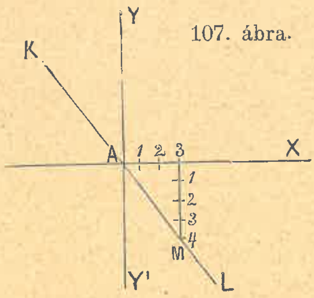
mert itt l és m közvetlenül a tengelyek elvágott szeleteit képviselik,

Legyen például valamely egyenes egyenlete:

$$\frac{y}{5} - \frac{x}{2} = 1,$$

itt a $+$ Y-tengelyre 5 hosszegységet a $-$ X-tengelyre 2 egységet mérünk fel, amint a 106. ábra mutatja.

Van azonban egy eset, mikor az előadott szerkesztés használhatatlan, t. i. akkor, ha az egyenes a tengelyrendszer kezdőpontján halad át, mert ekkor a két átmetsző pont egybeolvad. Ez esetben az egyenes vonalnak csak egy pontját szükséges meghatározni; tegyünk tehát x helyébe az egyenes vonal adott egyenletében valamely alkalmas értéket és keressük a megfelelő y-t.



107. ábra.

Példáúl az egyenes vonal egyenlete: $y = -\frac{4}{3}x$. Legyen $x = 3$, ennek $y = 4$ felel meg. Most, ha a $+$ X-tengelyre a kezdőponttól 3 hosszegységet kimérünk és a talált végponton keresztül az Y-tengellyel párhuzamost vonván, erre negativ irányban 4 egységet mérünk és a végpontot a kezdőponttal összekapcsoljuk, a kivánt egyenes vonalat kapjuk, mely az adott egyenletnek megfelel (107. ábra).

54. §. Föladatok az egyenes vonalról.

1. *Számítsuk ki valamely egyenes egyenlete alapján ($y = kx + l$) azon szöget (α), melyet az egyenes a pozitiv X-tengellyel befog.*

Az előbbiek szerint az irányhatározó:

$$k = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

itt φ a tengelyrendszer hajlási szögét, α pedig a keresett szöget jelenti. Ezen egyenletből következik, hogy:

$$k \sin(\varphi - \alpha) = \sin\alpha,$$

vagy:

$$k(\sin\varphi \cos\alpha - \cos\varphi \sin\alpha) = \sin\alpha;$$

$\cos\alpha$-val osztván, lesz:

$$k(\sin\varphi - \cos\varphi\, tg\,\alpha) = tg\,\alpha$$

és ebből ha $tg\alpha$ értékét keressük,

$$tg\,\alpha = \frac{k\sin\varphi}{1 + k\cos\varphi}.$$

E képlet α szöget teljesen meghatározza. Ha a tengelyrendszer derékszögű, $\varphi = 90^0$, $tg\,\alpha = k$.

2. *Két egyenes vonal adott egyenlete alapján határozzuk meg azok metszőpontját.*

A metszőpont fekvését a megfelelő $x'y'$ koordináták határozzák meg. Az adott egyenletek a következők:

$$y = kx + l, \text{ és } y = k'x + l',$$

itt k, l és k', l' ismert mennyiségekül tekintendők.

Minthogy a metszőpont a két egyenes vonalnak *közös* pontja, koordinátái megfelelnek mind a két egyenletnek, azaz:

$$y' = kx' + l \text{ és } y' = k'x' + l',$$

ezekből:

$$x' = \frac{l' - l}{k - k'},\; y' = \frac{kl' - k'l}{k - k'}.$$

Azon esetre, ha $k = k'$, azonban l különböző l'-től: $x = \infty$ és $y' = \infty$, azaz a két vonal határtalan távolságban találkozik egymással. Ez magában is világos, mert ha $k = k'$, a megfelelő hajlásszögek (α és α') is egyenlők, tehát a vonalak párhuzamosak.

3. *Keressük az egy adott ponton átmenő egyenes vonal egyenletét.*

Az adott pont koordinátái: $x'\; y'$. A keresett egyenlet ily alakú:

$$y = kx + l; \qquad (1)$$

itt azonban k és l egyelőre ismeretlenek. Minthogy az egyenes vonalnak az adott ponton kell keresztül mennie, e pont (x', y') koordinátái szükségkép megfelelnek az egyenes föntebbi egyenletének, azaz:

$$y' = kx' + l. \qquad (2)$$

A (2) egyenletet az (1)-böl kivonván, a kivánt egyenletet kapjuk, t. i.:

$$y - y' = k(x - x').$$

Itt k még határozatlan, azaz k értékét ezen egyenletben tetszés szerint vehetjük fel; és ez igen természetes, mert *egy* ponton keresztül számtalan különböző irányú egyenes húzható.

4. *Keressük a két adott ponton átmenő egyenes vonal egyenletét.*

A két adott pont koordinátái legyenek $x'\; y'$ és $x''\; y''$. Az egyenes általános egyenlete:

$$y = kx + l. \qquad (1)$$

Minthogy az egyenes mind a két ponton átvonul, tehát:

$y' = kx' + l$. (2) és $y'' = kx'' + l$. (3)

E két egyenletből k és l értékét a szokott módon kikereshetjük és (1) egyenletbe helyettesíthetjük. Rövidebb azonban a következő út. Vonjuk ki a (3) egyenletet a (2)-ből, lesz:

$$y' - y'' = k(x' - x'')$$

és ebből:

$$k = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Ezután vonjuk ki a (2) egyenletet az (1)-ből, lesz:

$$y - y' = k(x - x'),$$

k helyébe föntebbi értékét tevén, megkapjuk a kivánt egyenletet:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'), \qquad (a)$$

vagy:

$$(y - y')(x' - x'') = (y' - y'')(x - x').$$

Ezen egyenlet semmiféle határozatlan mennyiséget sem foglal magában; és ez természetes, mert két adott pont az egyenes fekvését teljesen meghatározza.

5. *Mily föltétel mellett húzhatunk három adott ponton keresztül egyenes vonalat?*

A három pont adott koordinátái: x', y', x'', y'', és x''', y'''.

Az előbbiek szerint az első és második ponton átmenő egyenes egyenlete:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'). \qquad (\delta)$$

Most, ha ezen egyenes a harmadik ponton is keresztül megy, az utóbbinak $(y''' x''')$ koordinátái szükségkép megfelelnek (δ) egyenletnek, azaz (δ) egyenlet akkor is helyes, ha az általános koordináták helyébe $x''' y'''$-t teszünk, vagyis:

$$y''' - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x''' - x'),$$

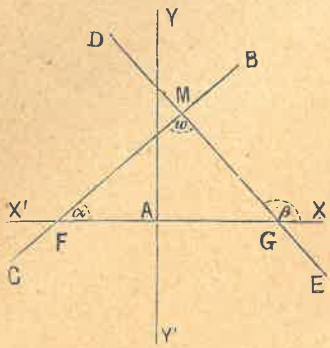
vagy:

$$\frac{y''' - y'}{y'' - y'} = \frac{x''' - x'}{x'' - x'}.$$

Ezen egyenlet csupa ismert mennyiséget foglal magában, és világosan kifejezi a keresett föltételt, melynélfogva:

Három pont csak akkor esik ugyanazon egyenes vonalba, ha abscisszáik különbségei a megfelelő ordináták különbségeivel egyenlő arányúak.

6. *Két egyenes vonal egyenletei alapján határozzuk meg az e vonalak által befogott szöget.*



108. ábra.

Legyen BC és DE (108. ábra) a két egyenes $y = kx + l$ és $y = k'x + l'$ az adott egyenletek, melyek XAY *derékszögű* rendszerre vonatkoznak. Rövidség kedvéért a két egyenes alkotta CME szöget ω-val, BFX szöget α-val és DGX szöget β-val jelöljük. β mint külsőszög $= \alpha + \omega$, és: $\omega = \beta - \alpha$, következőleg $tg\,\omega = tg\,(\beta - \alpha)$,

vagy: $tg\,\omega = \dfrac{tg\,\beta - tg\,\alpha}{1 + tg\,\beta\, tg\,\alpha}$.

Ámde $tg\,\beta = k'$, és $tg\,\alpha = k$, tehát:

$$tg\,\omega = \frac{k' - k}{1 + kk'};$$

e képletből a kivánt szög könnyen kiszámítható.

Ha $k = k'$, akkor $tg\,\omega = o$, tehát $\omega = o$, azaz a két egyenes párhuzamos (lásd a 2. pontot).

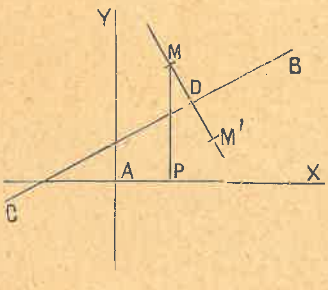
Ha a két egyenes merőleges egymásra, akkor $\omega = 90^0$, tehát $tg\,\omega = \infty$ és így:

$$\frac{k' - k}{1 + kk'} = \infty.$$

Az utóbbi tört csak úgy lehet ∞, ha nevezője: $1 + kk' = o$, számlálója pedig o-tól különböző. De az utóbbi föltétel már az előbbiből foly, mert azon esetre, ha $k - k' = o$ vagyis $k = k'$, a nevező: $1 + kk' = 1 + k^2$ nem lehet $= o$.

A két egyenes vonal tehát — a derékszögü tengelyrendszerben — akkor áll merőlegesen egymásra, ha $1 + kk' = o$, vagyis, ha:

$$k' = -\frac{1}{k} \text{ vagy } k = -\frac{1}{k'}.$$



109. ábra.

7. *Határozzuk meg egy adott pontnak $(x'\,y')$ valamely adott egyenestől $(y = kx + l)$ való távolságát.*

Egyszerüség kedvéért tegyük föl itt is, hogy a tengelyrendszer derékszögü. Erre vonatkozólag legyenek az adott M pont (109. ábra) koordinátái: x', y' és az adott BC egyenes egyenlete: $y=kx+l$ (1). A keresett távolság nem egyéb, mint az M pontból BC-re húzott merőleges egyenes hossza: MD. Ennek meghatározása végett keressük előbb az M ponton átmenő egyenes egyenletét.

Ez a 3. p. szerint:

$$y-y'=k_1\ (x-x').$$

Most, ha ezen egyenes BC-re merőleges, a megelőző pontnál fogva:

$$k_1=-\frac{1}{k};$$

következőleg MD merőleges egyenlete:

$$y-y'=-\frac{1}{k}(x-x'). \qquad (2)$$

Minthogy továbbá a merőleges talppontja (D) mind a két egyenesnek közös pontja, tehát D pont koordinátái $(x''\ y'')$ mind a két egyenes egyenletének megfelelnek, azaz:

$$y''=kx''+l \text{ (3) és } y''-y'=-\frac{1}{k}(x''-x'), \qquad (4)$$

ebből x'', y'' könnyen kiszámítható.

Ámde célunk: DM (p) távolságot meghatározni; ezt pedig a 48. §. eme képlete alapján tudjuk meg:

$$p=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}. \qquad (5)$$

Látnivaló, hogy föladatunk megfejtése csak az $(x'-x'')$ és $(y'-y'')$ különbségek kiszámítását követeli. Evégből a (3) egyenletet ily alakba öntjük:

$$y''-y'=k(x''-x')-y'+kx'+l$$

és ezt egybevetjük a (4) egyenlettel; ezekből

$$x''-x'=\frac{k\,(y'-kx'-l)}{k^2+1} \text{ és } y''-y'=-\frac{y'-kx'-l}{k^2+1},$$

ha ez értékeket az (5) egyenletbe helyettesítjük, lesz:

$$p=\pm\sqrt{\frac{(y'-kx'-l)^2\,(k^2+1)}{(k^2+1)^2}}, \text{ vagy:}$$

$$p=\pm\frac{y'-kx'-l}{\sqrt{1+k^2}}. \qquad (6)$$

Minthogy p negativ nem lehet, a két előjele közül csak annak van helye, melynek $+$ jelű p felel meg. Midőn tehát a tört számlálója pozitiv, a $+$ jel, midőn negativ, a $-$ jel veendő.

A számláló előjele attól függ, hogy az M pont BC-nek innenső, vagy tulsó oldalára esik-e. Eme két helyzetnek megfelelőleg a számláló $+$, illetőleg $-$ lesz.

Ha az adott pont a koordináta rendszer kezdő pontjával egybeesik, azaz $x'=o$, $y'=o$, a (6) egyenlet ily alakot ölt:

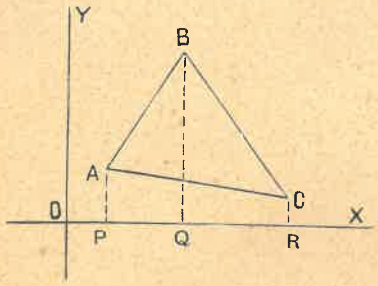
$$p=\pm\frac{l}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Végül, ha az adott pont az adott egyenes vonalra esik, $y'-kx'-l=o$, tehát $p=o$, amint lennie kell.

8. *Határozzuk meg a háromszög területét, ha szögpontjainak koordinátái:*

$$A\begin{cases}x_1\\y_1\end{cases}\quad B\begin{cases}x_2\\y_2\end{cases}\quad C\begin{cases}x_3\\y_3.\end{cases}$$

110. ábra.



A 110. ábra szerint

$$t=APQB+BQRC-APRC,$$

továbbá:

$$APQB \text{ trapéz} = \frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)$$

$$BQRC \text{ trapéz} = \frac{y_2+y_3}{2}(x_3-x_2)$$

$$APRC \text{ trapéz} = \frac{y_3+y_1}{2}(x_3-x_1),$$

tehát:

$$2t=(x_2-x_1)(y_1+y_2)+(x_3-x_2)(y_2+y_3)+(x_1-x_3)(y_3+y_1),$$

vagy:

$$2t=x_1(y_3-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_1).$$

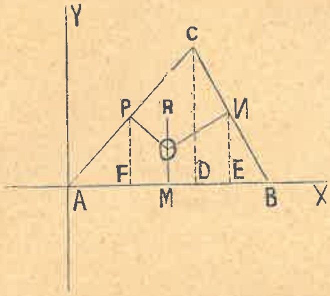
Megjegyzendő azonban, hogy ez a formula a háromszög kétszeres területének csak a számértékét adja; az előjel ellenben mindannyiszor ellenkezőre fordul, valahányszor *ABC* betük közül kettő helyet cserél.

55. §. A háromszög néhány tételének analitikai bebizonyítása.

A föntebbiek alkalmazásául a háromszög néhány nevezetes tételét fogjuk analitikailag fejtegetni.

1. *A háromszög oldalainak három felező pontjában emelt merőlegesek egyazon közös pontban* (a körülirt kör középpontjában) *találkoznak.*

111. ábra.



Legyen ABC (111. ábra) az adott háromszög, AB oldal az X-tengely és az A szögponton keresztül AB-re vont merőleges (AY) az Y-tengely.

C pont koordinátáit $x'y'$-tel, B pont abscisszáját x''-vel jelöljük, az utóbbinak koordinátája $= o$.

Az oldalak felező pontjainak koordinátái ezek:

M pontéi: $x = \frac{1}{2}x''$, $y = o$.
N pontéi: $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$, $y = \frac{1}{2}y'$ (miért?)
P pontéi: $x = \frac{1}{2}x'$, $y = \frac{1}{2}y'$.

Továbbá:

AB egyenes egyenlete: $y = o$;

BC egyenlete: $y = \dfrac{y'}{x' - x''}(x - x'')$.

AC egyenlete: $y = \dfrac{y'}{x'}x$.

Tehát a három merőleges egyenlete:

1. MO egyenlete: $x = \frac{1}{2}x''$ (mert $MO \parallel AY$).

2. NO egyenlete: $y - \dfrac{y'}{2} = \dfrac{x'' - x'}{y'}\left(x - \dfrac{x' + x''}{2}\right)$,

(mert N ponton megy át és BC-re merőleges).

3. PO egyenlete: $y - \frac{1}{2}y' = \dfrac{-x'}{y'}\left(x - \frac{1}{2}x'\right)$,

(mert P ponton átmegy és AC-re merőleges).

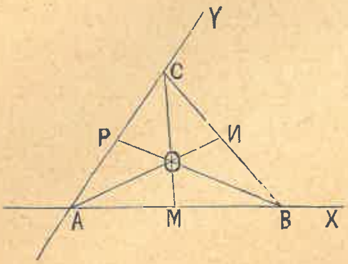
PO és NO átmetsző pontjának koordinátáit keresve, a 2. és 3. egyenlet jobb oldalát összekapcsoljuk, vagyis:

$$\frac{x'' - x'}{y'}\left(x - \frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{-x'}{y'}\left(x - \frac{x'}{2}\right),$$

ahol x, y az átmetsző pont koordinátái. Ezen egyenletből kellő összevonás után: $x = \frac{1}{2}x''$, és ez világosan mutatja, hogy PO és NO merőlegesek metszőpontja $(O)MR$ egyenesbe esik, azaz a három merőleges egyazon (O) pontban találkozik.

2. *A háromszög szögpontjaiból az átellenes oldalak felező pontjaihoz húzott három egyenes, szóval a három középvonal egyazon közös pontban, a háromszög súlypontjában találkozik.*

112. ábra.



Legyen ABC (112. ábra) az adott háromszög; AB oldal az X-, AC az Y-tengely.

A pont koordinátái: $x=o$, $y=o$
B « « $x=x''$, $y=o$
C « « $x=o$, $y=y'$.

Továbbá AB felező pontjának, M pontnak a koordinátái:

$$x=\tfrac{1}{2}x'',\ y=o,$$

N pontéi: $x=\frac{1}{2}x''$ $y=\frac{1}{2}y'$,
végre P pontéi: $x=o$, $y=\frac{1}{2}y'$.

Ennélfogva AN egyenes vonal egyenlete: $y=\dfrac{y'}{x''}\,x$,

CM egyenesé: $y=\dfrac{-y'}{\frac{1}{2}x''}\left(x-\dfrac{x''}{2}\right)=-\dfrac{2y'}{x''}\left(x-\dfrac{x''}{2}\right)$,

BP egyenesé: $y=-\dfrac{\frac{1}{2}y'}{x''}(x-x'')=-\dfrac{y'}{2x''}(x-x'')$.

Már most keressük AN és CM, majd AN és BP egyenesek átmetsző pontjának koordinátáit, mind a két esetben ugyanazokat az értékeket kapjuk, t. i.

$$x=\tfrac{1}{3}x'' \text{ és } y=\tfrac{1}{3}y'$$

és ez a föntebbi tételt igazolja.

Hasonlókép bizonyítható be a következő tétel is:

3. *A háromszög három magassági vonala egyazon közös pontban találkozik.*

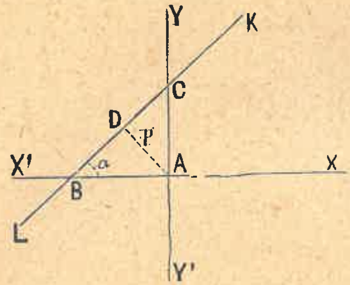
4. Végre az 54. §. 5. pontja alapján kimutatható, hogy a *föntebbi három nevezetes pont ugyanazon egyenes vonalba esik, és a súlypont a magasságok metsző pontjától kétszer annyira van, mint a körülírt kör középpontjától.* (Euler-féle tétel.)

56. §. Az egyenes sarkegyenlete.

Hogy az egyenes általános egyenletét *($y=kx+l$) sarkrendszerre* tehessük át, a már kifejtett átalakító képleteket kell alkalmaznunk.

Egyszerüség kedvéért föltesszük, hogy az adott egyenlet *derékszögü* tengely-rendszerre vonatkozik, továbbá a sarkrendszer sarkpontja az eredeti rendszer kezdőpontjával és a sarktengely az X-

113. ábra.



tengellyel összeesik (113. ábra.) Ezen esetben az $x = \rho \cos \omega$, és $y = \rho \sin \omega$ egyenleteket alkalmazzuk, hol ρ a vezérsugarat, ω a sarkszöget jelenti, x és y értékeit KL egyenletében: $y = kx + l$ helyettesítvén, lesz:

$$\rho \sin \omega = k \cdot \rho \cos \omega + l, \text{ és}$$
$$\rho (\sin \omega - k \cos \omega) = l\,;$$

$$\rho(\sin \omega - tg\,\alpha \cdot \cos \omega) = l \text{ vagy } \rho \cdot \frac{\sin \omega \cos \alpha - \cos \omega \sin \alpha}{\cos \alpha} = l,$$

$$\rho \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\cos \alpha} = l.$$

Ebből ρ értékét keresve, lesz:

$$\rho = \frac{l \cos \alpha}{\sin(\omega - \alpha)},$$

és ez az egyenes sarkegyenlete. A jobb oldalon álló tört számlálóját más alakban is írhatjuk. Ugyanis, ha A sarkpontból KL egyenesre AD merőlegest vonjuk és ennek hosszát p-vel jelöljük, $p = l \cos \alpha$, tehát:

$$\rho = \frac{p}{\sin(\omega - \alpha)}. \qquad (\delta)$$

ω-t o-nak tévén, a megfelelő vezérsugár $\left(\text{azaz: } \rho = -\frac{p}{\sin \alpha}\right)$ B pontot határozza meg, ahol az egyenes a sarktengelyt szeli. ω-t o-tól α-ig növesztvén, ρ-nak számértéke $\frac{p}{\sin \alpha}$-tól ∞-ig növekedik, ámde negativ irányban; a mondott határok közt tehát (δ) egyenlet az egyenes azon részének felel meg, mely a sarktengely *alatt* van. Midőn ω értéke α-tól $90^0 + \alpha$-ig növekedik, ρ értéke folyton $+$ jelü és csökken p-ig: ekkor egyenletünk az egyenes tengely *fölötti* részét képviseli, ámde csak D pontig, vagyis a sarkpontból húzott merőleges talppontjáig. Végre az ω szög $90^0 + \alpha$ és 180^0 közti értékei az egyenes vonal DB részének felelnek meg.

Tizenkettedik fejezet.

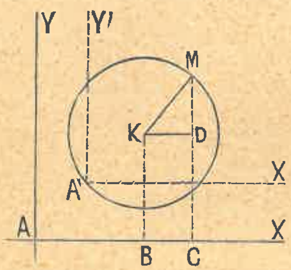
A másodrendű vonalak.

A) A kör.

57. §. A kör egyenlete.

A körvonal jellemző tulajdonsága, hogy minden pontja a középponttól egyenlő távolságra van. E tulajdonságot egyenletbe foglalandók, alakítsunk kört és vonatkoztassuk XAY (114. ábra) *derékszögű* tengelyrendszerre.

114. ábra.



A kör K középpontjának koordinátái: $AB=p$, $BK=q$, a körsugár $=r$; és a körvonal valamelyik M pontjának koordinátái legyenek: $AC=x$ és $CM=y$.

A 48. §. 2. képlete szerint:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2, \quad (1)$$

vagy kifejtve:

$$x^2-2px+y^2-2qy+p^2+q^2=r^2. \quad (2)$$

Ezen egyenlet a kör *bármely* pontjának koordinátáira nézve érvényes; ezért, ha x és y-t *változóknak* tekintjük, a föntebbi egyenlet a körvonal egyenletét jelenti.

Ha a kezdőpont a körvonal valamelyik pontjára esik, $p^2+q^2=r^2$, a kör (2) egyenlete ily alakot nyer:

$$x^2-2px+y^2-2qy=o. \quad (3)$$

Ha ezen kivül az X-tengely a kör középpontján megy keresztül, még $q=o$ és $p=r$: tehát a kör egyenlete ily alakú:

$$x^2-2rx+y^2=o. \quad (4)$$

Legegyszerübb a kör egyenlete azon esetben, ha a rendszer kezdőpontja a kör középpontjába esik; ekkor $p=q=o$, tehát:

$$x^2+y^2=r^2. \quad (5)$$

A kör általános egyenlete (1) *három* állandó mennyiséget foglal magában; ez bizonyitja, hogy a kör helyzetének meghatározására három föltétel szükséges.

Az említett három állandó mennyiség bármily értékü lehet, az idézett egyenlet mindig körvonalat jelent.

A (3) egyenlet csak *két* állandót, a (4) és (5) számú pedig csupán *egy* állandót foglal magában; a mondott esetekben t. i. a kör fekvését meghatározó három föltétel közül az egyik, illetőleg kettő már az egyenlet *föltételeiben* rejlik.

58. §. A kör középponti egyenletének taglalása.

A föntebbi egyenletek bármelyike teljesen magában foglalja a körvonal valamennyi tulajdonságait. E tulajdonságok fejtegetését az egyenlet *taglalásának* nevezzük. Könnyebbség kedvéért a kör *legegyszerűbb* egyenletét, az (5)-et taglaljuk.

Ezen egyenlet, ha azt y-ra vonatkozólag megfejtjük, igy hangzik:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

A kettős előjel azt mutatja, hogy x oly értékének, amely $<$ r-nél két egyenlö értékü, ám ellenkező fekvésü y felel meg; ebből azt következtetjük, hogy a körvonal az X-tengely *fölött* és *alatt* egyenlőkép terül el. Most x-re nézve fejtve meg az egyenletet:

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Azaz y minden oly értékének, amely kisebb r-nél, két egyenlő értékü, ellenkező fekvésü abscissza felel meg; ez ismét azt bizonyítja, hogy a körvonal az Y-tengely két oldalán egyformán terül el.

A szóban forgó egyenletben y-t o-nak tevén, azon pontok abscisszáit kapjuk, ahol az X-tengely a körvonalat átmetszi, ugyanis $x = \pm r$, azaz a kör az X-tengelyt két pontban metszi át, és ezek a kezdőponttól jobbra és balra r távolságban vannak.

Hasonlóképen midőn $x = o$, akkor $y = \pm r$, vagyis a kör az Y-tengelyt is két pontban metszi át, és ezek is a kezdőponttól $+r$ és $-r$ távolságra esnek.

Látnivaló továbbá, hogy az egyik koordináta növekedtével a másik fogy és hogy sem x, sem y értéke nem lehet nagyobb r-nél; az y akkor éri el legnagyobb értékét, mikor $x = o$, viszont x akkor annyi, mint r, mikor $y = o$.

Ha tehát a két tengely metszőpontjain keresztül a megfelelő tengelyekre merőlegeseket húzunk, az utóbbiak által berekesztett négyzet a kört mindenfelől befogja, azaz a kör zárt görbe vonal.

Végre könnyen meggyőződhetünk, hogy a kör középponti egyenletének alakja teljesen változatlan marad akkor is, ha a derékszögü rendszert a középpont körül tetszés szerint odább forgatjuk (49. §. *B.* II. a) képlet), más szóval a tengelyek metszőpontjai a középponttól mindig r távolságra esnek; ennélfogva a körvonal minden pontja a középponttól egyenlö távolságra van.

59. §. A kör szerkesztése a megfelelő egyenlet alapján.

A kör fekvését középpontjának koordinátái és sugarának hossza határozzák meg. Ha tehát a kört megfelelő egyenlete alapján *szerkeszteni* kivánjuk, az adott egyenletet oly alakba kell öntenünk, hogy abból az említett mennyiségeket könnyen kiszemelhessük. — E célra különösen alkalmas a kör (1) számú egyenlete:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

mert ebben p és q közvetlenül a középpont koordinátáit, r pedig a sugarat jelentik.

Hogy mikép lehet a kör adott egyenletét a kivánt alakban előállítani, azt legkönnyebben néhány példán fogjuk megtanulni.

1. Legyen adva: $x^2+y^2+6x+4y=3$.

Először (x^2+6x) nem teljes négyzetet kiegészítjük, hozzá adva a hiányzó harmadik tagot, vagyis x fél együtthatójának négyzetét: 9-et; szintúgy (y^2-4y) nem teljes négyzetet is kiegészítjük, hozzáadván y fél együtthatójának négyzetét: 4-et. Az egyenlőség fenntartása végett ugyane számokat az egyenlet jobb oldalához is hozzá kell adnunk; ennek következtében következő egyenlet származik:

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)=3+9+4,$$

vagy:

$$(x+3)^2+(y-2)^2=16.$$

Ennélfogva: $p=-3, q=2$, és $r=\sqrt{16}=4$, és ez adatok alapján a kört könnyen megrajzolhatjuk.

2. Az adott egyenlet:

$$16x^2+16y^2-8x+96y+120=0.$$

Osszuk el az egyenlet minden tagját 16-tal (a végből t. i., hogy x^2 és y^2 együtthatója 1 legyen.) Ekkép:

$$x^2+y^2-\tfrac{1}{2}x+6y+\frac{120}{16}=0.$$

A nem teljes négyzeteket kiegészitve:

$$\left(x^2-\tfrac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+(y^2+6y+9)=-\frac{120}{16}+\frac{1}{16}+9,$$

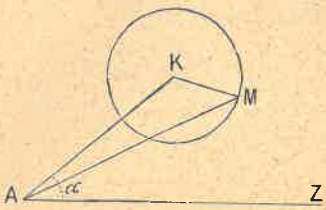
vagy:

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y+3)^2=\frac{25}{16}.$$

Következőleg $p=\frac{1}{4}$, $q=-3$ és $r=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$.

60. §. A kör sarkegyenlete.

115. ábra.



Legyen A (115, ábra) a rendszer sarkpontja és AZ a sarktengely. A kör sugarát r-rel, középpontja sarkkoordinátáit a és α-val jelöljük, tehát $AK = a$, $ZAK \sphericalangle = \alpha$. A kör M pontjának sarkkoordinátái legyenek $AM = \rho$ és $ZAM \sphericalangle = \omega$.

$AKM \triangle$-re Carnot tételét alkalmazván:

$$\overline{KM}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{AM}^2 - 2\,\overline{AK}\,.\,\overline{AM}(\cos\alpha - \omega),$$

vagy:

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\alpha - \omega),$$

ebből ρ értékét keresve, lesz:

$$\rho = a\cos(\alpha - \omega) \pm \sqrt{r^2 - a^2\sin^2(\alpha - \omega)}.$$

Ezen egyenlet a körvonal minden pontjára nézve áll; ez tehát a kör sarkegyenlete.

Látnivaló, hogy mindaddig, míg $r^2 > a^2\sin^2(\alpha - \omega)$, ω-nak két különböző ρ felel meg. Mellőzve az egyenlet bővebb taglalását, csak azt jegyezzük meg, hogy, ha ρ-nak két összetartozó értékét ($\rho_1\,\rho_2$) egymással szorozzuk, $\rho_1\rho_2 = a^2 - r^2 = (a + r)(a - r)$, és ez nem egyéb, mint a kör azon ismeretes tulajdonsága, hogy az egyazon pontból vont átmetszők szeleteinek szorzata állandó mennyiség.

61. §. A kör és az egyenes vonal átmetszésének föltételei.

Legyen a kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$ (1)

az egyenes vonalé: $y = kx + l$. (2)

Most, ha e két vonalnak valamely közös pontja van, az utóbbinak x', y' koordinátái mind a két egyenletnek megfelelnek, azaz:

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = r^2, & (1') \\ y' = kx' + l. & (2') \end{cases}$$

Ha y' értékét a (2′) egyenletből helyettesítjük az (1′)-be, lesz:

$$x'^2 + (kx' + l)^2 = r^2,$$

és ebből:

$$x' = \frac{-kl \pm \sqrt{r^2(1 + k^2) - l^2}}{1 + k^2},$$

továbbá a (2') egyenletből:

$$y' = \frac{l \pm k\sqrt{r^2(1+k^2) - l^2}}{1+k^2}.$$

Itt most három lehetőség van.

1. $r^2(1+k^2) > l^2$ vagyis $\frac{l}{\sqrt{1+k^2}} < r$; ez esetben mind a két koordinátának kettős értéke van: az egyenes tehát a körvonalat két pontban szeli. Minthogy e tört: $\frac{l}{\sqrt{1+k^2}}$ nem egyéb, mint a középpontnak az egyenestől való távolsága (54. §. 7. p. (7) kpl.), látnivaló, hogy: *az egyenes vonal csak akkor metszheti a kört, ha távolsága a középponttól kisebb a kör sugaránál.*

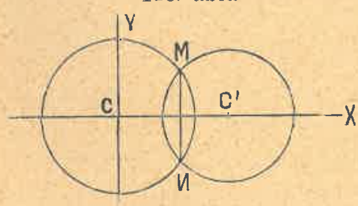
2. $r^2(1+k^2) < l^2$, következőleg $\frac{l}{\sqrt{1+k^2}} > r$, ekkor x és y-nak mind a két értéke képzetes, azaz a két vonal nem találkozik egymással.

3. Végre $r^2(1+k^2) = l^2$, következőleg $\frac{l}{\sqrt{1+k^2}} = r$, ez esetben a gyökmennyiség $= o$, tehát mindegyik koordinátának csak egy értéke, azaz a vonalaknak csak *egy* közös pontjuk van, szóval azok érintkeznek. Viszont az egyenes csak akkor érintkezhetik a körrel, ha a középponttól való távolsága = a körsugárral.

62. §. Két kör kölcsönös fekvéséről.

Vizsgáljuk meg két kör átmetszésének *föltételeit.*

116. ábra.



Legyen C (116. ábra) az egyik, C' a másik kör középpontja; az elsőnek sugarát r-, a másikét r'-tel, a középpontok kölcsönös távolságát d-vel jelöljük. Egyszerüség kedvéért derékszögű tengelyrendszert alkalmazunk, és a centrális távolságot (CC'-et) X-tengelyül, C pontot kezdőpontul tekintjük.

Ekkor C kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$ (1)

C' köré: $x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = r'^2$ (2)

Most, ha a két körnek közös pontja van, ennek koordinátái mind a két kör egyenletének okvetlenül megfelelnek. E közös pont koordinátáit x' y'-tel jelölvén, eme két egyenlet áll:

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$
$$x'^2 + y'^2 - 2dx' + d^2 = r'^2.$$

Ezekből x'-t és y'-t kikeresve, lesz:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{d^2 + r^2 - r'^2}{2d} \\ y' = \pm \dfrac{1}{2d}\sqrt{4d^2 r^2 - (d^2 + r^2 - r'^2)^2}. \end{cases}$$

Látnivaló, hogy azon esetben, ha a gyökjel alatti kifejezés pozitív, és o-tól különböző, a körök két pontban, de csakis kettőben találkoznak. E két közös pontnak egyazon abscisszája van, ordinátáik pedig számértékre nézve egyenlők, ámde előjelüket illetőleg ellenkezők; miből azt következtetjük, hogy a centrális távolság (mint X-tengely) a közös húrra *merőlegesen* áll és ezt *felezi*.

Már most az a kérdés, *mikor pozitiv a gyökjel alatti kifejezés?* mert y értéke csak akkor reális szám. E végből vizsgáljuk meg közelebbről a kérdéses többtagút. Két négyzet különbségét tényezőkre bonthatjuk; ennélfogva:

$$y' = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(2dr + d^2 + r^2 - r'^2)(2dr - d^2 - r^2 + r'^2)},$$

vagy:

$$y' = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{[(d+r)^2 - r'^2]\,[r'^2 - (d-r)^2]}$$

Itt mindegyik tényező két négyzet különbsége; következéskép:

$$y' = \pm \frac{1}{2d}\sqrt{(d + r + r')\,(d + r - r')\,(r' + d - r)\,(r' - d + r)}.$$

Minthogy módunkban áll a rendszer kezdőpontját a nagyobbik kör középpontjába helyezni, a gyökjel alatti szorzat első és második tényezőjét pozitivnak tekinthetjük. Ez még akkor is áll, ha a két kör sugara egyenlő. Ennélfogva a szorzat mennyisége a harmadik és negyedik tényező előjelétől függ, más szóval, a szorzat csak akkor $+$ jelü, ha az utóbbi mindkét tényező $+$, vagy, ha mind a kettő $-$ jelü.

Az első esetben: $r' + d > r$ és $r + r' > d$,

a másodikban: $r' + d < r$ és $r + r' < d$.

Az utóbbi eset merő képtelenség, mert d nem lehet kisebb is, nagyobb is r-nél.

Ennélfogva y' csak akkor reális értékü, más szóval a két kör csak akkor metsztheti egymást, ha $r'+d>r$, és $r+r'>d$, azaz, ha e három vonal közül r, r', d kettő-kettő együttvéve nagyobb a harmadiknál, más szóval ha d, r és r' egyenesekből háromszög alakítható.

Ha a gyökjel alatti kifejezés $=o$, a két közös pont egybeolvad, azaz a körök érintkeznek. Ez pedig akkor fog bekövetkezni, ha a gyökjel alatti tényezők egyike $=o$. Minthogy az első és második tényező a föntebbiek szerint mindig $>o$-nál, a szorzat csak úgy lehet o, ha vagy $r'+d-r=o$, vagy pedig $r'+r-d=o$. Eszerint ha $d=r-r'$, vagy $d=r+r'$, a körök érintkeznek egymással. Viszont, ha két kör érintkezik, akkor az imént említett két föltétel közül az egyik vagy a másik szükségkép áll; azaz két kör csak úgy érintkezhetik egymással, ha középpontjaik kölcsönös távolsága vagy annyi, mint a sugarak összege, vagy akkora, mint a sugarak különbsége, mert máskülönben a gyökjel alatti kifejezés zérussá nem lehet.

Minthogy továbbá ez esetben $y'=o$, ennélfogva két kör érintkezési pontja mindig a centrális vonalba esik.

Végre, ha a gyökjel alatti szorzat negativ, akkor y értéke képzetes, azaz a két körnek közös pontja nincs.

Itt is két esetet kell megkülönböztetni, t. i.:

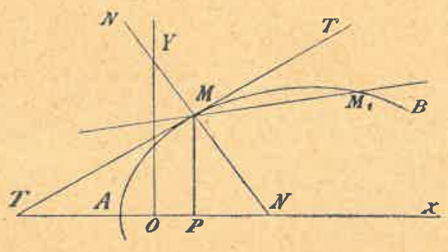
1. $r>r'+d$, vagy $d<r-r'$; és 2. $d>r+r'$, azaz?

63. §. A kör érintője és deréklője.

Mielőtt a kör érintőjének egyenletét fejtegetnők, az érintő egyenes *általános* fogalmával kell megismerkednünk.

Ha AB görbevonal (117. ábra) M és M' pontjain át szelőt húzunk s feltesszük, hogy az egyenest M pont körül addig forgatjuk, míg M' folyton közeledve M-hez, végre azzal összeesik, akkor a szelő TT' egyenes helyzetébe jut s a görbe vonal M pontjára nézve *érintőnek* nevezzük még akkor is, ha M-től jobbra vagy balra a görbevonalat ismételten metszené. Az érintési pontban

117. ábra.



az érintőre emelt merőlegesnek az X-tengelyig mért NM darabját M pont *deréklőjének* vagy *normálisának*, az MT távolságot *érintőnek*, az érintő M pontjának ordinátája és T pontja közt fekvő PT vonalat *subtangensének*, NP távolságot pedig *subnormálisának* hívjuk. Ezek közös néven *az érintési vonalak*.

Ezen magyarázat alapján keressük most:

1. *a kör valamely meghatározott M pontján keresztül húzott érintőnek az egyenletét.*

Legyen a kör adott egyenlete: $x^2+y^2=r^2$, M érintő pont koordinátái: x', y'; vonjunk M ponton keresztül szelőt, ez a kört még egy másik M' pontban is átmetszi, melynek koordinátáit x'', y''-vel jelöljük.

A szelő egyenlete így alakúl:

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

Minthogy M és M' a kör pontjai, tehát koordinátáik a kör egyenletének szükségkép megfelelnek, azaz:

$$\left.\begin{aligned} x'^2+y'^2&=r^2. \\ x''^2+y''^2&=r^2. \end{aligned}\right\}$$

E két egyenletből a föntebbi $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ törtszám értékét meghatározhatjuk.

Vonjuk ki az alsó egyenletet a felsőből, lesz:

$$(x'^2-x''^2)+(y'^2-y''^2)=o,$$

vagy $(x'+x'')(x'-x'')+(y'+y'')(y'-y'')=o$, és ebből:

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{x'+x''}{y'+y''}.$$

Ennélfogva a szelő egyenlete:

$$y-y'=-\frac{x'+x''}{y'+y''}(x-x').$$

Midőn a két metszőpont egybeolvad, vagyis:

$$x''=x' \text{ és } y''=y',$$

a szelő érintővé válik. Az érintő egyenlete tehát:

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x'). \qquad (\alpha)$$

Vagy a törteket eltüntetve és a tagokat rendezve:

$$yy'+xx'=x'^2+y'^2,$$

ámde:

$$x'^2+y'^2=r^2;$$

tehát a kör érintőjének egyszerübb egyenlete:

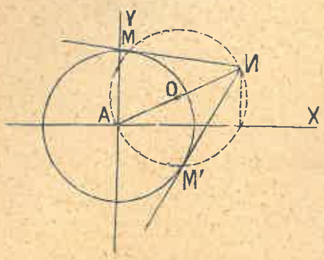
$$x'x+y'y=r^2. \qquad (\beta)$$

Ez utóbbi egyenlet feltünően hasonlít a kör egyenletéhez, s ezért könnyebben tartható meg emlékezetben, mint az előbbi (α).

2. *A körön kívül adott N pontból szerkesszünk a körhöz érintőt.*

Legyenek az adott N pont (118. ábra) koordinátái x'', y''; a kör egyenlete: $x^2+y^2=r^2$.

118. ábra.



Az érintő M pont ismeretlen koordinátáit x', y'-sal jelölve, az érintő egyenlete:

$$x'x+y'y=r^2;$$

minthogy ezen egyenes az adott N ponton is átmegy, egyenlete akkor is érvényes, ha x, y helyébe x'', y''-t tesszük, azaz:

$$x'x''+y'y''=r^2. \qquad (1)$$

Ámde az érintés pontja egyszersmind a körnek is pontja, tehát:

$$x'^2+y'^2=r^2. \qquad (2)$$

Már az utóbbi két egyenletből x' és y'-et könnyen meghatározhatjuk. Ugyanis az (1) egyenletből:

$$y'=\frac{r^2-x'x''}{y''},$$

ez értéket a (2) számú egyenletbe helyettesítve, lesz:

$$(x''^2+y''^2)x'^2-2r^2x'x''+r^2(r^2-y''^2)=o,$$

és innen: $$x'=\frac{r^2x''\pm ry''\sqrt{x''^2+y''^2-r^2}}{x''^2+y''^2};$$

y' megfelelő értékei:

$$y'=\frac{r^2y''\mp rx''\sqrt{x''^2+y''^2-r^2}}{x''^2+y''^2}.$$

Látni ezekből, hogy: 1. ha az adott N pont a körön kivül fekszik, vagyis $x''^2+y''^2>r^2$, akkor x' és y' értékei reálisak és nem egyenlők, azaz a feladatnak két megfejtése van; ellenben 2. ha az adott pont a körön belül van, azaz $x''^2+y''^2<r^2$, akkor x' és y' értékei képzetesek, azaz a feladat nem fejthető meg; végre 3. ha az adott pont a kör kerületén fekszik, vagyis $x''^2+y''^2=r^2$, akkor a két rendbeli értékek egybeesnek, tehát csak egy érintő vonható.

A föntebbiek után az érintési pont koordinátái ismertek lévén, MN érintő egyenletét könnyen felkereshetnők. Ehelyett azonban inkább az érintési pont mértani alakítását keressük meg.

Térjünk vissza az (1) és (2) számú egyenletekre és tekintsük ezekben az érintési pont (x', y') koordinátáit változó mennyiségeknek. Ha képesek lennénk az idézett egyenleteknek megfelelő mértani helyeket megtalálni, az utóbbiak metszőpontjai kétségkívül a keresett érintési pontok lennének, mert koordinátáik mind a két egyenletnek megfelelnek.

Ámde a (2) egyenlet, ha abban x' és y'-et változóknak tekintjük, azon adott kör egyenlete, melynek középpontja: A, sugara: r. Ami az (1) egyenletet illeti, vonjuk ki előbb a (2)-ből és egészítsük ki a nem teljes négyzetet, ennek folytán az ily alakot nyer:

$$(x'-\tfrac{1}{2}x'')^2+(y'-\tfrac{1}{2}y'')^2=\tfrac{1}{4}(x''^2+y''^2). \qquad (\alpha)$$

Ezen egyenlet ismét kört jelent, melyre nézve a középpont koordinátái: $\frac{1}{2}x'', \frac{1}{2}y''$, a sugár pedig $=\frac{1}{2}\sqrt{x''^2+y''^2}$. Minthogy N pont koordinátái x'', y'', tehát AN felező pontjának O-nak koordinátái: $\frac{1}{2}x'', \frac{1}{2}y''$, továbbá AN távolság $=\sqrt{x''^2+y''^2}$, ennélfogva $AO=ON$ $=\frac{1}{2}\sqrt{x''^2+y''^2}$. Ha tehát O pontból AO sugárral kört szerkesztünk, ez az (α) egyenletnek megfelelő mértani hely. A két kör metsző pontjai a keresett érintési pontok.

Látnivaló, hogy e szerkesztés az elemi mértanban előadott szerkesztéssel teljesen megegyezik.

A szóban forgó mértani helyeket közvetlenül is megalakíthatjuk. Térjünk vissza ismét az (1) és (2) számú egyenletekre; u. m.:

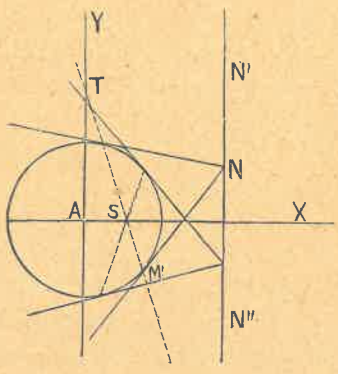
$$x'x''+y'y''=r^2 \qquad (1)$$
$$x'^2+y'^2=r^2. \qquad (2)$$

ahol x' és y'-t megint változó mennyiségeknek tekintjük. A (2) egyenlet az adott kört képviseli: az (1) pedig, mint első fokú egyenlet, egyenes vonalat jelent, melynek mértani helyét úgy határozzuk meg, hogy a tengelyek metszőpontjait keressük. Nevezetesen:

$$\text{ha } y'=o, \text{ a megfelelő } x'=AS=\frac{r^2}{x''},$$

$$\text{ha } x'=o, \text{ a megfelelő } y'=AT=\frac{r^2}{y''}.$$

119. ábra.



E kifejezések szerkesztése magában véve elég könnyü, habár nem oly egyszerü, mint az előbbi megfejtés. De ez utóbbi egyenletekből más tekintetben fontos következtetéseket vonhatunk. Ugyanis AS értéke $(r^2:x'')$ az adott (N) pont ordinátájától teljesen független, azaz csak akkor változhatik, ha x'' értéke megváltozik. Ha tehát N ponton keresztül (119. ábra) AX tengelyre $N'N''$ merőlegest húzzuk, ennek minden pontjának ugyanazon AS felel meg. Világos az is, hogy NN' egyenes vonal helyzete tetszés szerint változhatik a kör síkjában; hisz a rendszer X-tengelyét mindig úgy vonhatjuk, hogy az $N'N''$-re merőleges legyen.

Ennélfogva, ha valamely egyenes $(N' N'')$ akárhány pontjából a körhöz két-két érintőt vonunk, és a megfelelő érintő pontokat húrokkal összekapcsoljuk, mindezen húrok egy közös S pontban találkoznak.

3. *A deréklő* (normális) *egyenlete*. Az érintési pont adott koordinátáit x', y'-gyel jelölve, a deréklő egyenlete ily alakú:

$$y - y' = k_1 \ (x - x').$$

Minthogy a deréklő az érintőre merőlegesen áll, tehát az 1. pont (α) jegyű egyenlete alapján: $k_1 = y' : x'$, következőleg:

$$y - y' = \frac{y'}{x'} \ (x - x'), \text{ vagy } y = \frac{y'}{x'} x.$$

és ez a kör x', y' pontjához tartozó deréklő egyenlete.

Látni ebből, hogy a deréklő a rendszer kezdő pontján, vagyis a kör középpontján megy keresztül; következőleg a kör érintője az érintési ponthoz tartozó sugárral derékszöget fog be, a mi eléggé ismeretes.

Az *érintési vonalakra* nézve:

A *subtangens* meghatározására előbb az érintő és az abscisszatengely metszés-pontjának abscisszáját kell megismernünk. Az abscissza-tengely egyenlete $y = o$, az érintőé $yy' + xx' = r^2$, a kettő metszési-pontjának abscisszája tehát $x = \frac{r^2}{x'}$ A subtangens hossza pedig ennek és az x' abscisszának a különbsége s így:

$$St = \frac{r^2}{x'} - x' = \frac{r^2 - x'^2}{x'} = \frac{y'^2}{x'}.$$

Az *érintő* oly derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója y', a másik a subtangens s így:

$$T = \sqrt{y'^2 + \left(\frac{y'^2}{x'}\right)^2} = \frac{y'}{x'} \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{ry'}{x'}.$$

A *subnormális* hossza x', a *normálisé* r.

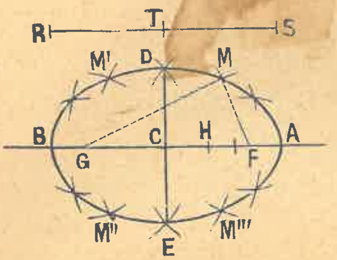
B) Az ellipszis (kerülék).

64. §. Az ellipszis értelmezése és szerkesztése.

Az *ellipszis* azon pontok mértani helye, melyeknek két meghatározott ponttól való távolságaik összege állandó és egy meghatározott vonalhosszusággal egyenlő.

A két adott pontot *gyujtópont*nak, vagy gócnak (focus) nevezzük. Minden egyenes vonal, mely az ellipszis valamely pontját a gócok egyikével összeköti, *vezérsugár* (radius vector). Az ellipszis *egyes pontjait* ekképen határozzuk meg:

120. ábra.



Legyen F és G (120. ábra) a két gyujtópont, RS az állandó vonalhosszuság. Húzzunk F- és G-n keresztül határozatlan hosszuságú egyenes vonalat, és felezzük RS és FG egyeneseket. Legyen $RT = TS = a$, és $FC = CG = c$. Az adott egyenes felét (a-t) C ponttól FG-re mind a két irányban kimérjük, ez által A és B pontokat találjuk, melyek már az ellipszis pontjai, mert $AF + AG = AF + AF + FG$, ámde a szerkesztésnél fogva $AF = BG$, következőleg:

$$AF + AG = AF + FG + BG = AB = RS = 2a.$$

Hasonló áll B pontról. A és B pontokat az ellipszis *csúcspont*jainak, AB egyenest az ellipszis *nagy tengelyé*nek mondjuk.

Vonjunk továbbá a két gyújtópontból, mint középpontokból, $RT = a$ sugárral két-két körívet, ezeknek metszőpontjai D és E ismét az ellipszis pontjai, mert:

$$DF + DG = EF + EG = a + a = 2a.$$

Ezenkívül DE egyenes C ponton halad keresztül és merőleges AB-hez. Ezen DE-t az ellipszis *kis tengelyé*nek mondjuk és $2b$-vel jelöljük. A nagy és kis tengely közös felező pontját (C) az ellipszis *középpont*jának, CF, vagy $CG = c$ távolságot pedig *középpontkivüliség*nek (excentricitás) nevezzük.

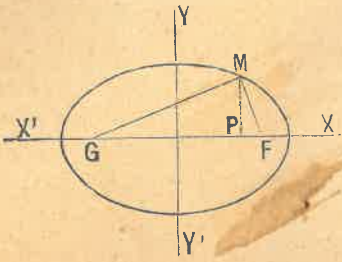
Az ellipszis többi pontjainak nyerésére tüzzünk ki FG egyenesen valamely H pontot, fogjuk AH-t a körző szárai közé és szerkesszünk mind a két gyujtópontból ismét két-két körívet; ezután BH távolságot a körző végei közé fogva a gyujtópontokból ismét két-két körívet rajzolunk, melyek az előbbieket M, M', M'', M''' pontokban metszik. E négy pont az ellipszis pontja; mert pl. M pontra nézve $MF + MG = AH + BH = AB = 2a$; s ugyanez áll a többi metsző pontról is.

Most H pont helyett FG-nek egy másik pontját választjuk, és az előbbi eljárást ismételjük. Ekkép az ellipszisnek akárhány pontját meghatározhatjuk; ha ezen pontokat folytonos görbe vonallal összekötjük, a kivánt ellipszist kapjuk.

65. §. Az ellipszis középponti egyenlete.

Minthogy a föntebbiek szerint az ellipszis szabályszerü görbe vonal, ennélfogva minden pontjának összetartozó koordinátái közt állandó viszonynak kell léteznie, melyet egyenlet alakjában kifejezhetünk. Ezen egyenlet nyerésére, az ellipszist derékszögü tengelyrendszerre vonatkoztatjuk; X-tengelyül az ellipszis nagy tengelyét, Y-tengelyül ugyanannak kis tengelyét választjuk (121. ábra). A nagy tengely hosszát ismét $2a$-val, a kis tengelyét $2b$-vel, a középpontkivüliséget c-vel jelöljük. Az ellipszis M pontjának koordinátái $CP=x$ és $MP=y$.

121. ábra.



Minthogy az ellipszis minden pontjára nézve a vezérsugarak összege $=2a$, tehát:

$$MF+MG=2a.$$

Azonban $MF=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{FP}^2}$ és $MG=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{GP}^2}$,

vagy: $MF=\sqrt{y^2+(x-c)^2}$ és $MG=\sqrt{y^2+(x+c)^2}$,

következésképp:

$$\sqrt{y^2+(x-c)^2}+\sqrt{y^2+(x+c)^2}=2a.$$

A gyökjeleket kiküszöbölve és az egyenletet rendezve:

$$\sqrt{y^2+(x-c)^2}=2a-\sqrt{y^2+(x+c)^2},$$

$$y^2+x^2-2cx+c^2=4a^2+y^2+x^2+2cx+c^2-4a\sqrt{y^2+(x+c)^2},$$

$$a\sqrt{y^2+(x+c)^2}=a^2+cx,$$

$$a^2y^2+a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2y^2+a^2x^2-c^2x^2=a^4-a^2c^2,$$

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2);$$

ámde a megelözö cikk szerint: $a^2-c^2=b^2$, tehát:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

vagy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ezen egyenlet nemcsak M pontra, hanem az ellipszis bármely pontjára nézve áll, ez tehát az ellipszis kivánt egyenlete, melyben x és y az ellipszis tetszés szerinti pontjának koordinátái.

66. §. Az ellipszis középponti egyenletének taglalása.

Az ellipszis középponti egyenlete y-ra és x-re vonatkozólag megfejtve így hangzik:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

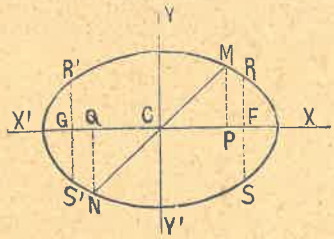
Ezekből azt következtethetjük, hogy:

1. Mindegyik koordinátatengely az ellipszist két egybevágó félre osztja.

2. Az X-tengely az ellipszist (a kezdőponttól számítva) $+a$ és $-a$, az Y-tengelyt $+b$ és $-b$ távolságban metszi.

3. Továbbá látnivaló, hogy az abscissza növekedtével a megfelelő y értéke fogy, viszont y növekedtével a megfelelő x-nek értéke csökken. Nevezetesen: x értéke akkor legnagyobb, mikor $y = o$, ez esetben $x = \pm a$ Hasonlóképen y értéke akkor legnagyobb, mikor $x = o$; ekkor t. i. $y = \pm b$. Míg $x > a$-nál, a megfelelő y képzetes; szintúgy, ha $y > b$-nél, a megfelelő x képzetes. Ennélfogva a tengelyek metszőpontjain keresztül a tengelyekre vont merőlegesek az ellipszist mindenünnen bekerítik, azaz az ellipszis *zárt* görbe vonal.

122. ábra.



4. A középpont felezi a rajta átmenő húrokat. Mert a kezdőponton keresztülmenő MN egyenes (122. ábra) egyenlete ily alakú: $y = kx$; ha ez egyenletet az ellipszisével egybevetjük, és az egyenes és az ellipszis metszőpontjainak koordinátáit keressük, azok értékei:

$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}} \text{ és } y = \frac{\pm abk}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}},$$

itt a felső jelek M pontnak, az alsók N pontnak felelnek meg. Látni ezekből, hogy a metszőpont x és y koordinátái számértékre nézve egyenlők. előjelre nézve ellenkezők; ennélfogva $MCP\triangle \cong NCQ\triangle$ (miért?), következéskép $MC = NC$. Innen van, hogy C pontot az ellipszis *középpont*-jának és a rajta keresztül menő húrokat az ellipszis *átmérői*-nek nevezzük.

5. Az ellipszis bármely pontjának (x, y) a kezdőponttól való távolsága: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$; ámde az ellipszis egyenlete szerint:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2); \text{ tehát:}$$

$$d = \pm \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}, \text{ vagy } d = \pm \sqrt{b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) x^2},$$

ebből kitünik, hogy minél nagyobb az ellipszis valamely pontjának abscisszája (x), annál nagyobb a megfelelő d, azaz annál távolabb esik a pont a középponttól. Mégpedig, ha $x = a$, d értéke a lehető legnagyobb: $d = \pm a$. Tehát: az ellipszis valamennyi pontja között a nagy tengely végpontjai legtávolabb esnek a középponttól, a kis tengely végei ellenben legközelebb vannak ahhoz. Eszerint az ellipszis összes átmérői között a nagy tengely a leghosszabb, a kis tengely pedig a legrövidebb húr (miért?).

6. Az ellipszis gyujtópontjainak fekvését a következő egyenlet határozza meg: $a^2 - c^2 = b^2$, és innen $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$. Eszerint mindegyik gyujtópont a nagy tengelyt két különböző részre osztja: a nagyobbik szelet hossza $= a + \sqrt{a^2 - b^2}$, a kisebbiké $= a - \sqrt{a^2 - b^2}$; tehát szorozatuk: $+ b^2$.

Minél kisebb az ellipszis középpontkivülisége c, annál kevésbbé különbözik a kis tengely a nagytól; ha $c = o$, akkor $a = b$, és az ellipszis egyenlete köregyenletté változik át. A kör tehát oly ellipszisnek tekinthető, a melynek két tengelye egyenlő.

A csillagászok nem c távolságot, hanem $c : a$ számarányt nevezik középpontkivüliségnek, és e hányadost ε-val jelölik:

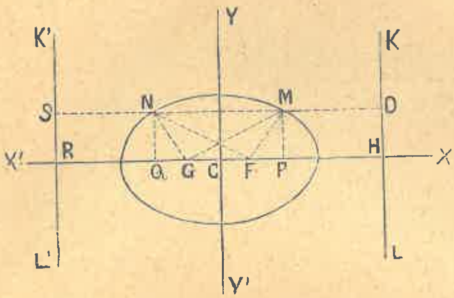
$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

7. Ha az ellipszis középponti egyenletében $x = \pm c$ és tekintetbe vesszük, hogy $c^2 = a^2 - b^2$, akkor a megfelelő y, vagyis FR számára a következő értéket kapjuk: $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Eszerint az X-tengelyre merőleges irányú góc-húrnak, azaz RS-nek hossza: $2y = \frac{2b^2}{a}$

Ezen *góc-húrt* a görögök *paraméter*-nek nevezték. Mi azt $2p$-vel jelöljük. Eszerint $p = \frac{b^2}{a}$; ebből következik, hogy $a : b = b : p$, azaz *az ellipszis kis tengelye középarányos a nagy tengely és a paraméter között.*

8. Az ellipszis gyujtópontjainak két nevezetes vonal felel meg. Ugyanis, ha az ellipszis valamelyik pontját, pl. M-et, F és G gyujtópontokkal összekapcsoljuk (123. ábra), és a két vezérsugár hosszát

123. ábra.



M pont koordinátái által kifejezzük, lesz:

$$MF = \sqrt{y^2 + (x-c)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + (x-c)^2},$$

$$MF = \sqrt{a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}}.$$

$$MG = \sqrt{y^2 + (x+c)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + (x+c)^2},$$

$$MG = \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2\,x^2}{a^2}},$$

vagy: $MF = a - \frac{cx}{a}$, és $MG = a + \frac{cx}{a}$

Ezeket így is írhatjuk:

$$MF = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right) \text{ és } MG = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} + x\right).$$

Most, ha $\frac{a^2}{c}$ távolságot, mely okvetlenül $> a$-nál, az ellipszis középpontjától a nagy tengely mind a két oldalára kimérjük, azaz $CH = CR = \frac{a^2}{c}$, továbbá H és R pontokon keresztül a nagy tengelyre KL és $K'L'$ merőlegeseket és ezekre ismét M pontból MO és MS merőlegeseket vonjuk, végre, ha M pont koordinátáit MP és CP-vel jelöljük: akkor:

$$MO = PH = CH - CP = \frac{a^2}{c} - x, \text{ és}$$

$$MS = PR = CR + CP = \frac{a^2}{c} + x:$$

tehát a föntebbiek tekintetbe vételével:

$$\frac{MF}{MO} = \frac{c}{a} = \varepsilon, \text{ és } \frac{MG}{MS} = \frac{c}{a} = \varepsilon.$$

HKL és $RK'L'$ merőlegeseket az ellipszis *irányvonal*ainak (direktrix) nevezik. Ezek a föntebbiek szerint azon nevezetes tulajdonsággal bírnak, hogy *az ellipszis bármely pontjának az egyik góctól való távolsága úgy aránylik a megfelelő irányvonal távolságához, mint a középpont-kívüliség a fél nagy tengelyhez.* Minthogy az utóbbi arány, azaz

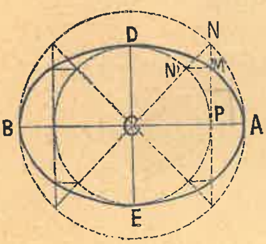
$c : a = \varepsilon$, az ellipszisre nézve mindig < 1-nél; ezért az említett távolságok aránya is a nevezett görbe vonalra nézve állandó értékü *valódi* tört szám.

E tulajdonság az ellipszist tökéletesen jellemzi. Azaz, ha a görbe vonal minden pontjának az a tulajdonsága van, hogy valamely adott ponttól és egyenestől való távolságaik számaránya *állandó* és kisebb 1-nél, e görbe vonal nem lehet egyéb mint ellipszis.

67. §. Az ellipszis szerkesztése két tengelye alapján.

1. Legyen $AB = 2a$ az ellipszis nagy, $DE = 2b$ a kis tengelye (124. ábra); az ezekre vonatkoztatott középponti egyenlet: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Ha a nagy tengely körül kört alakítunk, ennek egyenlete ugyanazon rendszerre vonatkozólag: $y^2 + x^2 = a^2$.

124. ábra.



Tüzzük ki már most tetszés szerint $CP = x$ abscisszát és jelöljük a megfelelő ordinátát az ellipszisre nézve y-nal, a körre vonatkozólag pedig Y-nal; ekkor az idézett egyenleteknél fogva:

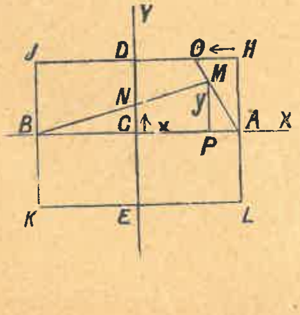
$$y : Y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} : \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ vagy:}$$

$$y : Y = b : a.$$

azaz, ha az ellipszis nagy tengelyén, mint átmérőn kört szerkesztünk, az ellipszis és kör *ugyanazon abscisszához tartozó két ordinátája úgy aránylik egymáshoz, mint a kis tengely a nagyhoz.*

A megelőző tétel alapján az ellipszist így szerkesztjük meg. Az ellipszis középpontjából a és b sugárral két kört rajzolunk, és a nagyobb kör egyik pontját pl. N-et összekapcsoljuk a középponttal, továbbá NP ordinátát húzva a kisebb kör megfelelő N' pontján keresztül a nagy tengellyel párhuzamos $N'M$-et vonjuk, mely NP ordinátát M pontban metszi. Az ilyképen meghatározott M pont az ellipszis egyik pontja; mert a szerkesztésnél fogva $MP : NP = N'C : NC$, vagyis $MP : NP = b : a$.

125. ábra.



2. Legyen ismét $AB = 2a$ és $DE = 2b$ (125. ábra) az ellipszis két tengelye, C a középpontja és $HJKL$ a körülírt derékszögü négyszög. Osszuk el CD-t és DH-t külön-külön n egyenlő részre; ezután kapcsoljuk össze CD-nek r-edik osztópontját (C-től D felé számítva) B végponttal és szintúgy HD-nek r-edik osztópontját (H-tól D felé szá-

mítva) A végponttal. BN és AO egyenesek metszőpontja M az ellipszis egyik pontja.

Ugyanis vonatkoztassuk M pontot ACD derékszögü tengelyrendszerre és legyen $MP = y$ és $CP = x$. Minthogy $BMP \triangle \backsim BNC \triangle$, tehát:

$$MP : NC = BP : BC, \text{ vagyis:}$$

$$y : r \cdot \frac{b}{n} = (a + x) : a. \qquad (1)$$

Hasonlókép $AMP \triangle \backsim OAH \triangle$, következőleg:

$$MP : AH = AP : OH, \text{ vagy:}$$

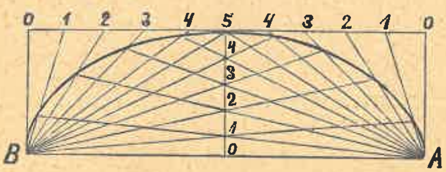
$$y : b = (a - x) : r \cdot \frac{a}{n} \qquad (2)$$

Az (1) aránypárt megszorozva a (2)-kal, kellö rövidítés után lesz:

$$y^2 : b^2 = (a^2 - x^2) : a^2, \text{ és ebből:}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \text{ vagyis az ellipszis középponti egyenlete.}$$

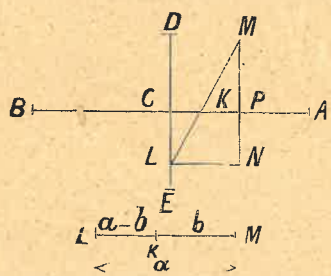
126. ábra.



Az előadottakból az ellipszis egy igen egyszerü szerkesztési módja következik, melyet a mellékelt 126. ábrából magyarázat nélkül is megérthetünk.

3. Legyen ismét $AB = 2a$ és $DE = 2b$ (127. ábra) az ellipszis két tengelye; legyen továbbá $LM = a$-val és vigyük át M-től kezdve L felé $MK = b$-t. Ekkor természetesen $KL = a - b$. Ha LM egyenest ACE derékszög száraira fektetjük akkép, hogy L végpont CE szárra, K pedig CA szárra esik, M végpont az ellipszis egyik pontja.

127. ábra.



Ugyanis vonatkoztassuk M pontot ACD derékszögü tengelyrendszerre, azaz legyen $MP = y$ és $CP = x$ továbbá hosszabbítsuk meg MP ordinátát és legyen $LN \parallel CA$-val. MPK és MNL háromszögek hasonlósága következtében;

$$MP : MN = MK : ML;$$

minthogy továbbá $MNL\triangle$-ben:

$$MN=\sqrt{LM^2-LN^2}=\sqrt{a^2-x^2}$$

tehát:

$$y:\sqrt{a^2-x^2}=b:a \text{ és ebből } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

és ez az ellipszis középponti egyenlete.

Eszerint az ellipszis tengelyei alapján *segédvonalak nélkül* is megszerkeszthetjük. E célból t. i. $LM=a$ hosszuságú papirszeletre, egyik (M) végpontjából rámérjük b hosszát (azaz meghatározzuk K pontot), ezután a papirszelet L pontját ACE derékszög CE szárához illesztjük úgy, hogy a közbeeső K pont a szög másik szárára, CA-ra esik, végül M végpont helyzetét megjelöljük. Most, ha a papirszelet LK részét az ellipszis tengelyei közt odább csúsztatjuk, annak akárhány pontját meghatározhatjuk. Ezen módszert különösen gyakorlati szerkesztéseknél szokták alkalmazni.

68. §. Az ellipszis csúcsponti egyenlete.

Az ellipszist gyakran oly derékszögü rendszerre vonatkoztatjuk, melynek kezdőpontja az ellipszis egyik csúcspontja, X-tengelye a görbe nagy tengelye. Ezen új rendszerben az ordináták ugyanakkorák, mint a középponti rendszerben, azonban az abscisszák mindegyike a-val nagyobb az előbbieknél.

Eszerint, ha az ellipszis középponti egyenletében x helyébe $(x-a)$-t teszünk, az ellipszis csúcsponti egyenlete származik:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2).$$

Minthogy $\frac{b^2}{a}=p$, a csúcsponti egyenletet így is irhatjuk:

$$y^2=2px-\frac{px^2}{a}.$$

69. §. Az ellipszis sarkegyenlete.

Sarkpontul rendesen az ellipszis egyik gyujtópontját (pl. G-t), sarktengelyül a nagy tengelyt szokás választani. A keresett sarkegyenletet az ismeretes átalakító képletek segítségével az ellipszis középponti egyenletéből származtathatjuk; hamarabb érünk azonban célt, ha az ellipszis *fő* tulajdonságából indulva ki, közvetlenül keressük meg a sarkkoordináták kapcsolatát. A gyújtópontok egymástól való távolságát ismét $2c$-vel, a nagy tengelyt $2a$-val jelöljük.

M pont sarkkoordinátái: $GM = \rho$ és $MGX \sphericalangle = \omega$. (121. ábra)
$GMF \triangle$-ben a cosinus-tétel szerint:

$$\overline{MF}^2 = \overline{MG}^2 + \overline{FG}^2 - 2\overline{MG}.\ \overline{FG}\ cos\ MGX,$$

vagy: $\overline{MF}^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho.\ cos\ \omega.$

Minthogy $MF + MG = 2a$, tehát másrészt:

$$\overline{FM}^2 = (2a - MG)^2 = (2a - \rho)^2,$$

következőleg:

$$\rho^2 + 4c^2 - 4c\rho.\ cos\ \omega = 4a^2 - 4a\rho + \rho^2,$$

ebből az ellipszis sarkegyenlete:

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c.\ cos\ \omega}. \tag{1}$$

Tekintetbe véve, hogy:

$$\frac{c}{a} = \varepsilon, \text{ tehát } c = a\varepsilon, \text{ lesz:}$$

$$\rho = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon\ cos\ \omega}; \tag{2}$$

vagy, mert $c^2 = a^2\varepsilon^2 = a^2 - b^2$, ennek következtében $a^2(1 - \varepsilon^2)$
$= b^2$, és $a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a} = p$;

a (2) számú egyenlet így is írható:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon.\ cos\ \omega}. \tag{3}$$

Ebből, ha ω szöget 0^0-tól 360^0-ig növesztjük, az ellipszis összes pontjainak vezérsugarait meghatározhatjuk.

Nevezetesen ha $\omega = o, \rho = \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{a^2 - c^2}{a - c} = a + c$;

továbbá, ha $\omega = 90^0$, $\rho = p$; ha $\omega = 180^0$, $\rho = a - c$; stb.

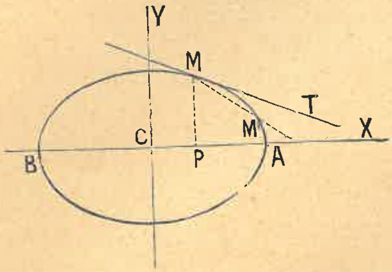
A föntebbi sarkegyenlet az ellipszis azon gyújtópontjára vonatkozik, mely az X-tengely negativ részébe esik. Ha a másik gyújtópontot tekintjük sarkpontul, az ellipszis sarkegyenlete ez:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon.\ cos\ \omega}. \tag{4}$$

70. §. Az ellipszis érintője és deréklője.

1. Az ellipszis érintőjének egyenletét hasonlóképen találjuk meg, mint a kör érintőjéét. Legyen $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ az adott ellipszis középponti egyenlete, x' y' az érintési pontnak (M-nek) (128. ábra) két koordinátája.

128. ábra.



Húzzunk az adott M ponton és az ellipszis valamelyik másik pontján pl. M'-en keresztül szelőt, az utóbbi pont koordinátáit x'', y''-vel jelölve.

A szelő egyenlete ily alakú:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'). \qquad (1)$$

Minthogy az adott M és a fölvett M' pont az ellipszis pontjai, ennélfogva mindegyiknek a koordinátái az ellipszis egyenletének megfelelnek, azaz:

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \qquad (2)$$

$$a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2 \qquad (3)$$

Kivonva a (3) egyenletet a (2)-ból:

$$a^2(y'^2 - y''^2) + b^2(x'^2 - x''^2) = 0,$$

és ebből:

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{b^2(x' + x'')}{a^2(y' + y'')}.$$

Helyettesítvén ezen értéket az (1) egyenletbe, az ellipszis szelőjének egyenletét kapjuk; ugyanis:

$$y - y' = -\frac{b^2(x' + x'')}{a^2(y' + y'')}(x - x').$$

Most MM' szelőt M pont körül addig forgatjuk, míg M' pont M-mel összeesik és a szelő érintővé válik. Legyen tehát $x'' = x'$ és $y'' = y'$, lesz:

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x'), \qquad (\alpha)$$

és ez az ellipszis érintőjének egyenlete. Ezt más alakban is írhatjuk; ha t. i. a törteket eltüntetjük és tekintetbe vesszük, hogy: $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, ($\alpha$) egyenlet ily alakot nyer:

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2. \qquad (\beta)$$

Minthogy az x' y' pontból az ellipszishez vont érintőnek iránya $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ együtthatónak értékétől függ, ebben pedig x' és y' helyett minden változás nélkül $-x'$ és $-y'$ tehető; ebből a 66. §. 4. pontjánál fogva azt következtetjük, hogy az ellipszis átmérőjének végpontjaihoz vont érintők párhuzamosak. Továbbá látnivaló, hogy az ellipszis nagy tengelye végpontjaihoz vont érintők a kis tengellyel, a kis tengelyek végpontjain keresztül húzott érintők meg a nagy tengellyel párhuzamosak.

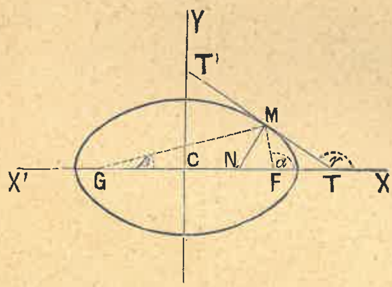
II. A mi a deréklőt illeti, ez is az érintési ponton megy keresztül és ezenkivül az érintővel derékszöget fog be; tehát:

$k = \frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}$, és az ellipszis deréklőjének egyenlete:

$$y - y' = \frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}(x - x').$$

III. Az ellipszis érintőjének azon nevezetes sajátsága van, hogy *az érintési pont két vezérsugarával egyenlő szögeket alkot.*

129. ábra.



Ennek kimutatása végett legyen MT (129. ábra) az ellipszis érintője, MF és MG az érintő pontnak két vezérsugara. Ez utóbbi pont koordinátáit ismét x', y'-tel jelöljük. Rövidség kedveért legyen továbbá $MFX\sphericalangle = \alpha$, $MGX\sphericalangle = \beta$, $MTX\sphericalangle = \gamma$, $FMT\sphericalangle = \varphi$ és $GMT\sphericalangle = \psi$.

$\varphi = \gamma - \alpha$, és $\psi = \gamma - \beta$, tehát:

$$tg\,\varphi = tg\,(\gamma - \alpha) = \frac{tg\,\gamma - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha\,.\,tg\,\gamma}, \qquad (1)$$

$$tg\,\psi = tg\,(\gamma - \beta) = \frac{tg\,\gamma - tg\,\beta}{1 + tg\,\beta\,.\,tg\,\gamma}. \qquad (2)$$

ahol $tg\,\alpha$, $tg\,\beta$, $tg\,\gamma$-t az illető egyenesek egyenleteiből határozhatjuk meg. Ugyanis az F (c, o) és M (x', y') pontokon keresztülmenő MF egyenes egyenlete:

$$y = \frac{y'}{x' - c}(x - c);$$

a G $(-c, o)$ és M (x', y') pontokon átvonuló MG egyenes egyenlete:

$$y = \frac{y'}{x' - c}(x + c);$$

az M ponton húzott MT érintő egyenlete az I. p. szerint:

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x').$$

Ennélfogva:

$$tg\,\alpha = \frac{y'}{x' - c},\ tg\,\beta = \frac{y'}{x' + c},\ tg\,\gamma = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$$

Helyettesítve ezen értékeket az (1) és (2) egyenletbe, lesz:

$$tg\,\varphi = \frac{-\frac{b^2x'}{a^2y'} - \frac{y'}{x'-c}}{1 - \frac{b^2x'y'}{a^2y'(x'-c)}} = \frac{-b^2x'^2 - a^2y'^2 + b^2cx'}{a^2x'y' - b^2x'y' - a^2cy'}$$

$$tg\,\psi = \frac{-\frac{b^2x'}{a^2y'} - \frac{y'}{x'+c}}{1 - \frac{b^2x'y'}{a^2y'(x'+c)}} = \frac{-b^2x'^2 - a^2y'^2 - b^2cx'}{a^2x'y' - b^2x'y' + a^2cy'}.$$

Tekintetbe véve, hogy:

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \text{ és } a^2 - b^2 = c^2,$$

a föntebbi egyenletek így alakulnak:

$$tg\,\varphi = \frac{b^2}{cy'}, \text{ és } tg\,\psi = -\frac{b^2}{cy'},$$

ezekből látnivaló, hogy $\varphi + \psi = 180^\circ$, azaz:

$$FMT\sphericalangle + GMT\sphericalangle = 180^\circ;$$

de másrészt: $GMT\sphericalangle + GMT'\sphericalangle = 180^\circ$, tehát:

$FMT\sphericalangle = GMT'\sphericalangle$, amit bebizonyítani kellett.

MN deréklöt húzván, azonnal szembetünik, hogy:

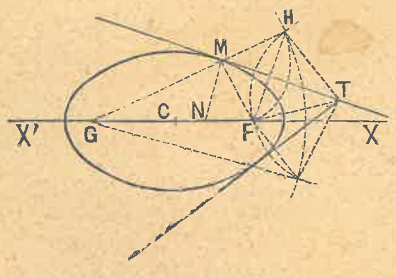
$FMN\sphericalangle = GMN\sphericalangle$; mert pótlószögeik egyenlők.

Eszerint a deréklö a két vezérsugár alkotta szöget felezi.

Innen kapták az ellipszis *gyujtó*pontjai a nevüket; ellipszis idomúlag görbült vájt tükörnél t. i. az egyik gyujtópontból kiinduló fény-, hö- és hangsugarak az ellipszis imént kimutatott tulajdonságánál fogva úgy verödnek vissza, hogy a tükör másik gyujtópontján ismét összegyülnek.

Ezen alapszik az ellipszis érintö vonalának szerkesztése is.

130. ábra.

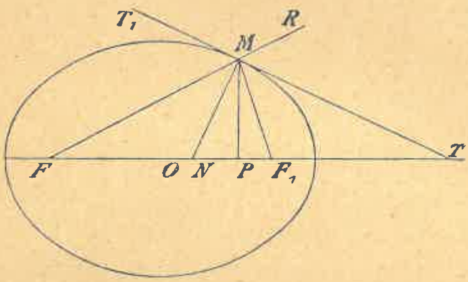


1. Legyen (130. ábra) M az adott érintési pont. Húzzuk MF és MG vezérsugarakat és hosszabbítsuk meg az egyiket pl. MG-t annyira, hogy $MH =$ a másik vezérsugárral MF-fel. Ezután vonjuk FH egyenest és húzzuk erre MT merölegest. Az utóbbi a kivánt érintö, mert a mondott szerkesztés következtében $FMT\sphericalangle = GMT'\sphericalangle$(miért?)

H pontot, mely MT érintöre nézve F gyújtóponttal szemben fekszik és ennek MT síktükörképét ábrázolja, F *ellen*pontjának is nevezzük. Ez az ellenpont némely érintö vonalas szerkesztéseknél fontos szerepet játszik.

2. Az adott T pont az ellipszisen *kivül* esik. Gondoljuk a föladatot megfejtettnek és legyen MT a keresett érintő. Ha G gyújtópontból $GMH=2a$ egyenest, továbbá FH-t vonjuk, az érintő ezen utóbbi egyenes közepén merőlegesen áll, következőleg TF és TH távolságok egyenlők. Eszerint F ellenpontját két körvonal átmetszése által határozhatjuk meg; az egyiket G középpontból $2a$ sugárral, a másikat az adott T pontból TF sugárral szerkesztjük. Ezután FH egyenest vonjuk, és erre T pontból TT' merőlegest bocsátjuk; ez utóbbi a keresett érintő; M pont pedig, ahol TT' a GH egyenest átmetszi, az érintés pontja.

131. ábra.



Hogy az *érintési vonalak* hosszát meghatározhassuk, a 131. ábrából látjuk, hogy a *subtangens* PT. Ennek hosszúságát úgy nyerjük, hogy az érintő egyenletébe $y=o$ értéket helyettesítjük; akkor: $x=\frac{a^2}{x_1}$ és $PT=OT-OP=$ $=\frac{a^2}{x_1}-x_1$, vagy, mert itt a subtangens negativ, $PT=\frac{x_1^2-a^2}{x_1}$. Az *érintő* TM meghatározására:

$$\overline{TM}^2=y_1^2+\overline{PT}^2=y_1^2+\frac{(x_1^2-a)^2}{x_1^2}=\frac{y_1}{b^2x_1}\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}.$$

A *subnormális* és a *normális* számára nem lesz nehéz ezek után meghatározni, hogy:

$$PN=\frac{b^2x_1}{a^2} \text{ és } NM=\sqrt{\frac{b^4x_1^2+a^4y_1^2}{a^2}}.$$

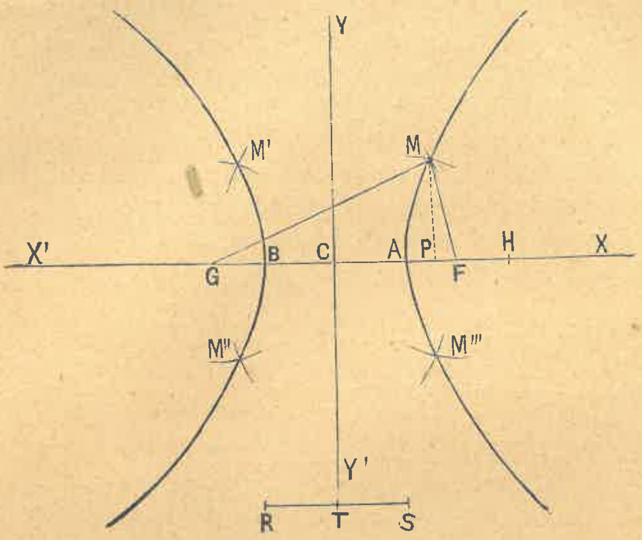
C) Hiperbola (mentelék).

71. §. A hiperbola értelmezése, szerkesztése.

A *hiperbola* azon pontoknak mértani helye, melyeknek két adott ponttól való távolságaik különbsége egy adott vonalhosszusággal egyenlő.

A két állandó pontot itt is *gyújtópontok*nak hívjuk és minden egyenest, mely a hiperbola valamely pontját a gyújtópontok egyikével összekapcsolja, *vezérsugár*nak (radius vector) nevezünk.

132. ábra.



Legyen F és G (132. ábra) a két gyújtópont és $RS = 2a$ az adott egyenes vonal. Vonjunk F és G-n keresztül határozatlan hosszuságú (XX') egyenest; továbbá felezzük RS és FG távolságot, azaz legyen $RT = TS = a$, és $FC = CG = c$; ezután a távolságot C ponttól XX'-nek mind a két ágára kimérjük. Az ekkép talált A és B pontok a hiperbola pontjai; mert a mondottaknál fogva: $AF = BG$, tehát A pontra vonatkozólag: $AG - AF = AB + BG - AF = AB = 2a$; hasonlóképen B pontra nézve $BF - BG = AB + AF - BG = AB = 2a$. A és B pontot a hiperbola *csúcspont*jainak, AB-t a hiperbola *főtengelyé*nek, C-t *középpont*nak, $CF = CG = c$ távolságot pedig *középpontkívüliségnek* nevezzük.

A hiperbola többi pontját így találjuk: AX-en tetszés szerint kitüzzük H pontot, ezután AH-t a körző végei közé fogván, mindegyik gyújtópontból két-két körívet rajzolunk; ez meglévén, BH-t is a körző nyílásába foglaljuk, és ismét a gyújtópontokból két pár körívet húzunk, melyek az előbbieket M, M', M'', M''' pontokban metszik. Ez a négy metszőpont a hiperbolának mindmegannyi pontja; mert pl. M pontra vonatkozólag: $MG - MF = BH - AH = 2a$ és ugyanez áll a többi pontról is. H pont helyett AX-nek egy másik pontjára alkalmazván az előadott szerkesztést, a hiperbolának másik négy pontját leljük.

Ily módon a görbe vonal akárhány pontját meghatározhatjuk; és ha ezeket folytonos görbe vonallal összekötjük, a keresett hiperbolát kapjuk. A hiperbola csak úgy szerkeszthető, ha $c > a$-nál.

72. §. A hiperbola középponti egyenlete.

A hiperbolát oly derékszögü rendszerre vonatkoztatjuk, melynek kezdőpontja a hiperbola középpontjába, X-tengelye pedig a főtengely irányába esik. Az utóbbi hosszát ismét $2a$-val, a középpontkívüliséget c-vel jelöljük. M pontra nézve: $CP = x$, és $MP = y$. (132. ábra). Minthogy M a hiperbola pontja, tehát:

$$GM - FM = 2a.$$

Azonban: $GM = \sqrt{MP^2 + GP^2}$ és $FM = \sqrt{MP^2 + FP^2}$,

vagy: $GM = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$ és $FM = \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$,

tehát: $\sqrt{y^2 + (x+c)^2} - \sqrt{y^2 + (x-c)^2} = 2a$;

ebből a gyökjelek kiküszöbölése után lesz:

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Rövidség kedvéért legyen $c^2 - a^2 = b^2$; ekkor a hiperbola egyenlete ily alakot ölt:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2,$$

vagy:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ezen egyenlet igen hasonlít az ellipsziséhez, melytől csak annyiban különbözik, hogy ebben b^2 helyett $- b^2$ áll. Az ellipszisnél t. i. $a^2 - c^2 = b^2$; ellenben a hiperbolánál, hol $a < c$-nél, $c^2 - a^2 = b^2$. E rokonságnál fogva b-t a hiperbolánál is az Y-tengely két ágára kimérjük és $2b$, vagyis DE egyenest (133. ábra) *mellék-tengely*nek nevezzük.

73. §. A hiperbola középponti egyenletének taglalása.

A hiperbola imént talált egyenlete, y és x-re vonatkozólag megfejtve, így hangzik:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{és} \quad x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

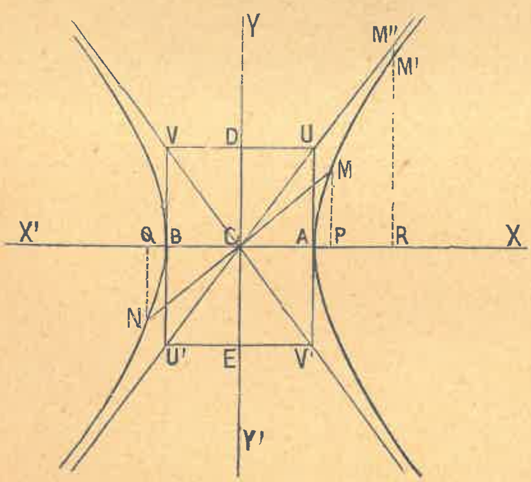
Ezekből kiviláglik: 1. hogy a hiperbola úgy az X, mint az Y-tengely két oldalán egyenlöen terül el, vagy más szóval: a hiperbola egyik tengelye a másikkal párhuzamos húrrendszert felezi.

2. Ha $y = o$, akkor $x = \pm a$, vagyis az X-tengely a hiperbolát $+a$ és $-a$ távolságban metszi át; ha $x = o$, úgy $y = \pm b\sqrt{-1}$, vagyis az Y-tengely nem szeli át a hiperbolát; ennélfogva az Y-tengelyre kimért $2b$ csak *képzelt* tengelye a hiperbolának.

3. Látni továbbá, hogy x növekedtével y értéke is nagyobbodik, viszont ha y növekedik, a megfelelő x is folyton nagyobbodik. Minthogy pedig úgy x, mint y értéke bármekkorára nőhet (miért?), a hiperbola zárt vonal nem lehet. Míg $x < a$-nál, a megfelelő y képzetes mennyiség; ennélfogva, ha a hiperbola csúcspontjain a fő-tengelyre merőlegeseket húzunk, ezek a hiperbolát kirekesztik, azaz a görbe vonal összes pontjai ezen merőleges vonalakon kívül esnek. A mondottakból kitünik, hogy a hiperbola két egyenlő, de különvált ágból áll, és hogy ez ágak vég nélkül elnyúlnak.

4. Valamint az ellipszisnél, úgy itt is a középponton átmenő húrokat e pont felezi. Igy pl. MCN (133. ábra) húrra nézve $MC = CN$.

133. ábra.



Hogy erről meggyőződjünk, a hiperbola MN húrja metszőpontjainak koordinátáit keressük.

A kezdőponton átmenő egyenes egyenlete ily alakú: $y = kx$. Egybevetve ezt a hiperbola középponti egyenletével, a közös pontok koordinátáinak értékei:

$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}$$

$$\text{és } y = \frac{\pm abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}.$$

Miből — úgy, mint az ellipszisnél — azt következtetjük, hogy $MCP \triangle \cong NCQ \triangle$, tehát $MC = CN$. Innen van, hogy C pontot a hiperbola *középpont*jának, az utóbbin keresztül menő húrokat a hiperbola *átmérői*nek nevezzük.

5. Az utóbbi egyenletekből egyszersmind azt is látjuk, hogy a középponton átmenő egyenes a hiperbolával csak úgy találkoz-

hatik, ha $b^2 > a^2k^2$, vagyis $k < \frac{b}{a}$; mert ha $k > \frac{b}{a}$, a metszőpontok koordinátái képzetes értéküek, más szóval, az egyenes vonal nem metszi a hiperbolát.

Azon esetben, ha $b^2 = a^2k^2$, vagy $k = \pm \frac{b}{a}$, a metszőpontok koordinátái határtalanok; midőn tehát a középponton átvonuló egyenes az X-tengellyel akkora szöget fog be, melynek tangense $k = + \frac{b}{a}$, vagy $k = - \frac{b}{a}$, az egyenes a hiperbolát csak határtalan távolságban éri, azaz tulajdonkép nem is éri.

E két nevezetes vonal mértani szerkesztésére a hiperbola két csúcspontján a fő tengelyre AU és BV merőlegéseket állítjuk és mindegyikre átvisszük b hosszuságot; az ekkép talált U és V pontokat C középponttal összekapcsolván, a kivánt egyeneseket kapjuk. Mert CAU $\triangle$-ben: $tg\ ACU = + \frac{b}{a}$ és CBV $\triangle$-ben $tg\ ACV = - \frac{b}{a}$; tehát CU és CV egyenesek a hiperbolát csak határtalan távolságban érinthetik.

A szóban forgó egyenes vonalaknak még az a nevezetes tulajdonságuk van, hogy minél inkább meghosszabbítjuk azokat, annál jobban közelednek a hiperbolához, anélkül azonban, hogy ezt valaha elérnék.

Ugyanis a hiperbola középponti egyenlete:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \qquad (1)$$

CU, illetőleg CV egyenes egyenlete: $y = \pm \frac{b}{a} x$, vagy:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2. \qquad (2)$$

Ha most valamely abscisszához, pl. $CR = x'$-hez, mind a két egyenletből a megfelelő y-t keressük és ezt a hiperbolára vonatkozólag y'-, az egyenesre nézve y''-vel jelöljük:

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2), \text{ és } y''^2 = \frac{b^2}{a^2} x'^2.$$

Tehát:

$$y''^2 - y'^2 = b^2, \text{ vagy}$$

$$(y'' - y')(y'' + y') = b^2,$$

következőleg:

$$y'' - y' = \frac{b^2}{y'' + y'}.$$

Minthogy x' értékének növekedtével nemcsak y', hanem y'' értéke is mindinkább nagyobbodik: az utóbbi egyenletből azt következtetjük, hogy minél nagyobb x', annál kisebb a megfelelő két y között a különbség; mert a nevező nagyobbodtával a tört értéke csökken. Ha tehát x' értéke határtalanul növekedik, a két y közt a különbség 0-hoz közeledik, szóval elenyészik. Ennélfogva CU és CV egyenesek vég nélkül közeledrek a hiperbolához, ámbár ezt soha el nem érik, amiért azokat a hiperbola *közelítőinek* v. *végérintőinek (asszimptota)* nevezzük.

6. A hiperbola gyujtópontjainak fekvését következő egyenlet határozza meg:

$$CF = CG = \pm\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$\frac{c}{a}$, vagyis $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ hányadost, mely a hiperbolára nézve okvetlenül >1-nél, ε-nal szokták jelölni, és ez a szoros értelemben vett *középpontkivüliség* (excentricitas).

7. A gyujtóponton keresztül a főtengelyhez merőlegesen húzott húrt itt is *paraméter*nek nevezzük és $2p$-vel jelöljük. Minthogy a fél paraméter nem egyéb, mint a gyujtópont ordinátája, tehát p-t úgy találjuk meg, ha a hiperbola középponti egyenletében $x = \pm c$, vagyis $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ értéket tesszük. Ekkor:

$$y = p = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Ebből ismét következik, hogy $a : b = b : p$, vagyis a hiperbola melléktengelye középarányos a főtengely és paraméter közt.

8. Ha $a = b$, a hiperbolát *egyenlőoldalú*nak hívjuk; ennek egyenlete: $x^2 - y^2 = a^2$. Az egyenlőoldalú hiperbola a közönségeshez olyan viszonyban van, mint a kör az ellipszishez. Az egyenlőoldalú hiperbola két közelítője merőlegesen áll egymásra; ezért az egyenlőoldalú hiperbolát *derékszögű*nek is nevezik.

9. A hiperbola gyujtópontjainak is megvan a két *irányvonala* és ezeknek hasonló tulajdonságuk van, mint az ellipszishez tartozóknak. Azaz a hiperbola bármelyik pontjának az egyik góctól való távolsága úgy aránylik a megfelelő irányvonal távolságához, mint a középpontkívüliség (c) a fél főtengelyhez (a-hoz). Ezt épen úgy bizonyítjuk be, mint az ellipszisre nézve.

Minthogy a hiperbola középpontkívülisége mindig nagyobb a főtengely felénél, azaz $c : a = \varepsilon > 1$; ennélfogva az említett hosszuságok közti arány a hiperbolára nézve *áltört*. (Az ellipszisnél ellenkezőleg *valódi* törtszám).

E tulajdonság tökéletesen jellemzi a hiperbolát; azaz amely görbe vonal minden pontjának azon tulajdonsága van, hogy valamely meghatározott ponttól és egy adott egyenes vonaltól való távolságai 1-nél nagyobb, de állandó értékü arányban vannak, az ily görbe vonal okvetlenül hiperbola.

10. Ami végre a hiperbola szerkesztését illeti, minthogy ez gyakorlati szempontból kevésbbé fontos, mint az ellipszisé, elég itt arra utalnunk, hogy a 67. §. 2. pontjában előadott szerkesztési módszer némi eltéréssel a hiperbolára is alkalmazható.

Valamint az ellipszisnél CD és HD vonalakat (124. ábra), úgy a hiperbolánál (melyre nézve AB a főtengelyt képviseli) CD és LE vonalakat kell külön-külön n egyenlő részre osztanunk. Az osztópontokat itt is úgy, mint az ellipszisnél, B és A végpontokkal kapcsoljuk össze.

74. §. A hiperbola csúcsponti egyenlete.

Olykor a hiperbolát más derékszögü rendszerre is vonatkoztatjuk, melynek kezdőpontja a hiperbola egyik csúcspontjába, pl. A-ba, X-tengelye pedig a főtengely irányába esik. Az ordinaták itt is ugyanakkorák, mint a középponti rendszerben, az x-ek azonban a-val kisebbek az előbbieknél. Ha tehát a hiperbola középponti egyenletében x helyébe $x+a$-t irunk, e görbe csúcsponti egyenletét leljük, t. i.

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2).$$

Minthogy a megelőző §. 7. p. szerint $\frac{b^2}{a}=p$, a csúcsponti egyenlet így írható:

$$y^2=2px+\frac{px^2}{a}.$$

75. §. A hiperbola sarkegyenlete.

Sarkpontúl (132. ábra) a jobboldali gyujtópontot (F-et), sarktengelyül a főtengely pozitiv irányát választjuk. A gyujtópontok egymástól való távolságát ismét $2c$-vel, a főtengely hosszát $2a$-val jelöljük.

A hiperbola M pontjának koordinátái:

$$MF=\rho, \text{ és } MFX \text{ szög}=\omega.$$

FGM $\triangle$-ben:

$$\overline{GM}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{FG}^2 - 2\overline{FM}.\,\overline{FG}.\ \cos\ GFM,$$

vagy: $$\overline{GM}^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho\cos\omega. \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

Minthogy továbbá: $$GM - FM = 2a,$$

tehát egyszersmind $$\overline{GM}^2 = (2a + FM)^2 = (2a + \rho)^2 \quad \ldots \quad (\beta)$$

(α) és (β) egyenletek alapján:

$$\rho^2 + 4c^2 + 4c\rho\cos\omega = 4a^2 + 4a\rho + \rho^2,$$

és ebből: $$\rho = \frac{c^2 - a^2}{a - c\cos\omega} = \frac{c^2 - a^2}{a\left(1 - \frac{c}{a}\cos\omega\right)};$$

minthogy $c^2 - a^2 = b^2$, továbbá $\frac{b^2}{a} = p$, és $\frac{c}{a} = \varepsilon$, tehát:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\omega}.$$

Ezen sarkegyenlet csupán a *jobb* oldali hiperbola-ágra vonatkozik, mert (β) egyenlet is csak a nevezett ág pontjaira nézve érvényes. A másik ág sarkegyenlete ugyanazon rendszerre vonatkozólag ez:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\omega},$$

76. §. A hiperbola érintője és deréklője.

A hiperbola *érintő*jének egyenlete csak annyiban különbözik az ellipszis érintőjének egyenletétől, amennyiben ebben $+b^2$ helyett $-b^2$ áll. Ugyanis a hiperbola x', y' pontjához vont érintő egyenlete:

$$y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x'), \tag{1}$$

vagy: $$a^2 y' y - b^2 x' x = - a^2 b^2. \tag{2}$$

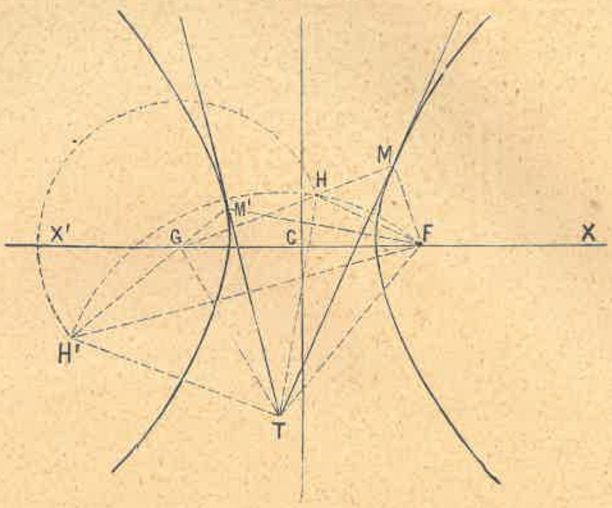
Eszerint a deréklő egyenlete:

$$y - y' = - \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y'}{x'}\,(x - x').$$

Továbbá a hiperbola x' y' (M) pontjához húzott érintő (134. ábra) a két vezérsugár alkotta szöget felezi (az ellipszisnél ez a deréklőről áll). Ennek tüzetes kimutatása a 70. §-ban követett eljárástól semmiben sem különbözik.

A mondottaknál fogva a hiperbola-idomúlag görbült domború tükör (amelynek belső lapja egy hiperbola, saját főtengelye körül történt forgatásából származott) az egyik gyujtópontból kiáradó fény-, hő-, és hangsugarakat akként veti vissza, mintha ezek a másik gyujtópontból érkeznének. Innen származik a gyujtópont név.

134. ábra.



Ugyanezen tétel módot szolgáltat:

1. *a hiperbola valamely adott (M) pontján keresztül érintőt húzni* (felezd *FMG* szöget *MT* egyenessel, ez a keresett érintő);

2. *a hiperbolán kívül eső (T) pontból érintőt szerkeszteni.*

Az utóbbi feladat hasonlókép fejtendő meg, mint a 70. §-ban tárgyalt feladat az ellipszisre nézve.

Az *érintési vonalak*at úgy kapjuk meg az ellipszis ily egyeneseinek értékeiből, ha azokba b helyett $b\sqrt{-1}$-et irunk és akkor:

a *subtangens* értéke: $\dfrac{x_1^2 - a^2}{x_1}$;

az *érintő* értéke: $\dfrac{y_1}{b^2 y_1}\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$;

a *subnormális* értéke: $\dfrac{b^2 x_1}{a^2}$;

a *normális* értéke; $\sqrt{\dfrac{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}{a^2}}$.

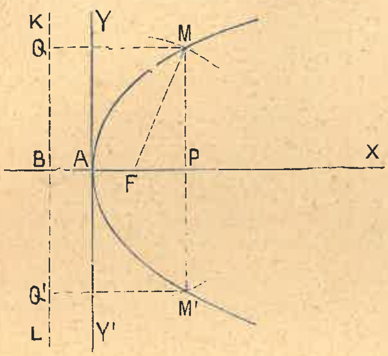
D) A parabola (hajtalék).

77. §. A parabola értelmezése és szerkesztése.

A parabola mértani helye mindazon pontoknak, melyek egy adott ponttól ép oly távol esnek, mint egy kitüzött egyenestől. Az adott pontot *gyujtó*pontnak, vagy *góc*nak, az állandó egyenest *irányvonal*nak (direktrix) és azon egyenest, mely a parabola valamely pontját a góccal összekapcsolja, *vezérsugár*nak nevezzük.

A föntebbi értelmezés alapján a parabola következőképen szerkeszthető:

135. ábra.



Legyen F (135. ábra) a gyujtópont, KL az irányvonal. A gyujtóponton keresztül KL-re FB merőlegest vonjuk. Ezután BF távolságot felezzük; a felező A pont a parabola egyik pontja, mert $AB = AF$.

A pontot a parabola *csúcsá*nak, AX egyenest a *tengelyé*nek nevezzük.

Ezután BX egyenes vonal valamelyik pontjában, pl. P-ben, PM merőlegest emeljük, és BP nyilással F pontból kört rajzolunk, mely a merőlegest M és M' pontban szeli. Ezek ismét a parabola pontjai; mert $MF = BP = MQ$, azaz M pont a góctól ép oly távol esik, mint az irányvonaltól. Ugyanez áll M' pontról is.

Ugyanily módon lehet a parabola akárhány pontját meghatározni.

78. §. A parabola csúcsponti egyenlete.

A parabolát legcélszerübben oly derékszögü rendszerre vonatkoztatjuk, melynek kezdőpontja a csúcspont, X-tengelye a parabola tengelye.

A gyujtópontnak az irányvonaltól való távolságát p-vel jelölve, a 135. ábrában $AB = AF = \frac{p}{2}$. M pont koordinátái: $AP = x$, $MP = y$. M a parabola pontja lévén, $MF = MQ = BP$.

Azonban: $MF = \sqrt{MP^2 + FP^2}$ és $BP = AB + AP$,

vagy: $MF = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2}$, és $BP = \frac{1}{2}p + x$.

tehát: $\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2} = \frac{1}{2}p + x$

ebből, ha a gyökjelet kiküszöböljük:

$$y^2 = 2px;$$

ezen egyenlet a parabola minden pontjára nézve érvényes és a parabola *csúcs-egyenlete*.

79. §. A parabola csúcsponti egyenletének taglalása.

A föntebbi egyenlet y-ra megfejtve lesz:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Ebből kitünik: 1. hogy minden x-nek két egyenlő értékü, ellenkező jelü y felel meg; a negativ x-eknek ellenben képzetes értékü ordináták felelnek meg. Azaz a parabola csak a pozitiv X-tengely két oldalán terül el, még pedig alul és fölül egyenlően. Ha p negativ, akkor csak a negativ jelü x-eknek felelnek meg *valós* értékü y-ok; ez esetben tehát a parabola a negativ X-tengely két oldalán nyúlik el.

2. Ha $x = o$, akkor y is $= o$, azaz a kezdőpont a parabolának egyik pontja (csúcspontja).

3. Minél inkább növekszik x értéke, annál inkább nagyobbodik a megfelelő y is, de kisebb mértékben. Minthogy x határtalanul növekedhetik: a parabola a csúcsponttól kezdve az X-tengely két oldalán végtelenül nyúlik el.

4. x-et $\frac{1}{2}$ p-nek téve, a megfelelő $y = p$, és $2y = 2p$. Ezen kettős ordinátát itt is gyujtóponti húrnak, vagy *paraméter*nek nevezzük.

5. A parabola bármely pontjának adott koordinátáiból $x = a$ és $y = b$ a paraméter hosszát könnyen kiszámíthatjuk. Ugyanis az adott pontra vonatkozólag:

$$b^2 = 2p \, . \, a;$$

tehát: $$2p = \frac{b^2}{a}$$

6. A parabola két pontjának koordinátáit x', y' és x'', y''-vel jelölve: $y'^2 = 2px'$ és $y''^2 = 2px''$; következőleg:

$$y'^2 : y''^2 = x' : x'',$$

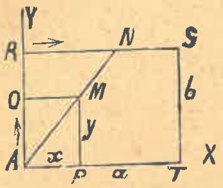
vagyis: *a parabola bármely két pontjának abscisszái ugyanazon arányban vannak, mint a megfelelő ordináták másodhatványai.*

7. A parabola csúcsponti egyenletét aránypár alakjában így is írhatjuk: $2p : y = y : x$, azaz: *a parabola bármely pontjának ordinátája mértani középarányos a megfelelő abscissza és a paraméter közt.*

Ezen alapszik a parabola egyik szerkesztési módja.

Ha t. i. A csúcsponttól kezdve (135. ábra) az irányvonal felé a tengelyen $2p$ paramétert kimérjük és az ellenkező irányban valamely tetszés szerinti (AP) abscisszát kitűzünk, a kettő közt a középarányos a megfelelő ordináta hosszát ábrázolja.

136. ábra.



Említésre méltó még a parabola következő szerkesztési módja: Legyen A a parabola csúcsa (136. ábra), AX a tengelye és S egyik adott pontja, melynek ismeretes koordinátáit a, b-vel jelöljük. Miután $ARST$ derékszögű négyszöget megszerkesztettük, osszuk el úgy AR, mint RS oldalát n egyenlő részre; ezután kapcsoljuk össze RS-nek r-dik osztópontját (R-től S felé számítva) A csúccsal és húzzunk AR-nek r-dik osztópontján keresztül (A-tól R felé számítva) AX tengellyel párhuzamos egyenest. AN és OM metsző pontja M a parabola egyik pontja. Mert ha M pontot XAY derékszögű rendszerre vonatkoztatjuk, azaz $MP = y$ és $AP = x$, AMP és NAR háromszögek hasonlósága következtében:

$$MP : AP = AR : NR, \text{ vagy } y : x = b : r\frac{a}{n}.$$

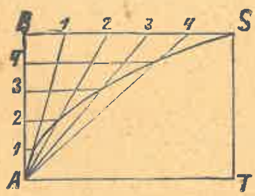
Továbbá:

$$y = r\frac{b}{n}.$$

E két egyenletből $\frac{r}{n}$-t kiküszöbölvén, $y^2 = \frac{b^2}{a}x$,

és ez a föntebbi 5. pont szerint nem egyéb, mint a parabola csúcsponti egyenlete.

137. ábra.



Ezen alapszik e görbe egy igen egyszerű szerkesztési módja, melyet a 137. ábra mutat.

8. Végül látni való, hogy mig az ellipszis pontjainál a gyujtóponttól és az irányvonaltól való távolságok között az arány kisebb 1-nél, és a hiperbola pontjainál ugyanezen arány nagyobb 1-nél, addig a parabola pontjainál ezen arány éppen annyi, mint 1. A parabola tehát átmeneti alak az ellipszis és hiperbola között, amit majd később a nevezett görbe vonalak tüzetes összehasonlítása alkalmával még bővebben kifejtünk.

80. §. A parabola sarkegyenlete.

Sarkpontúl a parabola gyujtópontját, sarktengelyül ugyanannak tengelyét választjuk. BF távolságot (135. ábra) ismét p-vel jelöljük. M pont sarkkoordinátái $MF = \rho$ és $MFX\sphericalangle = \omega$. A parabola jellemző tulajdonságánál fogva $MF = BP = BF + FP$, vagy $\rho = p + \rho \cos \omega$, tehát:

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \omega}.$$

Legyen $\omega = o$. ekkor $\rho = \infty$; ha $\omega = 90^0$, $\rho = p$; ha $\omega = 180^0$, $\rho = \frac{p}{2}$, stb. amint lennie kell.

81. §. A parabola érintője és deréklője.

A parabola adott egyenlete: $y^2 = 2px$, M érintési pont koordinátái: x' y' (138. ábra).

Az érintő egyenletét keresve, az adott érintési ponton és a parabola egy másik (pl. x'' y'') pontján keresztül szelőt húzunk. Ennek egyenlete:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'). \qquad (m)$$

Minthogy $(x'\, y')$ és $(x''\, y'')$ a parabola pontjai, tehát:

$$y'^2 = 2px' \text{ és } y''^2 = 2px'',$$

ezekből: $y'^2 - y''^2 = 2p(x' - x'')$, és:

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{2p}{y' + y''}.$$

Az utóbbi értéket a föntebbi (m) egyenletben helyettesítvén, a parabola szelőjének egyenletét kapjuk, t. i.:

$$y - y' = \frac{2p}{y' + y''}(x - x').$$

Legyen $y' = y''$, ekkor a szelőből *érintő* válik; az utóbbi egyenlete tehát:

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x'), \qquad (\alpha)$$

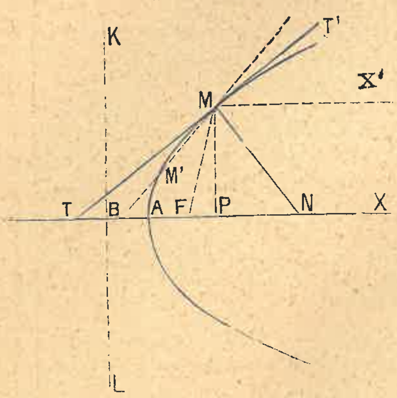
vagy, ha a törteket megszüntetjük és tekintetbe vesszük, hogy $y'^2 = 2px'$, az érintő egyenlete ily alakot nyer:

$$y'y = p(x' + x). \qquad (\beta)$$

A deréklő egyenlete továbbá:

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

138. ábra.



A szerkesztést illetőleg először az érintőnek (MT-nek) (138. ábra) azt a pontját határozzuk meg, ahol az X-tengelyt átmetszi. Evégből (β) egyenletben legyen $y = o$. a megfelelő $x = -x'$. Azaz a T pontot úgy leljük, ha az érintési pont abscisszáját (AP-t) a kezdő ponttól a negativ x-ek irányában kimérjük. T pontot az érintési ponttal összekapcsolván, a kivánt érintőt kapjuk.

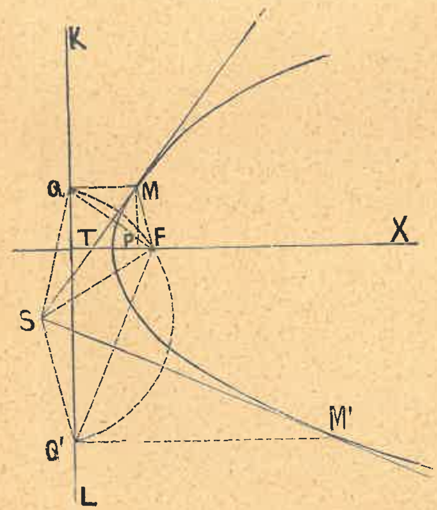
Hasonlóúl a deréklő egyenletében, ha $y = o$, a megfelelő $x = AN = x' + p$, tehát $PN = p$; ez alapon a parabola deréklőjét könnyen megrajzolhatjuk.

A mondottak alapján továbbá ki lehet mutatni, hogy a *parabola érintője (MT) az érintési ponthoz tartozó vezérsugárral és a tengellyel egyenlő szögeket alkot.*

Ugyanis $AB = AF = \frac{1}{2}p$, $AT = AP = x'$, $FM = BP = x' + \frac{1}{2}p$ és $FT = AT + AF = x' + \frac{1}{2}p$; következőleg $FM = FT$ és $TMF \sphericalangle = MTF \sphericalangle$, vagy, ha $MX' \parallel AX$-szel: $TMF \sphericalangle = T'MX' \sphericalangle$. E tulajdonságnál fogva nyerte a *gyujtópont* a nevét.

Továbbá ha $MQ \perp KL$-re (139. ábra) MT érintő is $\perp FQ$ egyenesre; mert $MF = MQ$, és $TMF \sphericalangle = MTF \sphericalangle = TMQ \sphericalangle$.

139. ábra.



Ez alapon valamely adott (S) pontból (139. ábra), a parabolához érintőt vonhatunk.

Ugyanis legyen M a keresett érintési pont és SMT az érintő. Húzzuk MQ-t $\perp$ KL-re és kössük össze Q-t F ponttal. A mondottaknál fogva az érintő merőleges FQ-ra és felezi ezt. Ennek kapcsán $SQ = SF$. Ha tehát az adott S pontból SF sugárral kört rajzolunk, az KL irányvonalat Q pontban átszeli. Ha továbbá FQ egyenest húzzuk és erre S pontból ST merőlegest rajzoljuk, ezen

ST a kivánt érintő, mely a parabolát azon a ponton érinti, ahol az AX-szel párhuzamos MQ az érintővel találkozik. — Minthogy ama kör az irányvonalat két pontban (Q és Q' pontban) metszi, ennélfogva a parabolán kivül eső bármely pontból *két* érintőt vonhatunk a parabolához.

A négy érintő-távolság meghatározása következőképen végezhető: A *subtangens* $TP = PA + AT = 2x_1$ (138. ábra). A parabola bármely pontjának subtangense ilyformán akkora, mint az illető pont abscisszájának kétszerese. Az *érintő* MT a TPM derékszögü háromszögből nyerhető, mert $MP^2 = \overline{TP}^2 + \overline{PM}^2 = 4x_1^2 + y_1^2 = 4x_1^2 + 2px_1 = 2x_1(2x_1 + p)$; innen $TM = \sqrt{2x_1(2x_1 + p)}$. A *subnormális* PN meghatározására a normális egyenletébe $y = o$ értéket írva megkapjuk a normális és a tengely N metszési pontjának az abscisszáját s ez $AN = x_1 + p$, s minthogy a subnormális $PN = AN - AP$, azért $PN = x_1 + p - x_1 = p$. A subnormális a parabola minden pontjára nézve állandó. A *normális* hosszát MNP derékszögü háromszögből számítjuk ki; ebből $\overline{MN}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = y_1^2 + p^2 = 2px_1 + p^2$ és $PN = \sqrt{p(2x_1 + p)}$.

E) A másodrendű vonalakról általában.

82. §. A két változót tartalmazó általános másodfokú egyenlet mértani jelentése.

Az eddigiekből tudjuk, hogy a kör, ellipszis, hiperbola és parabola egyenletei a változó koordinátákra vonatkozólag másodfokúak; viszont minden másodfokú egyenlet, mely két változó mennyiséget foglal magában, szükségkép a nevezett vonalak valamelyikét jelenti.

Ugyanis a két ismeretlent tartalmazó másodfokú egyenlet általános alakja ez:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o. \qquad (1)$$

Hogy a megfelelő másodrendü vonal jellemző tulajdonságait könnyebben fölismerhessük, a mondott egyenletet a koordináta-rendszer átalakitása által egyszerübb alakba öntjük.

Először föltesszük, hogy egyenletünk *derékszögü* rendszerre vonatkozik, ezáltal általánosságán csorbát nem ejtünk; mert, ha a koordinátákat képviselő x, y mennyiségek ferdeszögü rendszerrel vonatkoznának, módunkban áll derékszögü rendszerre áttérni anélkül, hogy e miatt az egyenlet általános alakja megváltoznék. Az átalakító képletek (48. §.) tudniillik elsőfokú egyenletek lévén, az eredeti egyenlet fokát nem módosítják.

Már most az eredeti derékszögü rendszerről egy másik derékszögü rendszerre térünk át, melynek ugyanaz a kezdőpontja, mint az előbbinek. Az uj rendszerbeli koordinátákat x' y'-gyel, az új és a régi X-tengely bezárta szöget α-val jelöljük. Ekkor a 48. §. II. a képletei szerint x helyébe $(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)$ és y helyébe $(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)$ teendő, minekfolytán a föntebbi egyenlet ily alakot nyer:

$$\left.\begin{aligned}&(A.\cos^2\alpha - B.\sin\alpha\cos\alpha + C.\sin^2\alpha)\,y'^2 +\\ &+[2(A-C)\sin\alpha.\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]\,x'y'\\ &+(A.\sin^2\alpha + B.\sin\alpha.\cos\alpha + C.\cos^2\alpha)\,x'^2 +\\ &(D.\cos\alpha - E.\sin\alpha)\,y' + (D.\sin\alpha + E.\cos\alpha)\,x' + F = o.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Rövidség okáért y'^2 együtthatóját M-mel, $x'y'$ együtthatóját L, x'^2-ét N, y'-ét R, x'-ét pedig S betüvel jelöljük s az utóbbi egyenletet röviden így írjuk:

$$My'^2 + Lx'y' + Nx'^2 + Ry' + Sx' + F = o.$$

Minthogy α szög nagysága tetszésünktől függ, akkorára vehetjük, hogy a második tag együtthatója (L) zérussá váljék. Legyen tehát $L = o$, vagyis $2\,(A - C)\sin\alpha.\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = o$ és keressük most α azon értékeit, melyek e föltételnek megfelelnek, azaz fejtsük meg az utóbbi egyenletet α-ra vonatkozólag.

Evégett $2\sin\alpha.\cos\alpha$ helyébe a szögmértan megfelelő képlete nyomán $\sin 2\alpha$-t, és $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ helyébe a megfelelő képlet alapján $\cos 2\alpha$-t irunk és így az utóbbi egyenlet ekkép módosul:

$$(A - C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = o,$$

ebből következik, hogy:

$$tg\,2\alpha = -\frac{B}{A - C}.$$

Úgyde tudjuk, hogy a tangens o-tól ∞-ig akármilyen pozitiv, vagy negativ értékü lehet; ennélfogva bármely értéküek is az A, B, C együtthatók, okvetlenül találhatunk akkora α szöget, melyre nézve $L = o$, azaz a (2)-vel jelölt egyenlet második tagja elmarad.

Ennek következtében a szóban forgó egyenlet ily alakot nyer:

$$My'^2 + Nx'^2 + Ry' + Sx' + F = o. \quad (3)$$

Mielőtt tovább haladnánk, vizsgáljuk meg közelebbről α azon értékét, mely $L = o$-nak megfelel.

Először is feltünő, hogy α szög értéke egyedül A, B, C együtthatóktól függ. Továbbá tudván, hogy:

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$

ezen egyenlet $tg\,\alpha$-ra vonatkozólag másodfoku lévén, α-nak két olyan értéke van, melyre nézve $L=o$. Ugyanis keressük ki az utóbbi egyenletből $tg\alpha$-t, lesz:

$$tg\,\alpha = -\frac{1}{tg\,2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{tg\,2\alpha}\right)^2 + 1},$$

$tg\,2\alpha$ helyébe föntebbi értékét téve:

$$tg\,\alpha = \frac{A - C \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B}$$

és, ha $tg\,\alpha$ két értékét egymástól elkülönítjük:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha_1 &= \frac{A - C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B} \\ tg\,\alpha_2 &= \frac{A - C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B} \end{aligned}\right\}$$

Látni ebből, hogy az új X-tengelynek két olyan helyzete van, amikor $L=o$. Továbbá $tg\,\alpha_1$ és $tg\,\alpha_2$ ellenkező jelüek, mert $A-C$ okvetlenül $<\sqrt{(A-C)^2+B^2}$; eszerint az egyik tangens $+$, a másik $-$ jelü. Ezt még világosabban látjuk, ha $tg\,\alpha$-nak két értékét egymással megszorozzuk. Ugyanis $tg\,\alpha_1 \,.\, tg\,\alpha_2 = -1$.

Az utóbbi egyenlet továbbá azt is mutatja, hogy az X-tengelynek ama két helyzete, mely a föntebbi $(L=o)$ követelésnek megfelel, 90°-ra esik egymástól. Midőn tehát az X-tengely az egyik helyzetben van, a hozzátartozó Y-tengely a másikat foglalja el.

Ismerve $tg\,\alpha$ azon értékeit, melyek L együtthatót a (2) egyenletből elenyésztetik, könnyen kiszámíthatnók a megfelelő $sin\,\alpha$-t és $cos\,\alpha$-t, és ezek helyettesítése után M, N, R, S együtthatókat is.

Elébb azonban folytatjuk a (3) számú egyenlet egyszerüsítését, és kiküszöböljük ebből x' és y' első fokú hatványát is. Evégett ismét egy új koordináta-rendszerre térünk át, melynek más kezdőpontja lesz, de tengelyei az előbbiekkel párhuzamosak.

Az új kezdőpont koordinátáit az előbbi rendszerre vonatkozólag m- és n-nel, az új rendszerhez tartozó koordinátákat pedig x'' y''-vel jelöljük és a (3) számú egyenletben x' helyébe $(x''+m)$-et, y' helyébe $(y''+n)$-et irunk. Ekkor a (3) egyenlet így módosúl:

$$\left.\begin{aligned} &Ny''^2 + Nx''^2 + (2Mn + R)y'' + (2Nm + S)x'' \\ &+ Mn^2 + Nm^2 + Rn + Sm + F = o. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Minthogy az új kezdőpont tetszés szerint választható, módunkban áll m és n értékeit akkorára venni, hogy x'' és y'' elsőfokú hatványainak együtthatói zérussá legyenek.

Legyen tehát:

$$2Mn + R = o \text{ és } 2Nm + S = o;$$

ezekből:

$$m = -\frac{S}{2N} \text{ és } n = -\frac{R}{2M},$$

ezen értékek mellett az említett együtthatók csakugyan zérussá lesznek.

Lássuk tüzetesen.

1. Tegyük fel, hogy sem M, sem N nem o: ekkor m és n véges mennyiségek, és a föntebbi (4) egyenlet ily alakot nyer:

$$My^2 + Nx^2 = P.\text{*)}$$

2. Ha $M = o$, de N és R nem o, akkor $n = -\infty$; ha pedig $N = o$, de M és S nem o, akkor $m = -\infty$, vagyis az új kezdőpont egyik koordinátája határtalan mennyiség, tehát a célbavett átalakítás nem vihető véghez. De azért a szóban forgó egyenletet ezen utóbbi esetben is lehet még egyszerüsíteni; nevezetesen:

a) Midőn $M = o$, de N meg R zérustól különbözők, m és n értékeit úgy vehetjük fel, hogy:

$$2Nm + S = o, \text{ és } Mn^2 + Nm^2 + Rn + Sm + F = o,$$

ekkor pedig:

$$m = -\frac{S}{2N}, \text{ és } n = -\frac{Nm^2 + Sm + F}{R};$$

ezen értékek végesek és reálisak lévén, a rendszer ily átalakítása valóban lehetséges. A (4)-gyel jelölt egyenlet ennek következtében ily alakot nyer: $Nx^2 + Ry = o$, vagy, ha $-\frac{R}{N}$-et Q-val jelöljük,

$$x^2 = Qy. \qquad \text{II. } (a)$$

b) Ellenben ha $N = o$, de M és S együtthatók zérustól különböznek, ez esetben $(2Mn + R)$-et, az utolsó tagot, vehetjük ki a (4) egyenletből, mely azután ily alakú lesz:

$$My^2 + Sx = o, \text{ vagy, ha } -\frac{S}{M}\text{-et } Q'\text{-tel jelöljük:}$$

$$y^2 = Q'x. \qquad \text{II. } (b)$$

Az utóbbi egyenlet alakra nézve nem különbözik a megelőzőtől [II. (a)], csak a koordináta-tengelyek cseréltek szerepet.

3. Midőn $M = o$ $R = o$, akkor $n = \frac{o}{o}$, ha pedig $N = o$ és $S = o$, akkor $m = \frac{o}{o}$, azaz határozatlan értékü. Ez esetekben tehát még az utóbbi átalakítás sem vihető véghez; egyébiránt fölösleges is, mert akkor a (3) egyenlet határozott másodfokú egyenletté válik.

*) Rövidség okáért az ékezeteket elhagytuk.

Nevezetesen *a)* midőn $M=o$ és $R=o$, a (3) számú egyenlet ily alakot ölt:

$$Nx^2+Sx+F=o \qquad \text{III. } (a)$$

és ebből: $$x=\frac{-S\pm\sqrt{S^2-4NF}}{2N},$$

vagy, ha x-nek két értékét elkülönítjük:

$$x_1=\frac{-S+\sqrt{S^2-4NF}}{2N}, \text{ és } x_2=\frac{-S-\sqrt{S^2-4NF}}{2N},$$

ezek oly két egyenesnek egyenletei, melyek az Y-tengellyel párhuzamosak.

Ha $S^2=4NF$, a két egyenes vonal *képzetes.*

b) Midőn $N=o$, és $S=o$, a (3) számú egyenlet ily alakú:

$$My^2+Ry+F=o, \qquad \text{III. (b)}$$

ebből: $$y=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4MF}}{2M},$$

az utóbbi egyenlet ismét két egyenes vonalnak felel meg, melyek az X-tengellyel párhuzamosak.

A mondottakból mindössze azon tanulságot meríthetjük, hogy a két ismeretlen mennyiséget tartalmazó általános másodfokú egyenlet a koordináta-rendszer két izben való átalakítása által eme két alak egyikére vezethető vissza:

$$\text{I. } My^2+Nx^2=P, \text{ vagy II. } y^2=Qx.$$

Kivétel csak egy van, midőn t. i. az eredeti egyenlet második tagjának kirekesztése következtében x és y-nak mind a két hatványa elmarad; ekkor az egyenlet két párhuzamos egyenes vonalat jelent.

83. §. Az átalakított másodfokú egyenlet taglalása.

Ezekután vizsgáljuk meg tüzetesen az I. és II. számú egyenletet.

$$\text{I. } My^2+Nx^2=P.$$

Itt M együtthatót mindig pozitivnek tekinthetjük, mert, ha negativ jelü volna, az egyenlet minden tagjának előjelét ellenkezőre változtathatjuk.

N és P együtthatókat illetőleg következő lehetőségek vannak.

1. N és P pozitiv mennyiségek. Ekkor az I. számú egyenlet így is irható:

$$\frac{N}{P}x^2+\frac{M}{P}y^2=1, \text{ vagy } \frac{x^2}{\frac{P}{N}}+\frac{y^2}{\frac{P}{M}}=1,$$

ez pedig a 65. §. szerint oly ellipszisnek az egyenlete, melynek fél nagy tengelye $a = \sqrt{\frac{P}{N}}$, fél kis tengelye $b = \sqrt{\frac{P}{M}}$.

Az ellipszis változatai. *a)* Midőn $M = N$, az ellipszis körré változik. *b)* Ha $P = o$, az első egyenlet következő két egyenletre bontható: $My^2 = o$, és $Nx^2 = o$, ami csak úgy állhat meg, ha $y = o$, és $x = o$; ez esetben tehát a másodrendű vonal ponttá lesz és e pont egyszersmind a rendszer kezdőpontja.

2. Úgy N, mint P negativ mennyiség; ekkor az I. számú egyenlet ily alakban irható:

$$\frac{N}{P}x^2 - \frac{M}{P}y^2 = 1, \text{ vagy } \frac{x^2}{\frac{P}{N}} - \frac{y^2}{\frac{P}{M}} = 1$$

és ez oly hiperbolának az egyenlete, melynek főtengelye X-tengelyül szolgál. A fél főtengely $a = \sqrt{\frac{P}{N}}$, és a fél mellék-tengely $b = \sqrt{\frac{P}{M}}$.

Ide tartoznak a következő külön esetek: a) $M = -N$, ekkor a hiperbola egyenlőoldalú, vagyis derékszögű. *b)* Midőn $P = o$, akkor $My^2 - Nx^2 = o$; és $y = \pm x\sqrt{\frac{N}{M}}$. Ez pedig a kezdőponton átmenő egyenes vonalpárnak egyenlete. A hiperbola tehát a jelen esetben két — egymást átmetsző — egyenessé változott.

3. Ha N negativ, de P pozitiv mennyiség, az (I) egyenlet ismét hiperbolát jelent, melynek főtengelye azonban az Y-tengely irányába esik.

4. Ha N pozitiv, de P negativ, akkor az I. egyenlet mértanilag semmit sem jelenthet, mert a koordinátáknak értékei képzetes mennyiségek.

$$\text{II. } y^2 = Qx.$$

1. Ha Q pozitiv, az egyenlet parabolát jelent, melynek tengelye az X-tengellyel egybeesik, paramétere pedig: $2p = Q$.

2. Ez akkor is áll, ha Q negativ; azaz a II.-vel jelölt egyenlet így is parabolát jelent, paramétere ismét $= Q$, de tengelye a negativ X irányába esik.

A parabola változata gyanánt tekinthető azon már föntebb érintett eset, midőn nemcsak $N = o$, de S is $= o$; ekkor t. i. a parabola két párhuzamos egyenessé lesz.

Mindezekből látnivaló, hogy a két változó mennyiséget magában foglaló másodfokú egyenlet:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o \qquad (1)$$

vagy 1. ellipszist jelent (ideértve az ellipszis változatait: a kört, a pontot és a képzetes görbét is); vagy:

2. hiperbolát (ideszámítva az egyenlőoldalú hiperbolát és az egymást átmetsző vonalpárt), vagy:

3. parabolát (ideértve a két párhuzamos egyenest).

Ami a görbe vonal minőségét illeti, ez — mint láttuk — az átalakított egyenlet M és N együtthatóitól függ; az utóbbiak értékei azonban az eredeti (1) egyenlet A, B és C együtthatóitól függenek; ennélfogva *a görbe vonal minőségét az általános egyenlet A, B, C együtthatói határozzák* meg. Fejtsük ki már most M és N értékeit, hogy az eredeti (1) egyenlet által képviselt görbe vonal iránt közvetlen fölvilágosítást nyerjünk.

A 82. §. szerint:

$$M = A \cdot \cos^2 \alpha - B \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + C \cdot \sin^2 \alpha. \qquad 1)$$

$$N = A \cdot \sin^2 \alpha + B \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + C \cdot \cos^2 \alpha. \qquad 2)$$

$$(A - C) \cdot \sin 2\alpha + B \cdot \cos 2\alpha = o. \qquad 3)$$

Az 1) és 2) számú egyenletből:

$$M + N = A\, (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + C\, (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$M - N = A\, (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - B\, (2 \sin \alpha \cos \alpha) - C\, (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha),$$

vagyis:

$$M + N = A + C \text{ és } M - N = (A - C) \cos 2\alpha - B \sin 2\alpha;$$

az utóbbi egyenletet és a 3. számút négyzetre emelvén és összeadván, lesz:

$$(M - N)^2 = (A - C)^2 + B^2,$$

$$M - N = \sqrt{(A - C)^2 + B^2}.$$

$M - N$ értékét $M + N$-éhez hozzáadva, illetőleg abból kivonva, lesz:

$$M = \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2}, \text{ és } N = \frac{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2}$$

Ha a gyökmennyiség jelét negativnek vesszük, M és N értékei fölcserélődnek, azaz a két tengely helyet cserél.

Minthogy mindig föltételezhetjük, hogy az eredeti egyenlet A együtthatója pozitiv (mert ha negativ lenne, az egyenlet minden tagjának előjelét ellenkezőre változtathatnók), ennélfogva a föntebbi egyenletek szerint M okvetlenül pozitiv.

Ami N-et illeti, ez lehet $+$, vagy $-$ jelü. Ugyanis szorozzuk meg M és N értékeit egymással, lesz:

$$MN = \tfrac{1}{4}\, (4AC - B^2);$$

ebből látnivaló, hogy ha $4AC - B^2$ pozitiv, akkor N is pozitiv; ha $4AC - B^2$ negativ, N is negativ; végül, ha $4AC - B^2 = o$, vagyis $4AC = B^2$, akkor $N = o$. Ezt az eredményt a föntebbiekkel egybevetve, a másodrendü vonalak megkülönböztetésére következő szabályunk van:

A két változót tartalmazó másodfokú egyenlet ellipszist, hiperbolát vagy parabolát jelent (ide értve ezek változatait is) *aszerint, amint $B^2 - 4AC$ kisebb, egyenlő vagy nagyobb o-nál.*

84. §. A másodrendű vonalak középpontjáról.

Valamely görbe vonal *középpont*jának azt a pontot nevezzük, mely a rajta keresztülmenő húrokat felezi. Kérdés, mely másodrendü vonalaknak van ilyen középpontjuk? Ennek kipuhatolása végett az (1) számú általános egyenletre térünk vissza s abban x helyébe $(x' + m)$-et, y helyébe $(y' + n)$-et irunk, más szóval: a régi rendszerről új tengelyrendszerre megyünk át, melynek más kezdőpontja, de az előbbiekkel párhuzamos tengelyei vannak. Ekkor az idézett egyenlet ily alakot nyer:

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + (2An + Bm + D)\,y' +$$
$$+ (2Cm + Bn + E)x' + (An^2 + Bmn + Cm^2 + Dn + Em + F) = o.$$

Minthogy m és n határozatlan mennyiségek, szabjuk meg értéköket úgy, hogy x és y elsőfokú hatványainak együtthatói zérussá váljanak, azaz legyen:

$$2An + Bm + D = o \text{ és } 2Cm + Bn + E = o,$$

ennek következtében:

$$m = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC},\ n = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC};$$

és a föntebbi egyenlet ily alakú lesz:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = o \ldots . (\gamma).$$

$$\text{ahol } F' = F + \frac{AE^2 - BDE + CD^2}{B^2 - 4AC}.$$

Látnivaló, hogy (γ) egyenletben $+x$ és $+y$ helyébe minden változás nélkül $-x$ és $-y$-t írhatunk, azaz: ha x', y' a görbe valamelyik pontjának koordinátái és mint ilyenek (γ) egyenletnek megfelelnek: akkor $-x'$ és $-y'$ is ugyanazon görbe egy másik pontjának koordinátái, mert az utóbbiak hasonlólag megfelelnek ugyanazon egyenletnek. Ámde e két pont a rendszer kezdö pontjától egyenlő távolságra van és azzal ugyanazon egyenesbe esik, következőleg az új kezdőponton átmenő húrokat a nevezett pont felezi Ugyane kezdőpont koordinátáinak értékeiből továbbá azt is látni, hogy az átalakítás csak az elllipszisre és hiperbolára nézve végezhető, a parabolára nézve ellenben nem lehetséges; az utóbbinál t. i. $B^2 - 4AC = o$, azaz m és n határtalan értéküek.

Ennélfogva a másodrendü vonalak között csak az ellipszisnek és hiperbolának van középpontja.

85. §, A másodrendű vonalak átmérőiről.

Tudvalevő, hogy az ellipszis két tengelye az azokra merőleges húrokat felezi; ugyanez áll a hiperbola főtengelyéről és a parabola tengelyéről is. Kérdés: nincs-e még több ilyen vonal, mely a másodrendü görbék párhuzamos húrrendszereit felezi? Az ily tulajdonságú vonalakat *átmérőknek* nevezzük. Az átmérő tehát nem egyéb, mint valamely párhuzamos húrrendszer felező pontjainak mértani helye. Eszerint a föltett kérdés röviden ez: Miféle átmérőik vannak a másodrendű vonalaknak?

Először az ellipszis és hiperbola, azután a parabola átmérőiről szólunk.

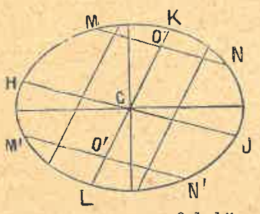
I. *Az ellipszis átmérői.* Az ellipszis középponti egyenlete a tengelyekre vonatkozólag:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2; \tag{1}$$

az ellipszis valamely húrjának, pl. MN-nek (140. ábra) egyenlete:

$$y = kx + l. \tag{2}$$

140. ábra.



Ha a közös metsző pontok koordinátáit keressük és evégből y-t a föntebbi két egyenletből kirekesztjük, következő másodfokú egyenletre jutunk: $(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 - b^2) = o$ (3). Megfejtvén ez egyenletet, a két metszőpont abscisszáit leljük: névszerint x' es x''-t, mikből a (2) egyenlet alapján a megfelelő y' és y'' is meghatározható. Főcélunk azonban MN húr (140. ábra) *felező* pontjának (O-nak) koordinátáit, ξ- és η-t meghatározni. Ugyde $\xi = \frac{1}{2}(x' + x'')$ és $\eta = \frac{1}{2}(y' + y'')$; továbbá a rendezett másodfokú egyenletben: *a második tag együtthatója az ellenkező jellel vett gyökök összegével egyenlő*, tehát a (3) egyenlet alapján:

$$\xi = -\frac{a^2kl}{a^2k^2 + b^2}. \tag{4}$$

A megfelelő ordinátát η-t megkapjuk, ha a húr (2) egyenletében x helyébe ξ-t (illetőleg ennek értékét) tesszük, mert a felező pont a húrnak pontja lévén, kell, hogy koordinátái e húr egyenletének megfeleljenek, azaz $\eta = k\,\xi + l$, vagy:

$$\eta = \frac{b^2 l}{a^2 k^2 + b^2}. \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenletből osztás által lesz:

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{b^2}{a^2 k} \text{ és ebből: } \eta = -\frac{b^2}{a^2 k}\,\xi. \tag{6}$$

Ez egyenlet MN húr felező pontjának (ξ és η) koordinátái közt az arányt megszabván, világosan mutatja, hogy ez arány l mennyiségtől teljesen független. Ha tehát MN-nel párhuzamosan egy másik, pl. $M'N'$ húrt vonunk és felező pontjának koordinátáit ξ' és η'-sal jelöljük:

$$\eta' = -\frac{b^2}{a^2 k}\,\xi'.$$

Ugyanez áll mindazon húrok felező pontjáról, melyek MN-nel párhuzamosan haladnak. Eszerint, ha ξ-t és η-t változó koordinátákul tekintjük, a föntebbi (6) egyenlet azon vonal egyenlete, mely az NM-nel párhuzamos húrok felező pontjának mértani helye, szóval az *átmérő*nek egyenlete, mely, a mint látjuk, a középponton keresztülmenő egyenest jelent.

Minthogy a mondottak az ellipszis bármely párhuzamos húrrendszeréről állanak, ennélfogva *az ellipszis átmérői egyenes vonalak és a középponton mennek keresztül.*

Viszont, minden oly egyenes (KL), mely az ellipszis középpontján megy keresztül, valamely párhuzamos húrrendszer átmérőjének tekinthető.

Mert, ha az adott egyenes egyenlete: $y = k'x$,

$$\text{legyen } k' = -\frac{b^2}{a^2 k}, \text{ tehát } k = -\frac{b^2}{a^2 k'},$$

és ez azon húrrendszer hajlási szögének tangense, melyet az adott egyenes felez.

Az ellipszis átmérője a felezett húrrendszerrel sajátszerü viszonyban van. Ugyanis az ellipszis MN húrjának egyenlete ily alakú $y = kx + l$, a hozzátartozó KL átmérőé: $y = k'x$; a föntebbiek szerint:

$$k = -\frac{b^2}{a^2 k'}, \text{ tehát } kk' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

1. Most, ha az átmérő egyik, pl. K végpontján keresztül érintőt húzunk az ellipszishez és ezen érintő hajlási szögének, azaz

KTX szögnek tangensét t-vel, az érintőpont koordinátáit x', y'-sal jelöljük, a 70. §. I. p. szerint

$$t = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'};$$

de mert:

$$y' = k'x', \text{ tehát:}$$

$$t = -\frac{b^2}{k' a^2} \text{ és } tk' = -\frac{b^2}{a^2};$$

összehasonlítva ezt az (1) egyenlettel, kitűnik, hogy:

$$tk' = kk', \text{ tehát } t = k,$$

vagyis az átmérő felezte húrok az átmérő végpontján keresztül húzott érintővel párhuzamosak.

2. Ha MN húrral párhuzamosan egy második átmérőt vonunk, ez viszont felezi az első átmérővel párhuzamos húrokat. Mert a második HJ átmérő egyenlete: $y = kx$, a hozzá tartozó (azaz általa felezett) húrok valamelyikének egyenlete pedig ily alakú: $y = k'' x + l''$.

Ugyde a föntebbi (1) egyenletnél fogva kell, hogy:

$$k'' k = -\frac{b^2}{a^2} \text{ és } kk' = -\frac{b^2}{a^2};$$

tehát:

$$k'' k = kk' \text{ és } k'' = k'.$$

Azaz a két átmérő mindegyike felezi a másikkal párhuzamos húrokat. Ezek a *társ*átmérők; ezekre nézve $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$,

3. Midőn az (1) egyenletben $k' = o$, akkor $k = \infty$; azaz, ha az egyik átmérő az X-tengellyel egybeesik, akkor a másik az Y-tengely irányába esik; így tehát az ellipszis nagy és kis tengelye is össze tartozó átmérők, amit már úgy is tudunk. E két tengelyen kívül nincsenek más derékszögü átmérők. (Miért nincsenek?)

II. *A hiperbola átmérői.* Amiket az imént az ellipszisről elmondottunk, azok némi módosítással a hiperbolára nézve is érvényesek. Nevezetesen:

A hiperbola átmérői is a középponton mennek keresztül; viszont minden oly egyenes, mely a hiperbola középpontján megy keresztül, valamely húrrendszer átmérőjéül tekinthető. Kivétetnek azonban a *közelítő* vonalak. A hiperbola átmérői az általuk felezett húrrendszerhez hasonló viszonyban vannak, mint az ellipszis átmérői. T. i. a hiperbola azon húrjai, melyeket egy meghatározott átmérő felez, az utóbbi végpontján keresztül húzott érintővel párhuzamosak.

Ha a hiperbola egyik átmérője a másikkal párhuzamosan vont húrokat felezi, akkor viszont az utóbbi átmérő az előbbivel párhuzamos húrokat is felezi. Az ily átmérőket itt is *társ*átmérőknek nevezzük. Megjegyzendő azonban, hogy két *társ*átmérő közül csak az egyik metszi a hiperbolát; a másik ellenben nem találkozik azzal. Mert két átmérő egyenlete általában ily alakú:

$$y = kx, \text{ és } y = k'x;$$

minthogy pedig ezek *társ*átmérők, k és k' közt következő egyenlet áll:

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Most, ha az egyik átmérő a hiperbolát metszi, a megfelelő k okvetlenül $< \frac{b}{a}$ (miért?), tehát $k' > \frac{b}{a}$-nál, mert különben kk' nem lehetne $= \frac{bb}{aa}$. De ha $k' > \frac{b}{a}$-nál, akkor a másik átmérő nem metszheti a hiperbolát. — Eszerint a hiperbola két társátmérője közül csak az egyik valódi, a másik ellenben képzetes átmérő.

A hiperbola *tengelyei* is társátmérők, melyek a megfelelő húrrendszerre merőlegesek és azt felezik. E két tengelyen kívül a hiperbolának másnemü *derékszögü* átmérő párja nincsen.

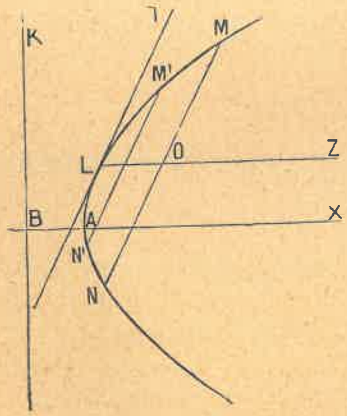
III. *A parabola átmérői.* A parabola csúcsponti egyenlete:

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

MN húrjának egyenlete ugyanazon rendszerre vonatkozólag:

$$y = kx + l. \tag{2}$$

141. ábra.



A metszőpontok koordinátáit keresendők, a két egyenletből x-et kirekesztjük; legyen:

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2lp}{k} = o. \tag{3}$$

Ez egyenlet két gyökét y' és y''-vel, MN húr (141. ábra) felező pontjának (O-nak) koordinátáit ismét ξ és η-val jelölve:

$$\eta = \tfrac{1}{2}(y' + y'') = \frac{p}{k}, \tag{4}$$

azaz O pont ordinátája l-nek értékétől független; ennelfogva az MN-nel párhuzamos húrok felező pontjainak ugyanazon ordinátájuk van $\left(\eta = \frac{p}{k}\right)$, következőleg: *minden párhuzamos húrrendszer felező pontjainak mértani helyét az*

X-tengelytől $\frac{p}{k}$ távolságra eső és azzal párhuzamos egyenes vonal ábrázolja.

A parabola átmérői tehát mind párhuzamosak a tengellyel. Viszont minden egyenes vonal, amely a parabola tengelyével párhuzamos, átmérőnek tekinthető; mert, ha k értékét kellően megválasztjuk, $\frac{p}{k}$ bármily értékű lehet.

Legyen továbbá az MN-nel párhuzamos húrrendszer átmérőjének egyenlete:

$$y = y'.$$

ekkor a mondottak szerint:

$$y' = \frac{p}{k}, \text{ tehát } k = \frac{p}{y'}.$$

Másrészt azonban $\frac{p}{y'}$ egyszersmind tangense azon szögnek, melyet az átmérő L végpontján keresztül húzott érintő az X-tengellyel befog. Ebből azt következtetjük, hogy a parabola mindazon húrjai, melyeket egyazon átmérő felez, az ennek végpontjához húzott érintővel párhuzamosak.

Az X-tengelyre merőlegesen húzott húrokra nézve:

$$k = \frac{p}{y'} = \infty, \text{ tehát } y' = o,$$

azaz ekkor az átmérő a parabola tengelyével összeesik. Ez utóbbin kívül nincs más átmérő, mely a megfelelő húrrendszerrel derékszöget alkotván, azt felezné.

86. §. A másodrendű vonalak egyenletei társátmérőikre vonatkozólag.

I. *Az ellipszis és hiperbola.* Eddigelé az ellipszis tulajdonságait azon egyenletből fejtegettük, mely a nevezett görbe *tengelyeire* vonatkozik s így szól:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \quad (1)$$

Ha sikerülne az ellipszist oly *ferdeszögű* rendszerre vonatkoztatni, melyre nézve egyenlete a föntebbi (1) alakot megtartaná, t. i. az állandó tagon kívül a két változónak csupán másodhatványait foglalná magában, akkor kétségen kívül az új tengelyek az ellipszis társátmérőit képviselnék; mert a föltételezett esetben x bármely értékének két egyenlő értékű, ellenkező jelű y felelne meg és viszont;

már pedig az olyan egyenes vonalpár, melyből az egyik a másikkal párhuzamos húrokat felezi, két társátmérőt képvisel.

Eszerint az ellipszisnek az átmérőkre vonatkozó egyenletét úgy találjuk meg, ha a derékszögü rendszerről oly ferdére térünk át, melyre vonatkozólag az ellipszis egyenletének föntebbi alakja változatlan marad.

Hogy a derékszögü rendszerről *ferdeszögüre* térjünk át, következő átalakító képleteket alkalmazzuk:

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta \quad \text{és} \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

Helyettesítve ez értékeket az (1) számú egyenletbe:

$$\begin{array}{l|l|l|l} a^2 . \sin^2\beta & y'^2 + 2a^2 . \sin\alpha \sin\beta & x'y' + a^2 . \sin^2\alpha & x'^2 = a^2b^2 \\ + b^2 . \cos^2\beta & \quad + 2b^2 . \cos\alpha \cos\beta & \quad + b^2 . \cos^2\alpha & \qquad (2) \end{array}$$

Hogy ezen egyenlet az (1)-hez hasonló alakú legyen kell, hogy:

$$a^2 . \sin\alpha . \sin\beta + b^2 . \cos\alpha . \cos\beta = o. \qquad (3)$$

ekkor:

$$(a^2 . \sin^2\beta + b^2 . \cos^2\beta)\, y'^2 + (a^2 . \sin^2\alpha + b^2 . \cos^2\alpha)\, x'^2 = a^2b^2, \qquad (4)$$

az utóbbi egyenlet alakja az (1)-ével megegyezik. Minthogy α és β értékei csak *egy* föltételnek, t. i. a (3) egyenletnek vannak alávetve, két mennyiség meghatározására pedig egy egyenlet nem elegendő: látnivaló, hogy *számtalan* olyan ferdeszögü rendszer gondolható, melyre vonatkozólag az ellipszis egyenlete az (1)-hez hasonló alakú. Ezt még világosabban látjuk, ha a (3) számú egyenletet $\cos\alpha \cos\beta$-val elosztjuk, ekkor t. i. azt találjuk, hogy:

$$tg\,\alpha . tg\,\beta = -\frac{b^2}{a^2}, \qquad (5)$$

minthogy pedig a tangens $-\infty$-től kezdve $+\infty$-ig bármely értékü lehet, minden $tg\,\alpha$-nak megfelel egy reális értékü $tg\,\beta$; következőleg *számtalan* ferdeszögü rendszer van, mely a kivánt tulajdonsággal bír. Minthogy továbbá az új tengelyek az ellipszis társátmérői, ennélfogva az (5) egyenlet azt is mutatja, hogy két egyenes csak úgy lehet az ellipszis társátmérő-párja, ha $tg\,\alpha\, tg\,\beta = -\frac{b^2}{a^2}$, amit már a 85. §-ban is kimutattunk.

Hasonlatosság kedvéért *azon* átmérő hosszát, mely X-tengelyül szolgál, $2a'$-sal, a másik átmérőt, mely Y-tengelyül szolgál, $2b'$-tel jelöljük. A (4) egyenletben y-t o-nak téve, a megfelelö $x = \pm a'$ és ha $x = o$, akkor a hozzátartozó $y = \pm b'$.

Ezt tekintetbe véve, a' és b' számára a (4) számú egyenletből következő értékek származnak:

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}, \tag{6}$$

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}, \tag{7}$$

következőleg:

$$a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = \frac{a^2 b^2}{a'^2} \text{ és } a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta = \frac{a^2 b^2}{b'^2}.$$

Az utóbbi értékeket a (4) egyenletben helyettesítve, az ellipszis keresett egyenlete:

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2.$$

Itt most azt kérdezhetjük, vajjon lehet-e $a' = b'$, azaz van-e az ellipszisnek *egyenlő* társátmérője?

A föntebbi (6) és (7) egyenleteknél fogva a' csak úgy lehet $= b'$-tel, hogyha:

$$a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta.$$

Helyettesítsük $\cos^2 \alpha$-t $(1 - \sin^2 \alpha)$-val és $\cos^2 \beta$-t $(1 - \sin^2 \beta)$-val; ekkor:

$$(a^2 - b^2)(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) = o,$$

de ez csak úgy lehetséges, ha:

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta, \text{ következőleg:}$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta, \text{ és } tg^2 \alpha = tg^2 \beta.$$

Az utóbbi egyenletből:

$$tg\, \beta = \pm tg\, \alpha.$$

Ámde a föntebbi (5) számú egyenletnél fogva $tg\, \alpha$ és $tg\, \beta$ előjelei szükségképpen ellenkezők, tehát:

$$tg\, \beta = - tg\, \alpha.$$

Ezen értéket az (5) számú egyenletbe helyettesítve, lesz:

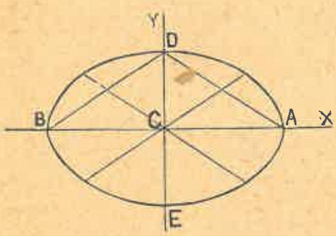
$$tg^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2}, \text{ miből } tg\, \alpha = \pm \frac{b}{a}.$$

A felső előjel az egyik átmérőnek, az alsó a társátmérőnek felel meg. Most, ha $ADBE$ ellipszisben (142. ábra), hol AB és DE egyenesek a tengelyek, AD és BD húrokat vonjuk:

$$tg\, DBX = \frac{b}{a} \text{ és } tg\, DAX = -\frac{b}{a},$$

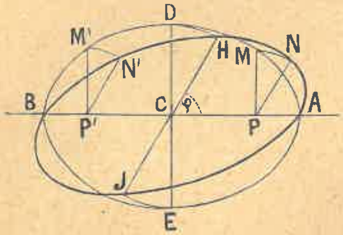
a keresett átmérőpárt tehát úgy találjuk meg, ha a középponton keresztül ezen húrokhoz parallel átmérőket vonunk.

142. ábra.



A föntebb kifejtett egyenlet $(a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2)$ alapján most már az ellipszis egyes pontjait azon esetben is meghatározhatjuk, ha a görbe vonal *két társátmérője* $(2a', 2b')$ *és hajlási szögük* (φ) *ismeretes.*

143. ábra.



Előbb ugyanis oly ellipszist szerkesztünk, melynek derékszögű tengelyei az adott $2a'$ és $2b'$ átmérők. Azaz $AB = 2a'$ átmérőt nagy tengelyül vesszük (143. ábra) és a közepére állított merőleges vonal hosszát egyenlőnek mérjük $2b'$ átmérővel; ezután a már ismert módon megszerkesztjük $ADBE$ ellipszist. Ha most az egyes ordinátákat talppontjuk körül forgatva a meghatározott φ szög alatt meghajtjuk úgy, hogy pl. $NP = MP$ és $APN \sphericalangle = \varphi$, az ekképen talált pontok a keresett ellipszis pontjai. (Miért?)

Egy másik kényelmesebb szerkesztési módot a 72. §. 2. pontjában ismertettünk meg; az ott előadott módszer t. i. nemcsak a derékszögű tengelyekre, hanem a ferdeszögű társátmérőkre is alkalmazható.

Hasonlókép találjuk meg a hiperbola egyenletét is két társátmérőre vonatkozólag. Ezen egyenlet a következő:

$$a'^2y'^2 - b'^2x'^2 = -a'^2b'^2.$$

Itt is a' az egyik, b' a másik félátmérőt jelenti; ám az első átmérő valódi, a második képzetes.

Valamint az ellipszist, úgy a hiperbolát is két társátmérője és az utóbbinak hajlási szöge alapján könnyen megszerkeszthetjük.

Ezen átmérőket t. i. tengelyekül választva és derékszögben összeillesztve az ismert módon hiperbolát szerkesztünk és az egyes ordinátákat talppontjuk körül forgatva az adott szög alatt meghajtjuk stb. (Lásd az ellipszist és a 73. §. 10. pontjában érintett szerkesztést, mely itt is alkalmazható.)

A társátmérők tulajdonságai közül legfontosabb e kettő:

1. *Az ellipszis két társátmérőjéből, mint oldalokból, szerkesztett parallelogramma területe akkora, mint a két tengely alkotta derékszögű négyszögé.*

Ugyanis szorozzuk a (6) egyenletet a (7)-kel, lesz:

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^4 sin^2\alpha sin^2\beta + b^4 cos^2\alpha cos^2\beta + a^2b^2(sin^2\beta cos^2\alpha + sin^2\alpha cos^2\beta)}.$$

Ámde α és β közt az előbbiek szerint (3) a következő egyenlet áll fenn:

$$a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta = o:$$

ebből négyzetelés után:

$$a^4 \sin^2\alpha \sin^2\beta + b^4 \cos^2\alpha \cos^2\beta = -2a^2b^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta.$$

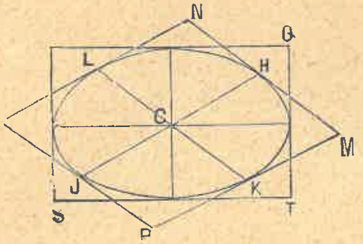
Helyettesítve ez értéket $a'^2b'^2$ szorzatban lesz:

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^2b^2(\sin^2\beta . \cos^2\alpha + \sin^2\alpha . \cos^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta)}$$

$$a'^2b'^2 = \frac{a^2b^2}{(\sin\beta \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta)^2} = \frac{a^2b^2}{\sin^2(\beta - \alpha)};$$

következőleg: $\quad a'b' . \sin(\beta - \alpha) = ab.$

(144. ábra.)



Ámde $\beta - \alpha$ nem egyéb, mint a két társátmérö befogta szög: eszerint: $a'b' . \sin(\beta - \alpha)$ a féltársátmérőkből szerkesztett parallelogramma területét fejezi ki és ez, mint látjuk, állandó értékű és annyi, mint a két féltengely alkotta derékszögű négyszög (144. ábra), tehát:

$$MNOP = QRST.$$

Ugyanezen tétel a hiperbolára is áll.

2. *Az ellipszis két társátmérője négyzetének összege annyi, mint a két tengely négyzeteinek összege.*

Térjünk vissza a (3), (6) és (7) számú egyenletekre, ezek szerint:

$$a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta = o \qquad (3)$$

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha} \qquad (6)$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}. \qquad (7)$$

Küszöböljük ki ezekből α és β szöget. Evégből a (6) és (7) egyenletben először a cosinust a sinussal és másodszor a sinust a cosinussal fogjuk kifejezni ezen ismert főképlet alapján: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; ekkor:

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2 - b^2)\sin^2\alpha + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\alpha},$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2 - b^2)\sin^2\beta + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\beta},$$

és ezekből:

$$\sin^2\alpha = \frac{b^2(a^2 - a'^2)}{a'^2(a^2 - b^2)}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{a^2(a'^2 - b^2)}{a'^2(a^2 - b^2)}$$

$$\sin^2\beta = \frac{b^2(a^2 - b'^2)}{b'^2(a^2 - b^2)}, \qquad \cos^2\beta = \frac{a^2(b'^2 - b^2)}{b'^2(a^2 - b^2)}.$$

Most a (2) számú egyenlet második tagját a jobb oldalra áttesszük és négyzetelünk, lesz:

$$a^4 \sin^2\alpha \sin^2\beta = b^4 \cos^2\alpha \cos^2\beta.$$

Helyettesítve a szögfüggvények értékeit és kellően rövidítve:

$$(a^2 - a'^2)(a^2 - b'^2) = (a'^2 - b^2)(b'^2 - b^2), \text{ vagy:}$$

$$a^4 - a^2a'^2 - a^2b'^2 = - a'^2b^2 - b'^2b^2 + b^4$$

$$a^4 - b^4 = a'^2(a^2 - b^2) + b'^2(a^2 - b^2)$$

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

amit bebizonyítani kellett.

Megjegyzendő, hogy *e tétel megfordítva nem áll.* Azaz ha a' és b' az ellipszis két félátmérője, a és b ugyanannak fél tengelyei és

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

nem következik, hogy az a' és b' átmérők társátmérők is. (Miért nem?)

A hiperbolára nézve ellenben: *két összetartozó átmérő négyzeteinek különbsége annyi, mint a két tengely négyzeteinek különbsége.* Ebből azt következtetjük, hogy a közönséges hiperbola társátmérői soha sem lehetnek egyenlők. Ellenben az egyenlőoldalú hiperbolánál minden átmérő a maga társátmérőjével egyenlő.

II. *A parabola.* Keressünk oly *ferdeszögű* rendszert, melyre vonatkozólag a parabola egyenlete olyan alakú, mint a csúcsponti egyenlet:

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Evégből a derékszögü rendszerről ferdeszögüre térünk át a következő átalakító képletek segítségével.

$$x = m + x' \cos\alpha + y' \cos\beta \text{ és } y = n + x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

Helyettesítvén ez értéket a csúcsponti egyenletbe, lesz:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \sin^2\beta\, y'^2 + \sin^2\alpha\, x'^2 + 2\sin\alpha\sin\beta.\, x'y' & & \\ +2n\sin\beta & y' + 2n\sin\alpha & x' + n^2 \\ -2p\cos\beta & -2p\cos\alpha & -2mp \end{array}\right\} = o. \tag{2}$$

Az utóbbi egyenlet csak akkor fog alakra nézve az (1)-vel megegyezni, ha:

$$\sin\alpha = o,\ n\sin\beta - p\cos\beta = o, \text{ és } n^2 - 2mp = o \tag{3}$$

Ekkor t. i.

$$\sin^2\beta\, y'^2 = 2px'. \tag{4}$$

Minthogy α, β, m és n csak három föltételnek tartoznak megfelelni, világos, hogy számtalan oly ferdeszögü rendszer van, melyre vonatkozólag a parabola egyenletének a kivánt alakja van.

Az elsö feltétel $\sin\alpha = o$ azt mutatja, hogy az új X-tengely a régivel párhuzamos és ennélfogva a parabolának egyik átmérője. A harmadik egyenlet: $n^2 - mp = o$ meg azt bizonyítja, hogy az új kezdőpont is pontja a parabolának; mert $n^2 = mp$.

A második föltétel, melynélfogva $n\sin\beta - p\cos\beta = o$,

$$\text{következöleg } tg\,\beta = \frac{p}{n},$$

azt bizonyítja, hogy az új Y-tengely a parabolát érinti.

A (4) egyenlet szerint:

$$y'^2 = \frac{2p}{\sin^2\beta}\, x',$$

és ha rövidség okáért $\dfrac{p}{\sin^2\beta} = p'$, a parabola egyenlete az átmérőkre vonatkozólag ily alakú:

$$y'^2 = 2p'x'.$$

Hasonlatosság kedvéért $2p'$-t az illető átmérő gyujtóponti húrjának (paraméter) nevezzük.

Minthogy $p' = \frac{p}{sin^2 \beta}$, továbbá $tg\, \beta = \frac{p}{n}$, és $n^2 = 2\,mp$, és ennek következtében:

$$sin^2 \beta = \frac{1}{1 + cotg^2 \beta} = \frac{p^2}{n^2 + p^2} = \frac{p^2}{2\,mp + p^2} = \frac{p}{2\,m + p},$$

tehát:

$$p' = 2\,m + p,$$

és:

$$2\,p' = 4\left(m + \frac{p}{2}\right).$$

Ámde $m + \frac{p}{2}$ nem egyéb, mint az új kezdőpontnak a gyujtóponttól való távolsága (miért?); ennélfogva az átmérő paramétere négyszer akkora, mint az átmérő végpontjának a gyujtóponttól való távolsága.

Az imént kifejtett egyenlet $y'^2 = 2p'x'$ alapján a parabolát azon esetben is megszerkeszthetjük, ha egyik átmérője, továbbá az utóbbinak metszőpontja, (hol a görbe vonalat átszeli), a paraméter ($2p'$), és végül az átmérő felezte húrok hajlási szöge ismeretes. Evégből ugyanis az átmérőt tengelyül, metszőpontját csúcspontul tekintve, az adott paraméterrel ($2p'$) ismeretes módon parabolát szerkesztünk és ezután az egyes ordinátákat talp-pontjaik körül forgatva az adott szög alatt meghajtjuk, anélkül azonban, hogy hosszuságukat megváltoztatnók.

Sokkal kényelmesebb a 79. §-ban elöadott módszer (lásd a 137. ábrát), mely a föltételezett ferde rendszerre nézve is érvényes. (Miért?)

87. §. A hiperbola egyenlete a közelitő egyenesekre vonatkoztatva.

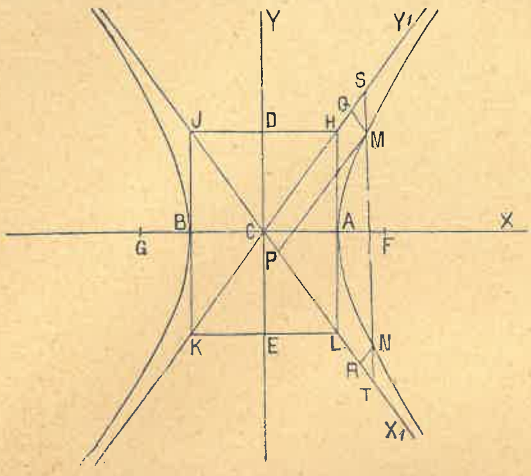
A hiperbola valamennyi egyenlete között legegyszerübb a közelitő egyenesekre (végérintő) vonatkozó. Hogy ezt meghatározzuk, CX_1 közelítőt X-tengelyül, (145. ábra) CY_1-et Y-tengelyül választjuk és a hiperbola középponti egyenletében x helyébe $x' \cos \alpha + y' \cos \beta$-t, y helyébe $x' \sin \alpha + y \sin \beta$-t teszünk, lesz:

$$(a^2 sin^2 \beta - b^2 cos^2 \beta)\, y'^2 + 2\,(a^2 sin\, \alpha\, sin\, \beta - b^2 cos\, \alpha\, cos\, \beta)\, x'\, y'$$
$$+ (a^2 sin^2 \alpha - b^2 cos^2 \alpha)\, x'^2 = -\, a^2 b^2.$$

Itt azonban α és β szögeknek határozott értékük van: ugyanis:

$$tg\, \alpha = -\frac{b}{a} \text{ és } tg\, \beta = +\frac{a}{b};$$

145. ábra.



tehát a szögmértan ismeretes képletei nyomán:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ és:}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

következőleg:

$$a^2 \sin^2\beta - b^2\cos^2\beta = o$$

$$a^2 \sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha = o$$

$$a^2 \sin\alpha \sin\beta - b^2 \cos\alpha \cos\beta = -\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2};$$

és a keresett egyenlet:

$$xy = \frac{a^2+b^2}{4}, \text{ vagy rövidebben: } xy = e^2.$$

Látni ebből, hogy x növekedtével y értéke csökken, viszont mentől inkább nagyobbodik y, annál jobban csökken x értéke; amint a közelítők ismeretes tulajdonsága megkivánja.

Továbbá húzzuk meg a hiperbola M pontjának két koordinátáját, MP-t, azaz y-t $\parallel CY_1$-gyel és MQ-t, azaz x-et $\parallel CX_1$-gyel; és jelöljük a közelítőktől bezárt szöget ($X_1 CY_1$-et) φ-vel, akkor a két koordináta és a közelítők által befogott parallelogramma területe:

$$MPCQ = xy \sin\varphi, \text{ ámde } xy = \frac{a^2+b^2}{4}, \text{ tehát:}$$

$$MPCQ = \frac{a^2+b^2}{4} \sin\varphi,$$

azaz, a hiperbola bármely pontjának koordinátái és az azokkal párhuzamos közelítők által befogott parallelogramma területe állandó mennyiség.

Minthogy továbbá $X_1 C Y_1 \sphericalangle = \varphi = 2\beta$, tehát $sin\ \varphi = sin\ 2\beta = 2\, sin\ \beta\ cos\ \beta = 2 \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}$ (lásd $sin\ \beta$ és $cos\ \beta$ föntebbi értékeit), ennélfogva:

$$\frac{a^2+b^2}{4}\, sin\ \varphi = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{2\,ab}{4} = \frac{ab}{2},$$

azaz, a föntebbi állandó mennyiség $\left(\frac{a^2+b^2}{4}\, sin\ \varphi\right)$ egyszersmind a *hiperbola két féltengelyéből alkotott derékszögű négyszögnek fél területe*, s így $MPCQ = \frac{1}{2}\, ACDH$.

88. §. A másodrendű vonalak összehasonlítása.

Ecélra legalkalmasabbak a csúcs- és a sarkponti egyenletek.

1. Az ellipszis csúcsponti egyenlete $y^2 = 2\,px - \frac{px^2}{a}$

a hiperbola « « $y^2 = 2\,px + \frac{px^2}{a}$

a parabolá « « $y^2 = 2\,px$.

Látni ezekből, hogy a parabola pontjaira nézve az y koordináta négyzete *épen akkora*, mint a megfelelő x-ből és a góc-húrból alkotott derékszögű négyszög; az ellipszisnél már az ordináta négyzete *kisebb*, a hiperbolánál ellenben *nagyobb* a mondott négyszögnél. Innen származtak a másodrendű vonalak görög nevezetei. Ugyanis *parabola* egyenlőséget, *ellipszis* hiányt, *hiperbola* fölösleget jelent. A *parabola* tehát átmenetül szolgál az ellipszis és *hiperbola* között.

Egyszersmind látnivaló, hogy az ellipszis és *hiperbola* ordinátájának négyzete annál kevésbbé különbözik $2px$ négyszögtől, a minél nagyobb a főtengely ($2a$); mert annál kisebb lesz $px^2 : a$ hányados értéke, elannyira, hogy, ha a végtelenül növekszik, a nevezett tört értéke o-hoz közeledik. Ennélfogva az ellipszis és a hiperbola a parabolát annál jobban megközelíti, minél hosszabb az a tengely, föltéve természetesen, hogy a góc-húr ($2p$) változatlan marad.

Végül mind a három görbe vonalat ezen egy egyenlet: $y^2 = 2px + qx^2$ képviselheti. Az ellipszisre nézve q negativ, a parabolára nézve $q = o$, a hiperbolára vonatkozólag q pozitiv mennyiség.

2. Vessük össze még a sarkponti egyenleteket.

Az ellipszis sarkegyenlete: $\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon \cos \omega}$,

a parabola « $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos \omega}$,

a hiperbola « $\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon \cos \omega}$,

itt az ellipszisre nézve $\varepsilon < 1$-nél, ellenben a hiperbolára nézve $\varepsilon > 1$-nél.

Eszerint mind a három görbét ezen egy sarkegyenlet:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \omega}$$

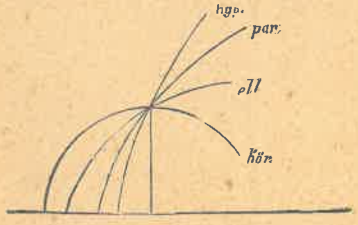
képviselheti, azon megjegyzéssel, hogy a körre nézve $\varepsilon = o$, az ellipszisre nézve $\varepsilon < 1$-nél, a parabolát illetőleg $\varepsilon = 1$ és a hiperbolára $\varepsilon > 1$-nél.

Föntebb a sarkszöget jobbról balfelé fordulva számítottuk, azonban gyakran az ellenkező irányban, t. i. balról jobbfelé számítják. Minthogy $\cos (180^0 - \omega) = - \cos \omega$, tehát az utóbbi esetre nézve a sarkegyenlet így hangzik:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \omega}.$$

Most, ha egyazon gyujtópontból ugyanazon paraméterrel *kört, ellipszist, parabolát és hiperbolát* szerkesztünk és e görbék menetét az utóbbi egyenlet alapján szemügyre vesszük: azt látjuk, hogy mindaddig, míg $\omega < 90^0$-nál, ρ értéke annálinkább nagyobbodik, minél kisebb ε; azaz a *körvonal* pontjainak hosszabb vezérsugaruk van, mint az *ellipszis* megfelelö pontjainak, ezeknek ismét hosszabb vezérsugár felel meg, mint a *parabola* illető pontjainak; az utóbbiaknak végül hosszabb, mint a *hiperbola* pontjainak, más szóval 0^0 és 90^0 közt a körvonal tér el leginkább a gyujtóponttól, az ellipszis már kevésbbé, a parabola még kevésbbé, a hiperbola legkevésbbé.

146. ábra.



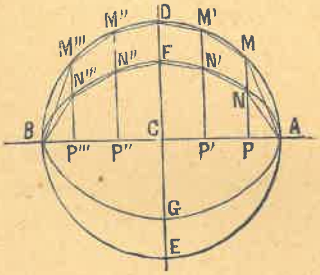
Ha $\omega = 90^0$, a vezérsugár mind a négy görbére nézve $= p$, azaz a gyujtópont fölött mind a négy vonal a közös G pontban találkozik. De, ha ω-nak értéke 90^0 és 180^0 közé esik, $\cos \omega$ negatívvá válik és most már ρ annál nagyobb, minél nagyobb ε, következöleg az említett közös ponton túl a *kör*vonal lesz az, mely legkevésbbé tér el a gyujtóponttól, az ellipszis már jobban, a parabola még jobban, a hiperbola leginkább; amint a 146. ábra is mutatja.

89. §. Az ellipszis és parabola négyszögesítése.

Valamely görbe vonal *négyszögesítésén* azon síklap *területmérését* értjük, melyet ama görbe vonal más egyenes vonalakkal együtt bekerít. Zárt görbe vonalaknál a négyszögesítés az egész vonal befoglalta területre vonatkozhatik.

1. *Az ellipszis négyszögesítése.* Az ellipszis tengelyeit szokás szerint $2a$ és $2b$-vel jelölve, szerkesszünk a nagyobbik tengely (mint átmérö) körül körvonalat, és nevezzük a szokásos derékszögü rendszerre vonatkozólag az ellipszis és kör ugyanazon x-hez tartozó ordinátáját megfelelöleg y- és Y-nak. Ekkor tudomás szerint (67. §. 1. p.):

147. ábra.



$$y : Y = b : a.$$

És ez egyszersmind kifejezi az ellipszis és a kör területének az arányát is, amint azonnal látni fogjuk.

Ugyanis irjunk a körbe valamely sokszöget, pl. $AMM'DM''$ . . .-t (147. ábra); minden szögpontból húzzuk meg AB tengelyre az illetö ordinátát; azon pontokat pedig, hol e vonalak az *ellipszist* metszik, szintén kössük össze sorban egyenesekkel. Eképpen az ellipszisbe írt $ANN'FN''$ . . . sokszög keletkezik. Egyúttal úgy az ellipszis, mint a kör lapjait trapézekre osztottuk.

Az ellipszis egyik ilyen részének, pl. $PNN'P'$-nek területe:

$$\frac{PN + P'N'}{2} . PP'$$

és a körlap megfelelö $PMM'P'$ részének területe:

$$\frac{PM + P'M'}{2} . PP'.$$

Ezen trapéz-pár területei tehát úgy aránylanak egymáshoz, mint

$$(PN + P'N') : (PM + P'M').$$

Ámde a föntebbi tétel alapján:

$$\begin{array}{l} PN : PM = b : a \\ P'N' : P'M' = b : a \\ \hline (PN + P'N') : (PM + P'M') = b : a \end{array}$$

azaz két összetartozó trapéz területe úgy aránylik egymáshoz, mint $b : a$. Ha tehát az ellipszis trapézeit sorban $t_1, t_2, t_3 \ldots$ a körlap megfelelö részeit $T_1, T_2, T_3, \ldots$ betükkel jelöljük, akkor:

$$\begin{array}{l} t_1 : T_1 = b : a \\ t_2 : T_2 = b : a \\ t_3 : T_3 = b : a \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

következésképen $(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots) : (T_1 + T_2 + T_3 + \cdots) = b : a$

Azaz az ellipszisbe és a körbe írt sokszögek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint $b : a$. Ezen aránypár helyes volta sem a trapézek számától, sem azok nagyságától nem függ; másrészt a beírt sokszögek kerületei annál közelebb símulnak az illető görbe vonalhoz, minél inkább szaporítjuk oldalaik számát; ennélfogva joggal következtetjük, hogy:

az ellipszis területe úgy aránylik a nagy tengelye körül szerkesztett köréhez, mint a kis tengely hossza a nagy tengelyéhez:

$$E : C = b : a.$$

És mert a körlap területe: $C = \pi . a^2$; tehát:

$$E = \pi . ab.$$

Azaz: *az ellipszis területe akkora körlap területével ér föl, melynek sugara az ellipszis két tengelyének mértani középarányosa.*

Ha az ellipszis két társátmérőjét $2a'$-, $2b'$-vel és hajlásuk szögét φ-vel jelöljük, akkor:

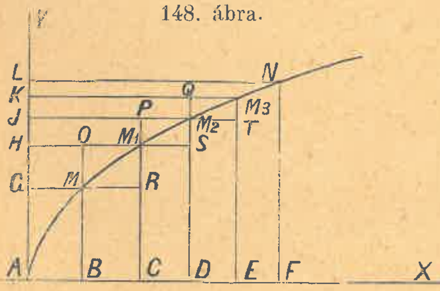
$$ab = a'b' . \sin\varphi,$$

következésképpen az ellipszis területe így is kiszámítható:

$$E = \pi . a'b' . \sin\varphi.$$

2. *A parabola négyszögesítése.* Keressük a parabola AN íve, AX tengelye és NF ordinátája által bekerített laprész területét.

148. ábra.



AN íven válasszunk néhány pontot és húzzuk meg mindegyikből az illető koordinátákat. Rövidség okáért legyen (148. ábra):

$$AB = x,\ MB = y\ ;$$
$$AC = x_1, M_1C = y_1\ ;$$
$$AD = x_2, M_2D = y_2\ ;\ \text{stb.}$$

$OBCM_1$ derékszögü négyszög területe:

$$u = M_1C \times BC = y_1(x_1 - x),$$

és $RGHM_1$ derékszögü négyszög területe:

$$v = GR \times RM_1 = x_1 (y_1 - y).$$

Eszerint a nevezett idomok területeinek aránya:

$$u : v = y_1 (x_1 - x) : x_1 (y_1 - y).$$

Minthogy azonban M és M_1 a parabola pontjai:

$y^2 = 2px$, és $y_1^2 = 2px_1$, következöleg:

$x_1 - x = \frac{y_1^2 - y^2}{2p}$, és $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$; ennek következtében:

$$u : v = \frac{y_1 (y_1^2 - y^2)}{2p} : \frac{y_1^2 (y_1 - y)}{2p},$$

kellö rövidítés után hányados alakjában írva:

$$\frac{u}{v} = 1 + \frac{y}{y_1}.$$

Ugyanez áll $PCDM_2$ vagy u_1 és a megfelelö $SHJM_2$, vagyis v_1 parallelogrammákról:

$$\frac{u_1}{v_1} = 1 + \frac{y_1}{y_2}.$$

Szintúgy folytatólag:

$$\frac{u_2}{v_2} = 1 + \frac{y_2}{y_3}.$$

stb.

Eddigelé az M, M_1, M_2 .... pontokat tetszölegesen tüztük ki; módunkban áll azonban azokat akkép választani, hogy megfelelö y-jaik mértani haladvány szerint sorakozzanak, azaz úgy, hogy:

$$\frac{y}{y_1} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4} \ldots . = \omega \text{ (valódi törtszám).}$$

Ekkor azután:

$$\frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = \ldots = 1 + \omega.$$

következöleg $$\frac{u + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots}{v + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots} = 1 + \omega.$$

Minél kisebbre szabjuk ω törtszám értékét, annál távolabb esnek az M pontok egymástól; ellenben minél inkább közeledik ω értéke az egységhez, annál jobban közelednek ama pontok is egymáshoz, és ezzel kapcsolatosan OM_1RM, PM_2SM_1, QM_3TM_2 stb. négyszögek és velök együtt MRM_1, M_1SM_2, M_2TM_3 stb. háromszögek is annál gyorsabban fogynak, minek következtében az u-val jelölt négyszögek összege $u + u_1 + u_2 + \ldots$ is annál szorosabban megközelíti az ábra $MBFN$ részének területét, melyet a parabola MN íve, a két szélsö ordináta és a tengely bekerítenek; egyúttal a v-vel jelzett négyszögek összege:

$v+v_1+v_2+\ldots$ is annál inkább eléri az $MGLN$ lapprészt, mely a parabola MN íve, továbbá GL és LN egyenes vonalak és az Y-tengely közé esik.

Szóval, midőn ω törtszám határértéke: 1,

$(u+u_1+u_2+\ldots)$ összeg határértéke $MBFN$

$(v+v_1+v_2+\ldots)$ « « $MGLN$

következéskép:

$$\frac{MBFN}{MGLN}=2.$$

Azaz $MBFN$ terület kétszer akkora, mint $MGLN$.

Hasonlókép: $AFN=2.\ ALN$.

És mert: $AFN+ALN=AF.NF$.

tehát: $2.\ ALN+ALN$, vagyis $3ALN=AF.\ NF$,

és: $ALN=\frac{1}{3}AF.\ NF$, következőleg:

$$AFN\,\text{szelet}=\tfrac{2}{3}AF.\ NF,$$

vagy, ha N pont koordinátáit $x'y'$-al jelöljük, rövidebben:

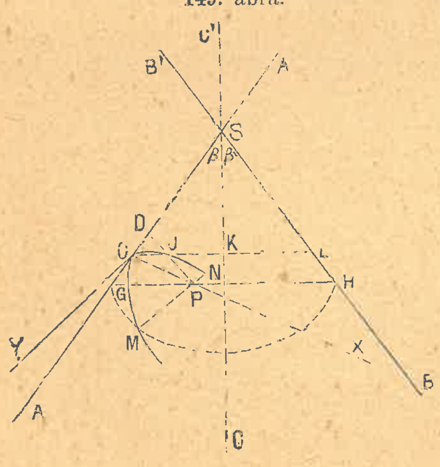
$$AFN\,\text{szelet}=\tfrac{2}{3}\,x'y',$$

Azaz: *a parabola íve és a végpontjának koordinátái közé foglalt területrész az ugyane koordinátákból alkotott derékszögű négyszögek két harmadával egyenlő.*

90. §. A másodrendű vonalaknak a kúp- és hengermetszetekkel való azonossága.

A *kúpmetszetekről.* Az ó-kor matematikusai a másodrendű vonalakat *kúpmetszeteknek* nevezték; ők t. i. e vonalakat a körkúpnak síklappal való átmetszéséből származtatták. Vizsgáljuk meg tehát, miféle vonalak a kúpmetszetek?

149. ábra.



Egyszerűség kedvéért *közönséges* kör-kúpot választunk, és ezt tengelyéhez ferde irányban valamely síkkal átszeljük. — Legyen MON (149. ábra) a metszet egyik része.

Vezessünk a kúp SC tengelyén keresztül a metszet síkjára merőleges síkot; ezen tengelymetszet a kúplapot két SA és SB alkotó hosszában, a metszet síkját pedig OX irányban szeli. OX-et X-tengelyül, O-t kezdőpontúl és az OX-re (a kúp metszet síkjában) húzott merőlegest Y-tengelyül választjuk. A kúpmetszet tetszés szerint vett M pontjából MP ordinátát vonván, legyen $OP = x$, $MP = y$, és keressük e két koordináta arányát.

Evégett P ponton keresztül a kúp tengelyére GH merőlegest húzzuk, és az utóbbin meg MP ordinátán keresztül GHM síkot fektetjük. E sík SC tengelyhez merőleges helyzetű; tehát a kúpot körben metszi, amelynek átmérője: GH.

Hogy SC tengely $\perp$ GMH síkhoz, kitünik a következőkből. MON sík a szerkesztésnél fogva merőleges ASC síkra; ennek folytán MP egyenes, melyet MON síkban OX metszőegyenesre merőlegesen húztunk, szintén merőleges ASC síkra, következőleg az MP-n átvonuló GMH síklap is ASC-vel derék-lapszöget alkot, de az ASC síkban fekvő SC a szerkesztésnél fogva merőleges GH metsző vonalra, tehát SC tengely MGH síkra is merőleges.

A mondottaknál fogva MP és GH merőlegesek lévén:

$$y^2 = GP.PH.$$

Jelöljük SO távolságot d-vel, SOX szöget α-val és ASB szöget 2β-val. Nyilvánvaló, hogy a szóban forgó görbe vonal alakja és méretei az imént elősorolt mennyiségektől függenek; ezért oda kell törekednünk, hogy GP-t és PH-t x, y és az említett mennyiségek függvényekép kifejezzük.

E célból legyen $PD \parallel SB$-vel, és $OKL \perp SC$ tengelyre.

POG háromszögben:

$$GP : x = \sin\alpha : \cos\beta,$$

miből:

$$GP = \frac{x \sin\alpha}{\cos\beta}.$$

PH-t illetőleg megjegyzendő, hogy:

$$PH = JL = 2\,OK - OJ.$$

Azonban:

$$OK = d.\sin\beta;$$

továbbá OPJ háromszögben:

$$OJ : x = \sin OPD : \sin OJP;$$

és mert:

$$OPD\sphericalangle = 180^0 - (POD\sphericalangle + ODP\sphericalangle) = 180^0 - (\alpha + 2\beta),$$

és

$$\sin OJP = \sin OLS = \cos\beta;$$

tehát:

$$OJ : x = \sin(\alpha + 2\beta) : \cos\beta \text{ és:}$$

$$OJ = \frac{x.\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos\beta},$$

következéskép:

$$PH = 2d \sin\beta - \frac{x \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos\beta},$$

végül:

$$(1)\; y^2 = \frac{2d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta} x - \frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta} x^2.$$

A kúpmetszetek tehát csakugyan másodrendü vonalak.

Az utóbbi egyenletet a másodrendü vonalak általános csúcsponti egyenletével:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

összevetve, azt látjuk, hogy a kúpmetszet egyenlete ellipszist, parabolát, vagy hiperbolát jelent aszerint, amint:

$\frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta}$ együttható $>$, vagy $=$, vagy $<$ o-nál.

Minthogy $\sin\alpha$ mindig pozitivnak tekinthető (mert elegendő, ha α-t o^0-tól 180^0-ig növesztjük), továbbá $\cos^2\beta$ okvetlenül pozitiv, ennélfogva a föntebbi együttható előjele csak $\sin(\alpha + 2\beta)$-tól függ.

Már most gondolatban a kúpmetszet *(MON)* síkját OY egyenes körül forgatjuk.

1. Először OX egyenes OS irányába esik; ekkor $\alpha = o$, és a kúpmetszet egyenlete $y = o$; azaz a sík a kúpot az X-tengely mentében érinti.

2. Az α szög növekedtével, $\overline{OX}$ az AS és BS alkotó vonalakat S ponton *alúl* metszi; ekkor $\alpha + 2\beta < 180^0$-nál, tehát:

$\sin(\alpha + 2\beta)$ pozitiv, ennélfogva a kúpmetszet *ellipszis.*

Ha $OX \perp SC$-re, azaz, ha a metsző sík merőlegesen áll a kúp tengelyén, akkor $\alpha + \beta = 90^0$, és a kúpmetszet egyenlete ily alakot nyer: $y^2 = 2d.\sin\beta.x - x^2$; minthogy $d.\sin\beta = OK = r$, tehát:

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

és ez a kör egyenlete.

3. MON síkot tovább forgatva, OX végre SB-vel párhuzamos helyzetbe jut, amikor $\alpha + 2\beta = 180^0$, tehát $\sin(\alpha + 2\beta) = o$, és a kúp metszete: *parabola.*

4. α-t még inkább növesztvén, OX az SB-t már nem alul, hanem S ponton *felül* metszi, azaz a metszősík nemcsak ASB kúpot, hanem a hozzá tartozó $A'S'B'$ *ellenkúpot* is átvágja. Ez esetben $\alpha + 2\beta$ nagyobb lévén 180^0-nál, $\sin(\alpha + 2\beta)$ negativ, tehát a kúpmetszet hiperbola alakú, és egyik ága az eredeti kúplapon *(ASB-n)*, másik ága az ellenkúpon *($A'S'B'$-n)* fekszik.

5. Ha $\alpha = 180^0$, OX ismét egybeesik AO-val; és az 1. eset ismétlődik.

6. Még tovább forgatva MON síkot, OX ismét a föntebb elősorolt helyzetekbe jut; ezért elegendő α-t o^0-tót 180^0-ig növeszteni.

7. Végül ha O pont S csúcsra esik, vagyis $d = o$, a kúpmetszet egyenlete:

$$(2) \qquad y^2 = -\frac{sin\,\alpha . sin(\alpha + 2\beta)\,x^2}{cos^2\,\beta},$$

Itt ismét a föntebbi esetek állhatnak elö. T. i.

a) $\alpha + 2\beta < 180^0$; ekkor $sin\ (\alpha + 2\beta)$ pozitiv lévén, a (2) egyenlet csak úgy állhat meg, ha $x = o$, és $y = o$; ezek azonban a kezdőpont koordinátái; az utóbbi pont csakugyan az ellipszis egyik változata.

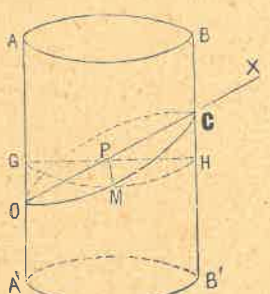
b) $\alpha + 2\beta = 180^0$; ekkor $sin\ (\alpha + 2\beta) = o$, és a kúpmetszet egyenlete: $y = o$, ez pedig egy egyenes vonalnak (az X-tengelynek) egyenlete, mely a parabola egyik változata.

c) $\alpha + 2\beta > 180^0$; ekkor $sin\ (\alpha + 2\beta)$ negativ, következőleg x^2 együtthatója pozitiv és a kúpmetszet egyenlete ily alakú: $y^2 = Ax^2$, vagy $y = \pm Ax$; ez pedig két egymást átmetszö egyenes egyenlete, melyek a kezdőponton átmennek és a *hiperbola* egyik változatát alkotják.

A mondottakat összefoglalva: *a kúpmetszet általános egyenlete jelenthet: 1. ellipszist, kört és pontot; 2. parabolát és egyenes vonalat: 3. hiperbolát és két* — egymást átmetszö — *egyenest.*

A hengermetszetekről. A hengermetszetének egyenletét hasonlólag származtatjuk, mint a kúp metszetét.

150. ábra.



Legyen $ABA'B'$ (150. ábra) valamely körhenger és OMC a metszete. M pont koordinátáit x, y-nal jelölvén, itt is:

$$y^2 = \overline{GP}.\overline{PH}.$$

Nevezzük ismét AOX-szöget α-nak, a hengeralap átmérőjét $2r$-nek, ekkor: $GP = x\ sin\ \alpha$ és $PH = 2r - x . sin\ \alpha$, tehát:

$$3) \qquad y^2 = 2r . sin\,\alpha . x - sin^2\,\alpha . x^2.$$

Minthogy ezen egyenletben x^2 együtthatója ($sin^2\,\alpha$) szükségkép pozitiv, *a henger metszete csak ellipszis* (illetőleg kör) *lehet.* Összehasonlítva ez egyenletet az ellipszis csúcsponti egyenletével:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

azt látjuk, hogy:

$$\sin\alpha = \frac{b}{a}, \text{ és } \frac{r}{\sin\alpha} = a, \text{ tehát:}$$

$$b = a.\sin\alpha = r,$$

azaz a henger átmetszéséből származott ellipszisek kis tengelye állandóan egyenlő a henger félátmérőjével.

A hengermetszet föntebbi egyenlete a kúpmetszet egyenletéből is leszármaztatható, ha t. i. az utóbbiban d-t (azaz OS-t) OK és β függvényekép fejezzük ki.

Legyen $OK = r$, akkor $d = \frac{r}{\sin\beta}$ és a kúpmetszet egyenlete:

$$y^2 = \frac{2r.\sin\alpha}{\cos\beta}x - \frac{\sin\alpha.\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos\beta}x^2.$$

Föltéve most, hogy $\beta = o$, SA és SB alkotó vonalak párhuzamosakká válnak, azaz a kúp hengerré lesz, s az utóbbi egyenlet ily alakot nyer: $y^2 = 2r.\sin\alpha.x - \sin^2\alpha.x^2$, és ez a föntebbivel (3) azonos.

Továbbá könnyü volna kimutatni, ha a hengerlapot egyik alkotó vonalának irányában szeljük, két párhuzamos metsző egyenes keletkezik, ami a parabolának egyik változata.

Mindezekből látnivaló, hogy a másodrendü vonalakat jogosan nevezzük *kúpmetszet*eknek, mert azok változóikkal együtt a kúp, illetőleg a henger átmetszéséből származtathatók. Ezzel a másodrendü vonalak és a kúpmetszetek azonosságát bebizonyítottuk.

Feladatok az analitikai síkmértanhoz.

IX. fejezet. Az algebra alkalmazása a mértanra.

Algebrai kifejezések szerkesztése. 431. Szerkesszük e kifejezést: *a)* $x = \frac{ab}{a+b}$; *b)* $x = \frac{bc + de}{a}$; *c)* $x = \frac{ac + bc}{d + f}$; *d)* $x = \frac{ab^2c}{def}$.

432. Szerkesszük e kifejezést: *a)* $x = a\sin\alpha$; $x = a\cos\alpha$; $x = a\,tg\,\alpha$; $x = a\,cotg\,\alpha$. *b)* $x = \frac{a}{\sin\alpha}$; $x = \frac{a}{\cos\alpha}$; $x = \frac{a}{tg\,\alpha}$: $x = \frac{a}{cotg\,\alpha}$; *c)* $x = \frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$; $x = \frac{a^2\sin\alpha}{b}$. *c)* $\sin x = \frac{a}{b}$; $\cos x = \frac{a}{b}$; $tg\,x = \frac{a}{b}$; $cotg\,x = \frac{a}{b}$.

433. Szerkesztendő: $x = \frac{b^2 + bc}{a}$; $x = \frac{a \sin\alpha \cos\beta}{\sin\gamma}$; $x = \frac{a^2 \cos\alpha}{b \sin\alpha}$.

434. Szerkesszük: *a)* $\frac{x+2a}{2b-x} + \frac{x-2a}{2b+x} = \frac{4ab}{4b^2-x^2}$; *b)* $(a-x):(x-b) = a:b$; *c)* $\frac{a+1}{b}x + \frac{b+1}{a-b}x + \frac{2ab}{a+b} = a+b+1$.

435. Szerkesszük: $x = \frac{a^2-b^2}{c}$; $x = \frac{a^2 b}{a^2-c^2}$; $x = \sqrt{a^2+bc}$; $x = \sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}$ $x = \sqrt{ab-cd}$.

436. Szerkesztendő: $x = a\sqrt{2}$; $x = a\sqrt{3}$; $x = a\sqrt{4}$.

437. Szerkesztendő: $x = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} + a\sqrt{a^2-b^2}}$; $x = \sqrt{b\sqrt{a\sqrt{ac}}}$; $x^2 = \frac{ab^2}{c}$; $\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$; ($x$ a derékszögü háromszögben az átfogóra húzott magasság.)

Az algebra alkalmazása mértani feladatokra. 438. Adott félkört alakítsunk vele egyenlő körré; adott kört vele egyenlő félkörré.

439. Alakítsunk át adott körgyürüt vele egyenlő és koncentrikus körré.

440. Szerkesszünk kört, mely adott körnek háromszorosa.

441. Alakítsunk adott háromszöget négyzetté.

442. Derékszögü parallelogramma szerkesztendő, mely adott négyzettel egyenlő területű, azonban kerülete kétszer akkora, mint a négyzeté.

443. Adott körbe szerkesszünk koncentrikus kört úgy, hogy a keletkezett körgyürü a két kör mértani középarányosa legyen.

444. Derékszögü parallelogramma négyzetté átalakítandó.

445. Szerkesszünk adott háromszögbe egyenest úgy, hogy a levágott háromszög egyenlőszárú és az adott háromszögnek a fele legyen.

446. Szerkesszünk adott körnegyedbe kört, mely a két sugarat és az ívet érinti. — Szerkesszünk adott körszektorba kört, mely a két sugarat és az ívet érinti.

447. Felezzünk adott háromszöget egyik oldalával párhuzamos egyenessel.

448. Vágjuk le adott négyzet négy szögpontját úgy, hogy szabályos nyolcszög keletkezzék. (Az oldalon levágandó darab a szögponttól mérve $x = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$.)

449. Osszunk adott egyenest két részre úgy, hogy a két rész szorzata *a)* adott négyzettel egyenlő *b)* a lehető legnagyobb legyen.

450. Szerkesszünk adott háromszögben az alappal párhuzamosan egyenest úgy, hogy az egyik oldal felső szelete akkora legyen, mint a másik oldal alsó szelete.

451. Adott négyzetbe szerkesszünk öt egyenlő kört úgy, hogy a középső a többi négy mindegyikét, és ezeknek mindegyike a két szomszédos oldalt érintse.

452. Adott háromszög három szögpontjából szerkesszünk három egymást érintő kört.

453. Adott körbe szerkesszünk három egyenlő kört, melyek egymást és az adott kört érintik.

454. Szerkesszünk adott körbe négy egyenlő kört, melyek egymást (mindegyik kettőt) és az adott kört érintik.

455. Adott gömböt messünk át síkkal úgy, hogy a szegmentum egyenlő legyen az alapjára állított kúppal, melynek csúcsa a gömb középpontjában van.

Feladatok több ismeretlennel. 456. Osszunk adott háromszöget egyik oldalával párhuzamos egyenesekkel három egyenlő részre.

457. Egyenlőoldalú háromszögbe szerkesszünk más egyenlőoldalú háromszöget, melynek oldalai egyenlő távolságba esnek az első háromszög oldalaitól, és melynek területe fele az adott háromszög területének.

458. Ugyanaz, de derékszögű parallelogrammába.

459. Két távolság számtani és mértani közép arányosa ismeretes (a és b^2); szerkesszük a két távolságot.

460. Derékszögű háromszög két befogójának az összegéből (s) és az átfogó és a hozzátartozó magasság összegéből (s') szerkesszük a háromszöget.

461. Ismeretes az egyenlőszárú háromszög kerülete (k) és az alapra bocsátott magasság m; szerkesszük a háromszöget.

462. Szerkesszünk adott háromszögbe egyenest, mely a területet és a kerületet felezi.

X. fejezet. A pontról.

A pont koordinátái. 463. Határozzuk meg a pont helyzetét, melynek koordinátái: $x = 4, y = 5$; $x = -3, y = 7$; $x = 5, y = -2$; $x = -4, y = -6$; $x = 0, y = -5$; $x - 3, y = 0$.

464. Valamely a oldalú négyzet átlói valamely tengelyrendszer tengelyei; mik a négyzet szögpontjainak a koordinátái?

465. Valamely a oldalú szabályos hatszögnek a középpontja a derékszögű tengelyrendszernek a kezdőpontja, és az egyik tengely a sokszög átlója. Mekkorák a szögpontok koordinátái?

466. Valamely háromszög szögpontjainak koordinátái a) $x_1 = 4, y_1 = 3$; $x_2 = 2, y_2 = 1$; $x_3 = 5, y_3 = 7$; b) $x_1 = 5, y_1 = -2$; $x_2 = 3, y_2 = -4$; $x_3 = -2$, $y_3 = 6$. Szerkesszük a háromszöget.

467. A négyszög szögpontjainak koordinátái: (7, 2). (0, - 9), (— 3, — 1), (— 6, 4); szerkesszük a négyszöget.

468. Határozzuk meg ama pontok helyzeteit, melyek derékszögű koordinátáit a következő egyenletek adják; a) $x + y = 28$ és $x - y = 6$; b) $x + 2y = 13$ és $2x + 3y = 13$; c) $8x + 3y = 7$ és $5x - 2y = 16$; c) $5x - 6y = 22$ és $\frac{3x + 5y}{-3} = 19 - \frac{x+y}{2}$; d) $x - y = 1$ és $x^2 + y^2 = 25$; d) $x^2 - 5x + y + 3 = 0$ és $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$.

469. Milyen azon pontok helyzete, melyek sarkkoordinátái: $\rho = 7, \varphi = 45^0$; $\rho = 9, \varphi = 30^0$; $\rho = 3, \varphi = 135^0$; $\rho = 4, \varphi = 225^0$; $\rho = 5, \varphi = 300^0$?

470. Mik az a oldalu négyzet szögpontjainak sarkkoordinátái, ha a sark a négyzet egyik szögpontja, a tengely pedig a négyzet átlója?

471. Mik az egyenlőoldalu háromszög szögpontjainak koordinátái, ha a sarkpont a háromszög szögpontja és a tengely az a hosszúságú oldalával esik össze?

472. Mik az a oldalu szabályos hatszög szögpontjainak sarkkoordinátái, ha a sark a sokszög középpontja, a tengely pedig az egyik átló?

473. Mik azon pont koordinátái, mely két adott pont $(x_1 y_1)$ és $(x_2 y_2)$ távolságát a) felezi, b) 1 : 2 arányban osztja? $x_1 = -3, y_1 = -5$; $x_2 = 7$, $y_2 = -3$.

Két pont távolsága. 474. Határozzuk meg oly két pontnak egymástól való távolságát, melyeknek derékszögű koordinátái: (3, 7) és (— 4, 5); (— 9, 12) és (0, 3); (0, 0) és (7, — 5); (27, — 11) és (— 3, — 7).

475. Valamely háromszög szögpontjainak derékszögü koordinátái (5, 7), (1, 5) és (2, 9); mily nagyok a háromszög oldalai? Mekkorák, ha e koordináták 30° szög alatt hajló tengelyekre vonatkoznak?

476. Két pont távolsága 25; az egyik pontnak derékszögü koordinátái $x_1 = 9, y_1 = 12$; a másikra nézve; $x_1 = -15$; mily nagy ennek az ordinátája?

477. Mily egyenlet mutatja azt, hogy az (x, y) pontnak a (— 2, — 3) ponttól való távolsága 4?

478. Valamely távolságnak a hosszúsága 10; az egyik végpontjának koordinátái $x_1 = 5, y_1 = 2$, a másiknak ordinátája $y_2 = -4$; mekkora az abscissza?

479. Mily feltételnek kell teljesülni, hogy az (x, y) pont a (4, 5) és (6, 7) pontoktól egyenlő távol feküdjék?

480. Keressünk oly pontot, mely a (2, 3), (4, 5) és (6, 1) pontoktól egyenlő távolságban van, és mekkora ez a távolság?

481. Határozzuk meg oly két pontnak a távolságát, melyeknek ferdeszögü koordinátái (3, 5), (— 2, 4), ha a tengelyektől bezárt szög 60°?

482. Mily nagy oly két pont távolsága, melyek sarkkoordinátái: a) $\rho_1 = 15$, $\varphi_1 = 48^0 16'$ és $\rho_2 = 17, \varphi_2 = 125^0$; b) $\rho_1 = 17, \varphi_1 = 30^0 11'$ és $\rho_2 = 19, \varphi_2 = 172^0 30'$?

Koordináták átalakításáról. 483. Számítsuk ki a 463. feladatban adott pontok koordinátáit oly párhuzamos derékszögü koordináta-rendszerre, melyre vonatkozólag a kezdőpont koordinátái a régi rendszerre nézve $a = 3, b = 5$.

484. Valamely derékszögü koordináta-rendszerben bizonyos pontnak a koordinátái az $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 18$ egyenletnek felelnek meg; mily alakot vesz fel az egyenlet, ha a rendszer kezdőpontját a tengelyek párhuzamossága mellett a (2, 3) pontba helyezzük át?

485. Mik a 463. feladatban adott pontok koordinátái oly derékszögű rendszerre nézve, melynek kezdőpontja összeesik az eredeti rendszerével, X-tengelye azonban a régivel 30°-nyi szöget zár be?

486. Mily szög alatt kell valamely derékszögü rendszer tengelyeit a kezdőpont körül forgatnunk, hogy az X-tengely a (3, 7) ponton haladjon keresztül?

487. Mily szög alatt kell forgatni a koordináta-rendszert, hogy az (5, 7) pont ordinátája 6 legyen?

488. Valamely derékszögü rendszerben bizonyos pontnak a koordinátái $x^2 + y^2 = 16$ egyenletnek felelnek meg; mi lesz az egyenlet, ha a tengelyeket a kezdőpont körül 45°-nyira forgatjuk?

A vonal egyenlete. 489. Keressük a következő egyenletnek megfelelő mértani helyet: a) $y = x^2 - 3x - 2$; b) $x^2 + y^2 = 9$; c) $x^2 - y^2 = 9$; d) $y^2 - 6y - 4x + 9 = 0$; e) $y = \sin x$. (x helyébe tegyünk sorban $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi \ldots$)

490. Vizsgáljuk meg, vajjon a 489. feladatban adott vonalak végtelenbe terjednek-e?

491. Szerkesszük a következő, kört képviselő egyenleteket, és határozzuk meg a kör középpontját és sugarát: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$; $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 9 = 0$. $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$; $4x^2 - 12x + 4y^2 + 8y - 3 = 0$.

492. Vizsgáljuk meg, a 491. feladatban adott körök milyen pontokban metszik a tengelyeket?

XI. fejezet. Az elsőrendű vonalak.

Az egyenes egyenlete. 493. Szerkesszük meg a következő egyeneseket: *a)* $y = 3x - 5$; *b)* $y = -x + 4$; *c)* $\frac{x}{2} - \frac{y}{8} = 1$; *d)* $\frac{1}{x+1} + 3 - \frac{7}{2x+2} = o$; *e)* $x + 3y = 5$.

494. Mi az egyenlete az abscissza-tengellyel α szöget bezáró és az ordináta-tengelyről b egységet lemetsző egyenesnek, ha a tengelyek szöge 90^0? $\alpha = 45^0$, $b = 3$; $\alpha = 60^0$, $b = -2$; $\alpha = 120^0$, $b = 4$; $\alpha = 158^0$, $b = -5$.

495. Felállítandó azon egyenes egyenlete, mely derékszögű rendszerben az X-tengelyből a, az Y-tengelyből b egységet szel le. $a = 3$, $b = 2$; $a = -\frac{5}{2}$, $b = \frac{24}{5}$; $a = -1$, $b = -1$.

496. Mily szöget alkot derékszögű rendszernél az X-tengellyel az egyenes: $y = x + 5$; $y = 3x - 2$; $y = 2x - 1$; $x + 3y = -2$.

Egyenesek metszőpontja. 497. Keressük meg a következő egyenesek metszési pontjának koordinátáit: *a)* $5y - 2x = 4$ és $3y - x = 4$; *b)* $y = 3x + 4$ és $y = x + 4$; *c)* $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ és $y = 4x + 4$.

498. Valamely háromszög oldalainak az egyenletei adva vannak; határozzuk meg szögpontjainak koordinátáit és az oldalak hosszát. *a)* $2y + 5x - 29 = 0$, $y - 9x + 43 = 0$, $y + 14x - 49 = 0$; *b)* $y + 3x + 4 = 0$, $5y - 3x - 34 = 0$, $2y - 3x - 1 = 0$; *c)* $5x - 3y = 9$, $2y - 3x = 4$, $y - x = -2$.

Adott pontokon átmenő egyenes. 499. Keressük oly egyenesnek az egyenletét, mely (x, y) ponton megy át és az X-tengellyel α szöget zár be. *a)* $x_1 = 3$, $y_1 = 7$, $\alpha = 60^0$; *b)* $x_1 = -3$, $y_1 = 11$, $\alpha = 45^0$; *c)* $x_1 = 13$, $y_1 = -4$, $\alpha = 150^0$.

500. Két egyenes egyenlete: $y = 3x - 8$, $y = 5x + 6$; határozzuk meg azon egyenes egyenletét, mely e két egyenes metszőpontján megy át és az X-tengellyel 45^0 szöget alkot.

501. Mi az egyenlete az $(x_1\ y_1)$ és $(x_2\ y_2)$ pontokon átvonuló egyenesnek, ha $(x_1\ y_1)$ és $(x_2\ y_2)$ értékei: (2, 3) és (4, 5); (— 1·2, — 3) és (5, — 2); $(-\frac{1}{2}, 3)$ és (3, 0).

502. Valamely háromszög szögpontjainak a koordinátái (3, — 2), (5, — 7 és (— 3, — 6); határozzuk meg az oldalak egyenleteit.

503. Valamely négyszög szögpontjainak koordinátái sorban: (0, 0), (1, 5), (7, 0), (4, — 9); határozzuk meg az átlók egyenleteit és azoknak metszőpontját.

504. Egy négyszög oldalainak egyenletei: $y=5x-3$, $14y=3x+92$, $11y=7x-2$, $4y=x+7$; melyek az átlók egyenletei?

505. Határozzuk meg az 502. feladatban adott háromszög súlyvonalainak az egyenleteit; mutassuk meg, hogy ezek egy pontban találkoznak és határozzuk meg azoknak metszőpontjait.

Két egyenes által bezárt szög. 506. Két egyenesnek egyenletei adva vannak; mekkora a két egyenes közt levő szög? *a)* $y=3x+5$ és $y=\frac{1}{2}x-2$; *b)* $3x+5y-1=0$ és $11x-2y+3=0$; *c)* $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ és $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1$.

507. Mily szöget alkotnak az (11, 1) és (7, 8) pontokból a koordináták kezdőpontjához induló egyenesek?

508. Valamely háromszögben az oldalak egyenletei ismeretesek; mekkorák a háromszög szögei? *a)* $8y+x+11=0$, $3y-2x-1=0$, $5y+4x+6=0$; *b)* $2y+5x-29=0$, $y-9x+43=0$, $y+11x-49=0$.

509. Valamely háromszög szögpontjainak koordinátái (3, — 2), (5, — 7), (— 3, — 6); mily szög alatt metszik egymást a súlyvonalak?

510. Mi azon egyenes egyenlete, mely a (— 1, 5) ponton átmenve $5x-4y-1=0$ egyenessel 45^0-nyi szöget alkot?

511. Mi az $x_1=5$, $y_1=7$ ponton keresztül haladó oly egyenesnek az egyenlete, mely az $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=-1$ egyenessel párhuzamos?

512. Keressük oly egyenesnek az egyenletét, mely a $3x+2y-59=0$, $5x-7y+6=0$ egyenesek metszőpontján megy át, s amely az $y+2x-1=0$ egyenessel párhuzamos.

513. Keressük oly egyenesnek az egyenletét, mely $3x-2y=5$ egyenesre merőleges.

514. Keressük oly egyenesnek az egyenletét, mely (x, y) ponton keresztül menvén, az $ax+by+c=0$ egyenesre merőleges, ha *a)* $x_1=3, y_1=-13$ és $y=4x-7$; *b)* $x_1=2, y_1=9$ és $7y+23x-5=0$.

515. Valamely háromszög szögpontjainak a koordinátái (— 1, — 1), (— 3, 5), (7, 11); mik a magasságok egyenletei?

516. Egy rombus két szomszédos szögpontjának koordinátái (5, 0) és (— 1, 0); az első szögpontnál fekvő szöge 30^0. Határozzuk meg szögpontjainak koordinátáit, az átlók egyenleteit és ezek metszőpontját.

517. Valamely háromszög szögpontjainak a koordinátái (— 1, — 7), (1, 11), (— 4, 13); határozzuk meg a körülírt kör középpontját.

518. A háromszög oldalainak egyenletei: $2x+y-11=0$, $2y-9x+50=0$, $6y-7x-3=0$; keressük a magasságok egyenleteit.

Pontnak távolsága valamely egyenestől. 519. Ismerjük valamely pontnak a koordinátáit és egy egyenesnek az egyenletét; határozzuk meg a pontnak a távolságát az egyenestől. *a)* (5, 13) és $3x=y-5$; *b)* (5·6, 4·8) és $y+\frac{6x}{7}=1$; *c)* (0, 0) és $\frac{y}{3}-\frac{x}{4}=1$.

520. Határozzuk meg az 515. feladatban adott háromszög magasságainak a hosszát.

521. Ismerjük két egymást metsző egyenes $y = ax + b$ és $y = a_1 x + b_1$ egyenletét, határozzuk meg a bezárt szöget felező egyenest. (A szögfelező minden pontja egyenlő távolságban van a szög két szárától.) $y = \sqrt{3} . x - 4$ és $y = x + 2$.

Háromszög területe. 522. Mekkora a háromszög területe, ha szögpontjainak koordinátái: *a)* (4, 3), (2, 1), (5, 7); *b)* (0, 1), (1, 2), (— 3, — 4)?

523. A háromszög oldalainak egyenletei: $x = 5$, $12y - 5x - 59 = 0$, $12y + 5x + 11 = 0$. Mekkora a területe?

A háromszög különös pontjai. 524. Mutassuk meg, hogy az 519. és 522. feladatban adott háromszög magasságai egy pontban találkoznak.

525. Egy háromszög szögpontjainak a koordinátái $(0, \sqrt{3})$, (1, 0), $(1, \sqrt{3})$; határozzuk meg a szögfelezők egyenleteit és mutassuk meg, hogy ezek egy pontban találkoznak (521. feladat).

526. A háromszög szögpontjainak a koordinátái (—1, —7), (1, 11), (—4, 13); mutassuk meg, hogy az oldalak felező pontjában emelt merőlegesek egy pontban találkoznak.

527. Mutassuk meg, hogy az 509. feladatban adott háromszög súlyvonalai egy pontban találkoznak.

Az egyenes sarkegyenlete. 528. Keressük az $y = 5x + 6$ egyenesnek a sarkegyenletét.

529. Mi lesz derékszögű koordináta rendszerben a $tg\,\alpha = 1$, $\rho = \frac{3}{\cos\alpha}$ egyenesnek egyenlete?

XII. fejezet. A másodrendű vonalak.

A) A kör.

A kör egyenlete. 530. Mi a kör egyenlete, ha középpontjának a koordinátái (α, β) és sugara r? $\alpha = 2, \beta = -1, r = 1\frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{3}, r = 2$; $\alpha = 0, \beta = -4, r = 4$; $\alpha = -3, \beta = 0, r = 1$.

531. Szerkesszük a következő egyenleteknek megfelelő vonalakat:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 11$; *b)* $x^2 + y^2 - 2x + y = 3$;
c $4x^2 + 4y^2 - 6x + 3y = 0$; *d)* $36x^2 + 36y^2 - 48x + y = 11$;
α) $x^2 + y^2 - 6y = 7$ *e)* $x^2 + y^2 - 2x = 8$.

532. Határozzuk meg a következő egyenletek által adott körök metszéspontjait a tengelyekkel:

a) $x^2 + y^2 + 16x - 2y + 64 = 0$; *b)* $25x^2 + 25y^2 + 100x + 150y + 289 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 14x + 13 = 0$; *d)* $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$.

533. Mi oly körnek az egyenlete, melynek sugara 5 és amely *a)* az *X*-tengelyt érinti és melynek középpontja az *Y*-tengelyben van, *b)* mindkét tengelyt érinti?

534. Keressük azon kör egyenletét, melynek középpontja az $y = 4x - 3$ és $y = 10x + 7$ egyenesek metszőpontja és mely a kezdőponton megy át.

535. Mi azon körnek az egyenlete, mely (2, 4) ponton megy át és melynek középpontja a kezdőpont?

536. Ismeretesek a háromszög szögpontjainak a koordinátái; határozzuk meg a körülírt kör egyenletét. A szögpontok koordinátái: (—1, —7), (1, 11) és (—4, 13); (0, 0), (4, 0) és $(2, 2\sqrt{3})$; (12, 10), (6, 11) és (10, 4); (4, 0), (—4, 0) és (0, 3); (4, — 1), (— 4, — 1) és (0, 2): $\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ és (0, 1).

A kör sarkegyenlete. 537. Határozzuk meg a kör sarkegyenletét, ha a kör egyenlete: $x^2+y^2-x+\frac{3}{2}y=3$; $x^2+y^2+2x+2y\sqrt{3}=5$.

538. Mi lesz a körnek sarkegyenlete, ha a sark a kör középpontjában van?

539. Mi az $x^2+y^2=64$ kör egyenlete, ha az új rendszer kezdőpontjának koordinátái (5, 9) és tengelyei párhuzamosak a régiekkel? Ugyszintén $x^2+y^2=49$ és (—7, —8).

540. Miképen módosul a körnek $x^2+y^2=r^2$ egyenlete, ha a tengelyek a kezdőpont körül α^0-nyi szög alatt elfordulnak?

A kör és az egyenes. 541. Hány közös pontja van $x^2+y^2=25$ körnek az $y=3x-6$ egyenessel? Úgyszintén: $x^2+y^2=65$ és $3x+y=25$; $x^2+y^2=100$ és $y=6x-12$; $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ és $4x+3y=35$.

542. A (2, 3) és (3, 1) pontokon keresztülmenő egyenes metszi-e a köröket: $x^2+y^2=49$ és $x^2+y^2=64$?

543. A $3x+y=25$ egyenes az $x^2+y^2=65$ kört két pontban metszi; mekkora a metszőpontokat összekötő húr és az ehhez tartozó középponti szög? Úgyszintén $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ és $2y-x-2=0$.

544. Mi az $x+\dfrac{3}{2}y=3$ egyenesnek az $x^2+y^2-6x+6y=3$ kör középpontjától való távolsága?

545. Írjuk fel azon kör egyenletét, melynek sugara 2, centruma a pozitiv X-tengelyen van s érinti a $3x-4y=12$ egyenest.

546. Keressük ama kör egyenletét, mely a pozitiv X-tengelyt és a $4y+3x=33$ egyenest érinti s az (1, 5) ponton áthalad.

547. Valamely háromszögben az oldalak egyenletei $3y-5x-2=0$, $2y-7x-1=0$, $5y+2x+9=0$. Határozzuk meg a beirt kör egyenletét és középpontját.

548. Keressük azt a kört, mely (— 2, 0) és (2, 0) pontokon átmegy és az $3x-4y+6=0$ egyenest érinti.

Két kör. 549. Határozzuk meg két kör metszését illetőleg azoknak kölcsönös fekvését:

a) $x^2+y^2=15$ és $(x-14)^2+y^2=13$;
b) $x^2+y^2=25$ és $x^2-10x+y^2-10y+25=0$;
c) $y^2+x^2+10y-12x+45=0$ és $y^2+x^2+8y-12x+43=0$;
d) $y^2+x^2-4y-4x+7=0$ és $y^2+x^2-12y+2x-63=0$.

550. Határozzuk meg azon kör egyenletét, mely a (4, 3) ponton megy át és az $(x-2)^2+y^2=1$ kört kívülről és az Y-tengelyt is érinti.

551. Mi azon körnek az egyenlete, mely e két kört: $x^2+y^2=6$, $(x-6)^2+y^2=1$ belülről, $(x-10)^2+y^2=4$ kört pedig kívülről érinti?

552. Mi ama körnek egyenlete, mely e három kört kívülről érinti:
$(x-1)^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ és $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.

553. Határozzuk meg azt a kört, mely (0, 0,) és (2, 0) pontokon áthaladva a $(x-5)^2+(y-3)^2=16$ adott kört kívülről érinti.

554. Mi azon kör egyenlete, mely $x^2+y^2=r^2$ adott körrel ennek (x_1, y_1) pontjában érintkezik és $(2r, 0)$ adott ponton megy keresztül?

A kör érintője és normálisa. 555. Határozzuk meg az adott kört $(x_1\ y_1)$ pontban érintő egyenesnek az egyenletét, ha *a)* $x^2+y^2=58, x_1-7, y_1=3$; *b)* $x^2+y^2=250, x_1=9, y_1<0$; *c)* $x^2+y^2=25, x_1=3, y_1 \gtrless 0$; *d)* $(x-2)^2+(y-3)^2=10, x_1=5, y_1=4$.

556. Határozzuk meg azt a szöget, melyet $x^2+y^2=58$ adott körben a (7, 3) és (2, 7·34) pontján keresztül húzott érintők egymással alkotnak.

557. Meghatározandók $x^2+y^2+4x-2y=76$ körnek $y=-\frac{1}{2}x+1$ egyenessel párhuzamos érintői és az érintési pontok koordinátái.

558. A kör egyenlete $x^2+y^2=r^2$, két pontjának a koordinátái $(x_1\ y_1)$ és $(x_2\ y_2)$; határozzuk meg az utóbbiakon keresztül húzott érintők alkotta szöget: mily értéket adjunk $x_1\ y_1$ és $x_2\ y_2$ koordinátáknak, hogy a két érintő párhuzamos legyen, és milyet, hogy merőlegesek legyenek egymásra?

559. Határozzuk meg az adott pontból adott körhöz húzott érintők érintési pontjainak a koordinátáit: *a)* $x^2+y^2=289$ és (8, 15); *b)* $x^2+y^2=49$ és (20, 15); *c)* $x^2+y^2=169$ és (16, 11); *d)* $(x-1)^2+(y-2)^2=12$ és (0, 2); *e)* $x^2+y^2+6x-8y=21$ és (0, 0).

560. Adott körhöz (x_1, y_1) pontból érintőket húzunk; mily nagy az ezektől bezárt szög, ha; *a)* $x^2+y^2=25$ és $x_1=2, y_1=8$; *b)* $x^2+y^2=16$ és $x_1=8, y_1=1$. *c)* $x^2+y^2-8x-6y+9=0$, és $x_1=0, y_1=0$.

561. Az $x^2+y^2=25$ körhöz $(2, -8)$ pontból érintőket húzván, számítsuk ki az adott és az érintési pontok közé eső háromszög területét.

562. Határozzuk meg az 561. feladatban keresett érintőkhez a normálisok egyenleteit.

563. Adva vannak a kör egyenlete és az érintő érintéspontjának koordinátái; keressük az érintési vonalakat. *a)* $x^2+y^2=169$, (5, 12); *b)* $x^2+y^2-14x-4y-5=0$, (10, 9).

B) Az ellipszis.

Az ellipszis egyenlete. 564. Írjuk fel az ellipszis egyenletét, ha: *a)* $2a=16$ és $2b=12$; *b)* $a+b=27, c=9$;

565. Az ellipszis két pontjának koordinátái (1, 5), (— 2, 4); mi az ellipszis középponti egyenlete?

566. Számítsuk ki az ellipszis tengelyeit, ha $c=5$, $p=6{\cdot}5$.

567. Keressük az ellipszis paraméterét és excentricitását, ha az ellipszis egyenlete: *a)* $16x^2+25y^2=400$; *b)* $9x^2+64y^2=36$.

568. Keressük a (8, 10) ellipszispont radius vectorait, ha $a=13$, $b=12$.

569. Mekkora szöget zárnak be *a)* a $18y^2+7x^2=126$ ellipszis $x_1=3, y_1>0$ pontjához húzott radius vectorok; *b)* a $9x^2+25y^2=225$ ellipszis (2, 1·81) pontjához húzottak?

570. Mi azon ellipszis egyenlete, melynél az egyik pontjához tartozó radius vectorok összege kétszer akkora mint $2c$?

Az ellipszis csúcs-egyenlete. 571. Keressük az ellipszis csúcs-egyenletét, ha kis tengelye 14, paramétere 6.

572. Mi az ellipszis egyenlete, ha a kezdőpont a kis tengely végpontjában van?

573. Valamely ellipszis csúcsegyenlete ismeretes; mi a középponti egyenlete, és mekkorák a tengelyek? *a)* $y^2 = 2px - qx^2$; *b)* $25y^2 = 90x - 9x^2$; *c)* $y^2 = \frac{18}{5}x - \frac{9}{25}x^2$.

574. Valamely ellipszis középpontjának a koordinátái (4, 7), tengelyei $2a = 14$ és $2b = 8$; mi az ellipszis egyenlete, ha a koordinátatengelyek az ellipszis tengelyeivel párhuzamosak?

Az ellipszis és az egyenes. 575. Ismeretes az ellipszis és egy egyenes egyenlete; határozzuk meg a metszőpontokat: *a)* $25y^2 + 4x^2 = 100$, és $y = 5x + 7$; *b)* $7x^2 + 9y^2 = 1$ és $y = 5x + 7$; *c)* $4x^2 + 9y^2 = 36$ és $2y = 5 \pm x$

Az ellipszis érintője. 576. Határozzuk meg az érintő egyenletét, ha ismerjük az ellipszis egyenletét és az érintési pontot: *a)* $20y^2 + 5x^2 = 100$ és (2, 2); *b)* $9y^2 + 4x^2 = 36$ és $(-\frac{3}{2}, y \gtrless 0)$; *c)* $25y^2 + 9x^2 = 225$ és $(4, y < 0)$.

577. Határozzuk meg azon két érintőnek a szögét, melyeket az ellipszisnek ugyanazon abscisszához tartozó két pontjához szerkesztettünk; mikor lesz ezen szög 90°, és mikor 0°? Hol metszik egymást?

578. Határozzuk meg az $5y^2 + 3x^2 = 15$ ellipszis oly érintőjének az egyenletét, mely párhuzamos a $4x - 3y + 2 = 0$ egyenessel.

579. Az ellipszis két gyujtópontjából egy pont érintőjére bocsátott merőlegesek szorzata állandó szám.

580. A $9x^2 + 25y^2 = 225$ ellipszis nagy tengelye, mint átmérő fölé kört szerkesztünk és a két görbéhez (—7, 0) pontból érintőket. Mekkora szöget alkotnak az érintők?

581. Mily távol van egyik gyujtópont a másik gyujtóponton átmenő paraméter végpontjában húzott érintőtől?

582. Számítsuk ki azt a szöget, mely alatt az $x^2 + 2y^2 = 2$ és $x^2 + (y + 9)^2 = 98$ két görbe egymást metszi.

583. Mik lesznek a $9x^2 + 16y^2 = 144$ ellipszis és egyik $(2, y > 0)$ pontjához tartozó érintési vonalak?

Szerkesztések. 584. Szerkesszünk ellipszist, ha ismeretes egy gyujtópontja és egy átmérője.

585. Ellipszist kell szerkeszteni, ha ismeretes két pontja, nagy tengelyének iránya és a két tengely számaránya $a : b$.

586. Szerkesszünk ellipszist, mely adott egyenest adott pontban érint, ha ismeretes még *a)* egy gyujtópont és a nagy tengely iránya, *b)* egy gyujtópont és a nagy tengely hossza.

587. Szerkesszünk ellipszist, mely egy egyenest érint és melynek két gyujtópontja ismeretes. (Az érintő és a normális az excentricitást harmonikusan osztják.)

588. Szerkesszünk ellipszist, mely adott egyenest adott pontban érint, ha ismeretes a nagy tengely hossza és fekvése. (A nagy tengely mint átmérő fölé szerkesszünk kört.)

589. Szerkesszünk ellipszist, ha ismeretes egyik gyujtópontja, két érintője és az egyik érintő pont. (A gyujtópont ellenpontjával fejthető meg.)

C) A hiperbola.

A hiperbola egyenlete. 590. Valamely hiperbola tengelyei ismeretesek; mi lesz az egyenlete? *a)* $2a=16$, $2b=14$; *b)* $a=5$, $b=8$; *c)* $2a=4$, $2b=4$.

591. Ismeretes a hiperbola egyenlete; mekkorák a tengelyei, az excentricitása és a paramétere? *a)* $25x^2-36y^2=900$; *b)* $x^2-y^2=a^2$.

592. Milyen fekvésű a hiperbola, ha egyenlete: $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$?

593. Keressük a hiperbola egyenletét, ha *a)* az excentricitása $2c=26$ és melléktengelye $2b=24$; *b)* az excentricitása háromszor akkora, mint a főtengelye; *c)* $2a=10$ és a paraméter $2p=8$.

594. Határozzuk meg oly hiperbola egyenletét, melynek *a)* egyik pontja a $(10, 25)$ pont és főtengelye $2a=8$; *b)* két pontjának a koordinátái $(5, 3)$ és $(8, -10)$.

595. Határozzuk meg a $20x^2-9y^2=180$ hiperbola $(5, y>0)$ pontjából kiinduló rádius vectorokat.

596. Bizonyítsuk be, hogy egy egyenlőoldalú hiperbola bármely pontjának az ordinátája mértani középarányos talppontjának a két csúcstól való távolsága közt.

A hiperbola és az egyenes. 597. Keressük a hiperbola és egy egyenes közös pontjainak a koordinátáit: *a)* $16x^2-5y^2=80$ és $y=4x+1$; *b)* $9y^2-4x^2=36$ és $y=\frac{2}{3}x+2$; *c)* $9y^2-4x^2=36$ és $y=2x-8$, $y=x-3$; *d)* $x^2-4y^2=4$ és $y-2x-3=0$.

598. Mily arányban áll az $\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$ hiperbola az $y=-\frac{1}{3}\sqrt{29}.\,x+5$ és $y=\frac{1}{3}\sqrt{29}.\,x-5$ egyenesekkel?

599. Mekkora szöget zárnak be a hiperbola asszimptotái, ha ismeretes a hiperbola egyenlete? *a)* $9x^2-4y^2=36$; *b)* $x^2-3y^2=12$; *c)* $4x^2-5y^2=100$; *d)* $x^2-y^2=a^2$.

600. Határozzuk meg a hiperbola egyik gyújtópontjából az asszimptotákra bocsátott merőlegesek hosszát.

601. Bizonyítsuk be, hogy ha ellipszist vagy hiperbolát egy koncentrikus körrel metszünk, az átmetszési pontok oly derékszögű négyszög szögpontjai, melynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel.

A hiperbola érintője és normálisa. 602. Adva van a hiperbola egyenlete és egy pontja; határozzuk meg a ponthoz szerkesztett érintő és normalis egyenletét: *a)* $16x^2-4y^2=144$ és $(4, y>0)$; *b)* $64x^2-25y^2=1600$ és $(13, y>0)$.

603. Az $9x^2-100y^2=900$ hiperbola mely pontjához tartozó érintők hajlanak az X-tengelyhez 60^0-nyi szög alatt? Mi a pont, ha a hiperbola egyenlete $9x^2-25y^2=225$ és a szög 45^0?

604. Határozzuk meg a $16x^2-9y^2=144$ hiperbola oly érintőjének az egyenletét, mely az $y=4x-3$ egyenessel párhuzamos.

605. Egy ellipszis egyenlete $9y^2+25y^2=225$, egy hiperboláé $9x^2-7y^2=63$. Mekkora szöget zárnak be a metszési pontjaikban húzott érintők?

606. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola két gyújtópontjából valamely érintőre bocsátott merőlegesek szorzata állandó.

607. Keressük a $9x^2-7y^2=63$ hiperbola $(4, y>0)$ pontjához tartozó érintő vonalakat.

608. Mely hiperbola pontra nézve egyenlő a subtangens a subnormálissal?

A hiperbola csúcs- és sarkegyenlete. 609. Valamely hiperbolára nézve $a=0{\cdot}4$, $b=0{\cdot}3$; mi a csúcsegyenlete? Mi a sarkegyenlete?

610. Keressük az egyenlő oldalú hiperbola csúcsegyenletét.

611. A hiperbola csúcsegyenlete: $y^2=\frac{32}{3}x+\frac{16}{9}x^2$; mi a középponti egyenlete?

612. Mi a hiperbolának az egyenlete, ha a kezdőpont (—2, 3)-ban van és ha $a=4$, $b=4$? (A koordináták tengelyei párhuzamosak az előbbiekkel.)

Szerkesztések. 613. Szerkesszünk hiperbolát, ha ismeretesek *a*) a csúcsai és egy pontja, *b*) két csúcsa és egy érintője.

614. Szerkesszük a hiperbolát, ha adva vannak az asszimptoták és a hiperbola egy pontja.

615. Szerkesszünk hiperbolát, mely egy adott egyenest adott pontban érint, ha adva van egy gyújtópont és a főtengely iránya.

616. Szerkesszünk hiperbolát, mely adott egyenest érint, ha ismeretes a két gyújtópont. (Az érintő és a normális harmonikusan osztják az excentricitást.)

D) A parabola.

A parabola egyenlete. 617. Milyen parabolát jelent: $y^2=-8x$; $y^2=-\frac{8}{9}x$; $x^2=-4y$; $x^2=-6y$?

618. A parabola két pontja: (5, 6·24) és (3, 3·5); mi a parabola egyenlete és mekkora a paraméter?

619. Az $y^2=4x$ parabola egyik pontjának abscisszája 7. Mi az egyenlete és mi a hossza az ezen ponthoz tartozó radius vectornak?

620. Határozzuk meg az $y^2=8x$ parabolának $(2, y>0)$ és $(18, <0)$ pontjain átmenő metszőnek az egyenletét.

621. Mi a parabola egyenlete, ha *a*) a kezdőpont a gyújtópontban van, *b*) ha a gyújtópont a vezérvonalban van?

622. Mi a parabola egyenlete, ha csúcsának koordinátái (7—5), paramétere 8, tengelye pedig párhuzamos az X-tengellyel?

A parabola és az egyenes. 623. Határozzuk meg a parabola és egy egyenes közös pontjainak a koordinátáit: *a*) $y^2=9x$ és $7y-3x-30=0$; *b*) $y^2=3x$ és $4y-x-12=0$; *c*) $y^2=11x$ és $\frac{y}{12}+\frac{y}{5}+1=0$; *d*) $y^2=16x$ és $2x-y=-2$.

624. Egy parabola egyenlete: $y^2=18x$, egy pontnak koordinátái (4, 3); határozzuk meg a ponttól felezett húr egyenletét.

A parabola érintője és normálisa. 625. Mi az adott parabola adott pontjában szerkesztett érintőnek és normálisnak az egyenlete? *a*) $y^2=5x$ és (20, 10); *b*) $y^2=8x$ és $(5, y>0)$.

626. Az $y^2=15x$ parabola valamely érintője a tengellyel 45^0-u szöget zár be; mekkorák az érintési pont koordinátái?

627. Határozzuk meg azon érintők egyenletét, melyeknél az érintési pont abscisszája $2p$; mekkora szöget zárnak be, és hol metszik az X-tengelyt?

628. Határozzuk meg $y^2=10x$ parabola azon érintőjének az egyenletét, mely $y=3x-1$ egyeneshez párhuzamos. Melyek az érintési pont koordinátái?

629. Bizonyítsuk be, hogy két parabola-érintő által bezárt szög akkora, mint azan két szög összege, melyeket az érintési pontokhoz húzott radius vectorok az érintőkkel alkotnak.

630. Bebizonyítandó, hogy a vezérvonal bármely pontjából a parabolához húzott két érintő derékszöget fog be.

631. Ha a parabola gyújtópontján át húrt vonunk, az ennek metszőpontjaihoz tartozó érintők a vezérvonalban találkoznak.

632. Bizonyítsuk be, hogy a parabola vezérvonalának minden pontja egy-egy érintőre nézve a gyújtópont ellenpontja.

633. Mily szög alatt metszik egymást $x^2+y^2=20$ és $y^2=8x$ görbék?

634. Határozzuk meg az $y^2=4x$ parabola $y_1=4$ ordinátával bíró pontjához tartozó érintési vonalakat.

635. Egy parabola-érintő az X-tengelyhez oly szöget alkot, melyre nézve $tg\,\alpha=\sqrt{3}$. Határozzuk meg az érintő egyenletét, a subtangenst és a subnormálist.

636. A parabola két pontjához tartozó subtangensek szorzata a fél paraméter négyzetével egyenlő, ha az ezen pontokhoz tartozó érintők egymásra merőlegesek.

Szerkesztések. 637. Szerkesszük a parabolát, ha ismeretes két pontja és *a)* a tengely iránya, *b)* a gyújtópont, *c)* az irányvonal.

638. Határozzuk meg a parabola gyújtópontját, ha ismeretes a parabola két pontja és a vezérvonal.

639. Ismeretes a parabola és egy érintő, keressük az érintési pontot.

640. Határozzuk meg a parabolát, ha adva van: *a)* a gyújtópontja, egy érintője és az érintési pont; *b)* a gyújtópont és két érintő.

Az általános másodfokú egyenlet. 641. Mit jelentenek a következő egyenletek. Vezessük vissza azokat legegyszerűbb alakjukra:

a) $5x^2+4xy+y^2-5x-2y-19=3$; $y^2+4xy+5x^2+2y+12x+13=0$;

c) $y^2-2xy+10x^2-18x=0$; $y^2+x^2+6y-8x=0$.

b) $y^2+4xy-5x^2+2y-10x+9=0$; $\frac{x^{-1}}{c^{-1}}+\frac{y^{-1}}{b^{-1}}=0$; $y^2-2xy-4y-2x-6=0$.

c) $4x^2+4xy+y^2-5x-2y-10=0$; $y^2-2xy+x^2+6y+8x+1=0$;

$x^2+4x+3y-1=0$; $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}+\frac{y^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}=1$.

d) $y^2-5x^2-4xy+2y+8x-3=0$; $y^2-\frac{1}{2}xy-2y+x=0$; y^2-2xy+ $+x^2-4=0$.

e) $y^2+5x^2-4xy+6y-16x+13=0$; $y^2-8x^2-4xy+4x-2y+4=0$;

f) $y^2-2xy+x^2+6y-6x+11=0$.

642. Mit jelent a másodfokú egyenlet, ha $a=0$, vagy ha $b=0$, és mit, ha egyszersmind $h=0$?

643. Határozzuk meg a fenti egyenletek által adott görbék átmetszési pontjait a koordináta tengelyekkel.

644. Határozzuk meg a következő vonalak középpontját és alakítsuk át az egyenleteket úgy, hogy a kezdőpont a középpontban legyen: $x^2+2xy-y^2+8x-8=0$; $3x^2+4xy+y^2-5x-6y-3=0$; $2x^2-xy+2y+3x=0$.

Az ellipszis átmérői. 645. Keressük az ellipszis azon átmérőjének egyenletét, mely az ellipszis (x', y') pontján átmenő átmérőnek a társátmérője.

646. Az ellipszis egyik átmérőjének egyenlete $y = ax$; keressük azon pont koordinátáit, melyben a társátmérő az ellipszist metszi.

647. Mily hosszú azon átmérő, mely az ellipszis nagy tengelyével $20^0\ 36'$-nyi szöget alkot, ha az ellipszis tengelyei 7 és 4?

648. Bizonyítsuk be, hogy az érintési ponthoz húzott átmérő egyszersmind átmérő az érintőhöz párhuzamosan menő hurokhoz.

649. Ismerjük az ellipszist és egy érintőjét; keressük az érintési pontot.

650. Adva van az ellipszis; keressük a középpontját.

A hiperbola átmérői. 651. Határozzuk meg a hiperbola (x', y') pontján keresztül húzott átmérőhez tartozó társátmérő végpontjának koordinátáit.

652. Adva van a hiperbola, keressük a középpontját és gyújtópontjait.

A parabola átmérői. 653. A parabola azon átmérője, mely az érintési ponton megy át, felezi az érintőhöz párhuzamosan húzott húrokat.

654. Ismeretes a parabola, keressük a gyújtópontot és a vezérvonalat.

655. A parabolán belül eső ponton keresztül szerkesszünk oly húrt, melyet eme pont felez.

656. Szerkesszünk adott parabola csúcsából oly húrt, melyet egy adott átmérő felez.

Az ellipszis területe. 657. Keressük a $9y^2 + 4x^2 = 36$ ellipszis területét.

658. Mi az ellipszis területe, ha $2a = 20$, $e = 4{\cdot}6$?

659. Mekkora a $11y^2 + 5x^2 = 55$ ellipszis középpontján át a nagytengelylyel 45^0 és 30^0 szöget bezáró szelőktől meghatározott szektor területe?

A parabola területe. 660. Mi a területe azon parabolaszegmentumnak, amit a paraméter az $y^2 = 12x$ parabolából elmetsz?

661. Határozzuk meg az $y^2 = 4x$ parabola $x' = 16$ abscisszájú pontjának koordinátái és a parabola ive közé eső területet.

662. Ha $y^2 = 2x$ a parabola egyenlete, $y_1 = 7, x_2 = 9$ két pontjának abscisszái, mekkora a két pontot összekötő húr s a megfelelő parabola ív közt fekvő terület?

663. A parabola csúcsából 50^0-nyi szög alatt húr indul ki. Mily nagy az attól leszelt szegmentum területe, ha a parabola egyenlete $y^2 = 12x$?

664. A parabola-szegmentum t területéből és a tengelyre merőlegesen álló húr abscisszájából meghatározandó a húr.

665. Milyen területet vág el az $5y = 2x + 8$ egyenes az $y^2 = 4x$ parabolából?

Mértani helyek. 666. Határozzuk meg oly pontoknak mértani helyét, melyek két adott ponttól egyenlő távolságban vannak.

667. Mi az egyenlő alapú és magasságú háromszögek szögpontjainak mértani helye?

668. Keressük azon pontok mértani helyét, melyeknek két adott ponttól való távolságaik négyzetének a) különbsége, b) összege állandó szám: a.

669. Mi azon pontok mértani helye, melyeknek két adott ponttól való távolságainak aránya $m:n$?

670. Mi oly háromszögek szögpontjainak mértani helye, melyekben az alap közös s az átellenes szög is egyenlő?

671. Mi azon pontok mértani helye, melyekből két egy egyenesben fekvő távolság ugyanazon szög alatt látszik? (A két távolság végpontjainak koordinátái vannak adva.)

672. Mi azon pontok mértani helye, melyekre nézve, ha egy adott ponthoz egyenest és egy adott körhöz érintőt húzunk, a) e két távolság aránya $m:n$; b) e két távolság négyzetének összege állandó (a)?

673. Mi azon pontoknak mértani helye, amelyekből három, egy egyenesben fekvő pont egyenlő szög alatt látszik?

674. Keressük oly háromszögek szögpontjának mértani helyét, melyeknek alapja ugyanaz $(2c)$, és a másik két oldal összege vagy különbsége is állandó $(2a)$.

675. Mi azon körök középpontjának mértani helye, melyek adott ponton átmenvén, adott egyenest érintenek?

676. Mi azon háromszögek súlypontjainak mértani helye, melyek egy ellipszis (v. hiperbola) nagy (fő) tengelyén állanak és melyeknek az alappal átellenes szögpontjaik ellipszis (v. hiperbola) kerületében vannak?

677. Mi a közös alapon álló háromszögek szögpontjainak mértani helye, melyekben az alapon fekvő szögek egyike kétszerese a másiknak?

678. Mi azon pontoknak mértani helye, melyek távolságainak az aránya egy adott egyenestől és egy adott ponttól $m:n$? Mi akkor, ha $m > n$, ha $m < n$, és $m = n$?

679. Mi azon háromszögek magassági pontjainak mértani helye, melyeknek alapja az ellipszis fél nagytengelye, és átellenes szögpontjai az ellipszis kerületében vannak?

680. Mi azon háromszögek súlypontjainak a mértani helye, melyek ugyanazon alapúak és melyekben a másik két oldal $a)$ négyzetének összege, $b)$ négyzetének különbsége állandó? (Az alap legyen az X-tengely, a kezdőpont legyen az alap felező pontja. A súlypont koordinátáira nézve l. a 473. feladatot.)

681. Ha az $y^2 = 2px$ parabola valamely rádius vectorát saját hosszúságával megtoldjuk, mi lesz a meghosszabbitott rádius vector végpontjának mértani helye?

682. Valamely $(-4,7)$ pontból kiinduló egyenes a koordináta-tengelyeket akképen metszi, hogy a tengelyek közé eső részének a felező pontja M; mily görbe vonalban mozog M pont, ha az egyenes a $(-4,7)$ pont körül forog?

683. Mily görbébe esnek azon körök középpontjai, melyek valamely félkört és az ehhez tartozó átmérőt érintik?

684. Valamely pontra két állandó erő hat (P és p). A p a támadás pontja körül forog. Mi az eredő végpontjának mértani helye? (Az X-tengely a P iránya, a kezdőpont a támadás pontja.)

Vegyes feladatok. 685. Három pont koordinátái $(0, 0)$, $(10, 10)$, $(9, 3)$. Az e három ponton keresztül menő kör főköre egy gömbnek. Mekkora ezen gömbbe írt kocka felszine és köbtartalma?

686. Egy kör és egy egyenes egyenlete: $y^2 = 10x - x^2$, $y = 4x - 7$. A metszőpontokban szerkesszünk érintőket a körhöz és határozzuk meg az érintők által alkotott szöget.

687. Három pont koordinátái $(0, 1)$, $(1, 0)$ $(1, 2)$; mekkora az ezen három ponton átmenő kör területe és mekkorák azon körök sugarai, melyeket e pontokból, mint középpontokból, egymást érintően szerkesztünk?

688. Az $y^2 = 16x$ parabola csúcsán kör vonul át, melynek középpontja az X-tengelyen van és sugara $r = 6$. A két metszőpontban mindkét görbéhez érintőket húzunk. Mekkora az érintők által határolt négyszög területe?

689. Egy egyenlőoldalú háromszög oldala s; szerkesszünk e háromszög körül parabolát úgy, hogy a parabola csúcsa a háromszög egyik szögpontjával, tengelye a háromszög magasságával essék össze. Mily nagy a csúcsban találkozó oldalak által levágott két parabola-szegmentum területének összege?

690. Az $y^2 = 12\,x$ parabola gyujtópontján át húrt vonunk, mely az X-tengellyel 60^0 szöget alkot. A húr végpontjaiban érintőket húzunk. Mekkorák ezen érintők és a húr által alkotott háromszög területe, oldalai és szögei?

691. Az $x^2 + 4y^2 = 16$ ellipszis középpontjából az $y = x + 4$ egyenesre merőlegest húzunk. A merőleges felező pontján át az adott egyenessel párhuzamos húrt vonunk. Mekkora e húr?

692. Valamely ellipszis egyenlete $16x^2 + 25y^2 = 400$. Az X-tengely pozitiv oldalán fekvő gyújtóponton áthaladó húr az X-tengellyel 45^0 szöget alkot. Számítsuk ki azon háromszög területét, melynek alapja ezen húr és melynek szögpontjai az ellipszis csúcsai.

693. Egy kör és egy ellipszis közös középpontúak és egyenlő területűek. Az ellipszis kis tengelye $2b = 4$, két pontjának koordinátái $(2, \sqrt{2})$ $(-2, \sqrt{2})$. Mi lesz az ellipszis és kör egyenlete és területe?

694. Valamely hiperbolát egy vele koncentrikus kör úgy metsz, hogy a metszési pontok által határolt derékszögü négyszög területe annyi, mint a hiperbola két tengelye által meghatározott négyszög négyszerese. Mekkora a kör sugara és mily hosszúak a négyszög átlói és milyenek ezek egyenletei, ha $a = 4$, $b = 3$?

695. Az $y^2 = 8x$ parabola gyujtópontján át húrt vonunk, mely a tengellyel 60^0-nyi szöget zár be. Határozzuk meg a húr egyenletét, metszés pontjait nem különben a húr végpontjaihoz húzott érintők szögét.

696. Az $x^2 + y^2 = 25$ kör és az $y + \frac{x}{2} = 5$ egyenes metszik egymást; keressük azon egyenes kúp felszinét és köbtartalmát, melynek alapsugara e húr, és melynek magassága a húr távolsága a középponttól.

697. Egy háromszög szögpontjainak koordinátái (2, 2·5), (4·5, 5). (6, 1·5), A háromszög síkjában egy negyedik pontban, melynek koordinátái (1, 3·2), egy 6·5 hosszegységnyi merőlegest emelünk, melynek végpontját a háromszög szögpontjaival összekötjük. Mekkora a keletkezett gúla felszine és köbtartalma?

698. Valamely ellipszis féltengelyei $a = 5$ cm. és $b = 3$ cm. Ezen ellipszisbe rajzoljunk egy derékszögű négyszöget, mely egyenlő területü azon négyzettel, mely egy az ellipszissel egyenlő területü körbe irható. Milyen fekvésüek a derékszögű négyszög szögpontjai az ellipszistengelyre vonatkozólag?

699. Valamely ellipszis középpontja a rendszer kezdőpontja, kis tengelye $2b = 4$, két pontjának koordinátái $(2, \sqrt{2})$, $(-2, \sqrt{2})$. Mi lesz az ellipszis egyenlete és mi lesz azon egyenes kúp köbtartalma, melynek alapja ezen ellipszissel egyenlő területü kör és melynek magassága a két adott pontot összekötő egyenes?

700. Egy gömbszegmentum alapkörének az egyenlete: $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 0{\cdot}5 = 0$. Mekkora a szegmentum felszine és köbtartalma, ha a gömb sugara az előbbi kör középpontjának az abscisszája, és mekkora azon szabályos oktaedronnak az éle, melynek köbtartalma akkora, mint a gömbszegmentum?